

Софизмы и парадоксы: их значение в школьном курсе математики

Российская Федерация

Ханты-Мансийский автономный округ-ЮГРА

город Сургут

Автор:

Урфанян Зоя Артуровна, 11 класс

Научный руководитель:

Тараненко Галина Робертовна,

учитель математики первой категории

Научный консультант:

Коллерова Ирина Васильевна,

руководитель школьного научного

общества, магистр педагогики

Введение

Цель работы: выявить значение софизмов и парадоксов в школьном курсе математики.

Задачи:

1. Изучить и проанализировать теоретические сведения по теме проекта.
2. Применять умение использовать на практике знания, полученные в ходе самостоятельного изучения материала.
3. Разработать и создать рабочие материалы для учителей.
4. Создать компьютерную презентацию.

Методы работы над исследованием:

1. Теоретические: анализ, обобщение.
2. Эмпирические: анкетирование, беседа.

Теоретическая справка

- *Софизм* - это ложное высказывание, которое, тем не менее, при поверхностном рассмотрении кажется правильным.
- *Паралогизм* - случайная, неосознанная или непреднамеренная логическая ошибка в мышлении, возникающая при нарушении законов или правил логики и приводящая к ошибочному выводу.
- *Апория* - это вымышленная, логически верная ситуация, которая не может существовать в реальности.

Алгебраические софизмы

Пример: «Дважды два = пять»

$$2 \times 2 = 5$$

$$16 - 36 = 25 - 45 \quad (1)$$

$$16 - 36 + \frac{81}{4} = 25 - 45 + \frac{81}{4} \quad (2)$$

$$4 \times 4 - 2 \times 4 \times \frac{9}{2} + \frac{9}{2} \times \frac{9}{2} = 5 \times 5 - 2 \times 5 \times \frac{9}{2} + \frac{9}{2} \times \frac{9}{2} \quad (3)$$

Теперь можно заметить, что в левой и правой части выражения (3) записаны произведения вида:

$a^2 - 2ab + b^2$, то есть, квадрат разности: $(a-b)^2$. В нашем случае слева $a=4$, $b=\frac{9}{2}$, а справа $a=5$, $b=\frac{9}{2}$. Поэтому перепишем выражение (3) в виде квадратов разности: $(4 - \frac{9}{2})^2 = (5 - \frac{9}{2})^2 \quad (4)$

Следовательно, $4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2} \quad (5)$

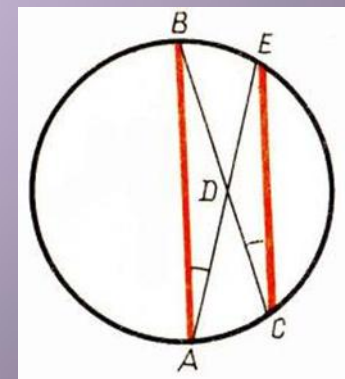
Получаем долгожданное равенство: $4 = 5$ или $2 \times 2 = 5$. В чем ошибка?

Геометрические софизмы

Пример: «Хорда окружности, не проходящая через центр, равна диаметру»

Пусть в окружности проведен диаметр AB . Через точку B проведем какую-либо хорду BC , не проходящую через центр; затем через середину этой хорды D и точку A проведем новую хорду AE ; наконец, точки E и C соединим отрезком (рис. 1). Рассмотрим треугольники ABD и EDC . В них $BD = DC$ (по построению), $\angle A = \angle C$ (как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу). Кроме того, $\angle BDA = \angle EDC$ (как вертикальные). Если же сторона и два угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны. Значит, $AB = EC$. Поэтому $AB = EC$. В чем ошибка?

Рис. 1



Логические софизмы

Пример:

- **Рогатый.**

Что ты не терял, то имеешь. Рога ты не терял. Значит, у тебя рога.

- **Полупустое, полуполное.**

Полупустое есть то же, что и полуполное. Если равны половины, значит, равны и целые. Следовательно, пустое есть то же, что и полное.

- **Глаза.**

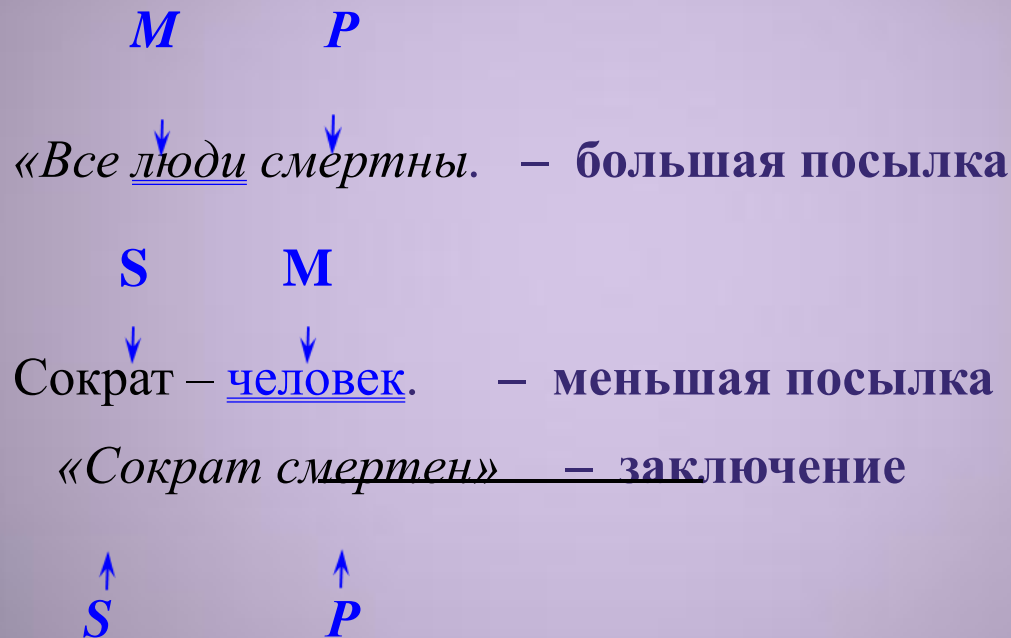
Для того чтобы видеть, вовсе необязательно иметь глаза. Ведь без правого глаза мы видим, без левого тоже видим; кроме правого и левого, других глаз у нас нет; поэтому ясно, что глаза не являются необходимыми для зрения.

Основные понятия в теме «Софизмы»

- *Суждение* - форма мышления, в которой утверждается или отрицается наличие свойств у предметов, отношения между предметами и т.д.
- *Категорическое суждение* - это такой вид суждений, в котором однозначно определено качество (утверждение, отрицание) и количество (общее, частное).
- *Умозаключение* - форма мышления, когда из нескольких суждений выводится новое суждение.

- **Силлогизм** – такой вид умозаключения, в котором из двух категорических суждений выводится новое категорическое суждение:

- **Логическая форма силлогизма:**



- **Фигура силлогизма** – такой тип силлогизма, который определяется на основе способа расположения терминов в посылке.

Классификация ошибок

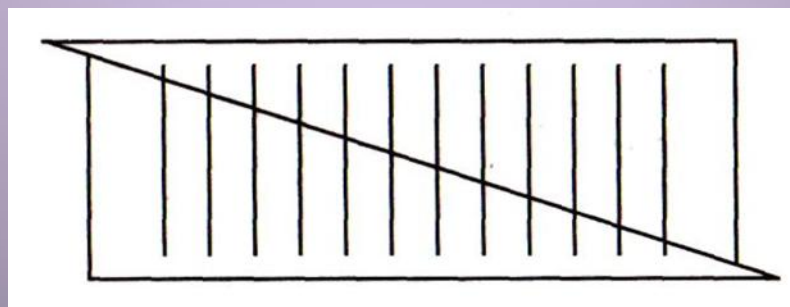
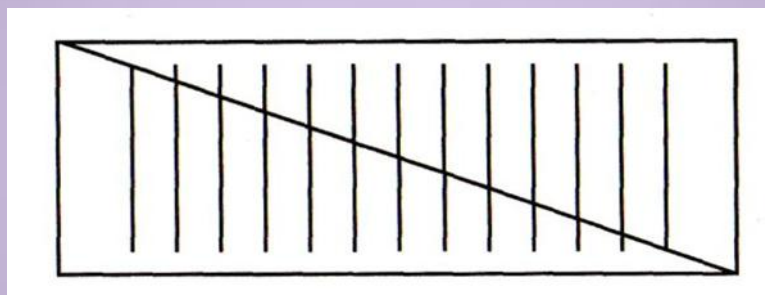
Логические	Терминологические	Психологические
<p>Красиво выстроенные софизмы, которые оп-ровергают очевидные факты. Наиболее рас-пространенная группа софизмов.</p> <p>Пример:</p> <ul style="list-style-type: none"> 5 есть ("два + три"). Два – число чётное, три – нечёт-ное, выходит, что пять – число и чётное и не-чётное. 	<p>Возникают при неточ-ном или неправильном словоупотреблении и по-строении фразы или при неправильном построе-нии целого сложного хода доказательств.</p> <p>Пример:</p> <ul style="list-style-type: none"> Сколько будет: дважды два плюс пять? Здесь трудно решить имеется ли в виду 9 (т.е. $(2 \times 2) + 5$) или 14 (т.е. $2 \times (2 + 5)$). 	<p>Встречаются при общении, в основном, двух лиц. В таких софизмах проявляются все законы психологии.</p> <p>Пример:</p> <ul style="list-style-type: none"> Объявление на двери <div> <div>МЫ РЕМОНТИРУЕМ ВСЁ!</div> <div>(Стучите громче – звонок не работает)</div> </div>

Алгоритм нахождения ошибок в софизмах

Алгоритм:

1. Начинать поиск ошибки лучше с условия предложенного софизма. В некоторых софизмах абсурдный результат, получается, из-за противоречивых или неполных данных в условии, неправильного чертежа, ложного первоначального предположения, а далее все рассуждения проводятся верно. Это и вызывает затруднения при поиске ошибки. Все привыкли, что задания, предполагаемые в различной литературе, не содержат ошибок в условии и поэтому если получается неверный результат, то ошибку они ищут непременно по ходу решения.
2. Установить области знаний, которые отражены в софизме, предложенных преобразованиях. Софизм может делиться на несколько тем, которые потребуют детального анализа каждой из них.
3. Выяснить, соблюдены ли все условия применимости теорем, правил, формул, соблюдена ли логичность. Некоторые софизмы построены на неверном использовании определений, законов, на «забывании» условий применимости.
4. Очень часто в формулировках, правилах запоминаются основные, главные фразы и предложения, всё остальное упускается. И тогда второй признак равенства треугольников превращается в признак «по стороне и двум углам».
5. Проверить результаты преобразования обратным действием. Часто следует разбить работу на небольшие блоки и проконтролировать правильность каждого такого блока.

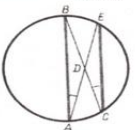
- **Парадокс** – это ситуация, которая может существовать в реальности, но не имеет логического объяснения.
- Геометрические парадоксы.



Опрос среди учителей математики, физики и информатики МБОУ СОШ №13

Знаете ли Вы, что такое софизм?	1. Да 2. Нет
Считаете ли Вы, что разбор софизмов развивает логическое мышление?	1. Да 2. Нет
Считаете ли Вы, что разбор софизмов помогает сознательному усвоению изучаемого математического материала?	1. Да 2. Нет
Считаете ли Вы, что осознание ошибки, найденной при помощи софизма, предупреждает от повторения её в других математических рассуждениях?	1. Да 2. Нет
Считаете ли Вы, что работа над ошибками с использованием софизмов более качественна, чем стандартный разбор задач?	1. Да 2. Нет

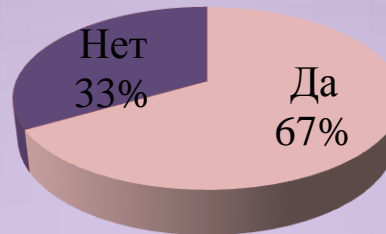
Тестирование, проведенное в физико-математическом классе

Знаете ли Вы, что такое софизм?	1. Да 2. Нет
<p>Алгебраический софизм: «$1 = 2$»</p> <p>Где ошибка в следующей цепочке следствий из верного утверждения:</p> $1 - 3 = 4 - 6$ $1 - 3 + \frac{9}{4} = 4 - 6 + \frac{9}{4}$ $\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2$ $\sqrt{\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2}$ $1 - \frac{3}{2} = 2 - \frac{3}{2}$ $1 = 2$	<p>1. Да</p> $\sqrt{\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2}$ $\left 1 - \frac{3}{2}\right = \left 2 - \frac{3}{2}\right $ $ -0,5 = 0,5 $ $0,5 = 0,5$
<p>Геометрический софизм: «Хорда окружности, не проходящая через центр, равна диаметру»</p> <p>Пусть в окружности проведен диаметр AB. Через точку B проведем какую-либо хорду BC, не проходящую через центр, затем через середину этой хорды D и точку A проведем новую хорду AE; наконец, точки E и C соединим отрезком (рис. 10). Рассмотрим треугольники ABD и EDC. В них $BD = DC$ (по построению), $\angle A = \angle C$ (как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу). Кроме того, $\angle BDA = \angle EDC$ (как вертикальные). Если же сторона и два угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны. Значит, $\triangle BDA = \triangle EDC$. Поэтому $AB = EC$. В чем ошибка? Рис. 10</p> 	<p>ниверное утверждение равенства сходственных сторон: из рисунка видно что $BD \neq DC$, а для равенства круговых дуг нужен $\angle A$ (сторона и 2 прилежащих к ней угла) $\angle B \neq \angle D$ и $\angle C \neq \angle E$ но являются прилежащими углами к BD. Для того, чтобы $\triangle ABD$ был равен $\triangle CED$, нужны равенства BD и CE, а не CD и BD, как предположено в условии.</p>

Результаты тестирования

- *Диаграмма 1 вопроса:*

Знаете ли Вы, что такое софизм?



- *Диаграмма 2 вопроса:*

Алгебраический софизм



- *Диаграмма 3 вопроса:*

Геометрический софизм



Самостоятельная работа №1 по теме: «Квадратный корень»

Самостоятельная работа №1

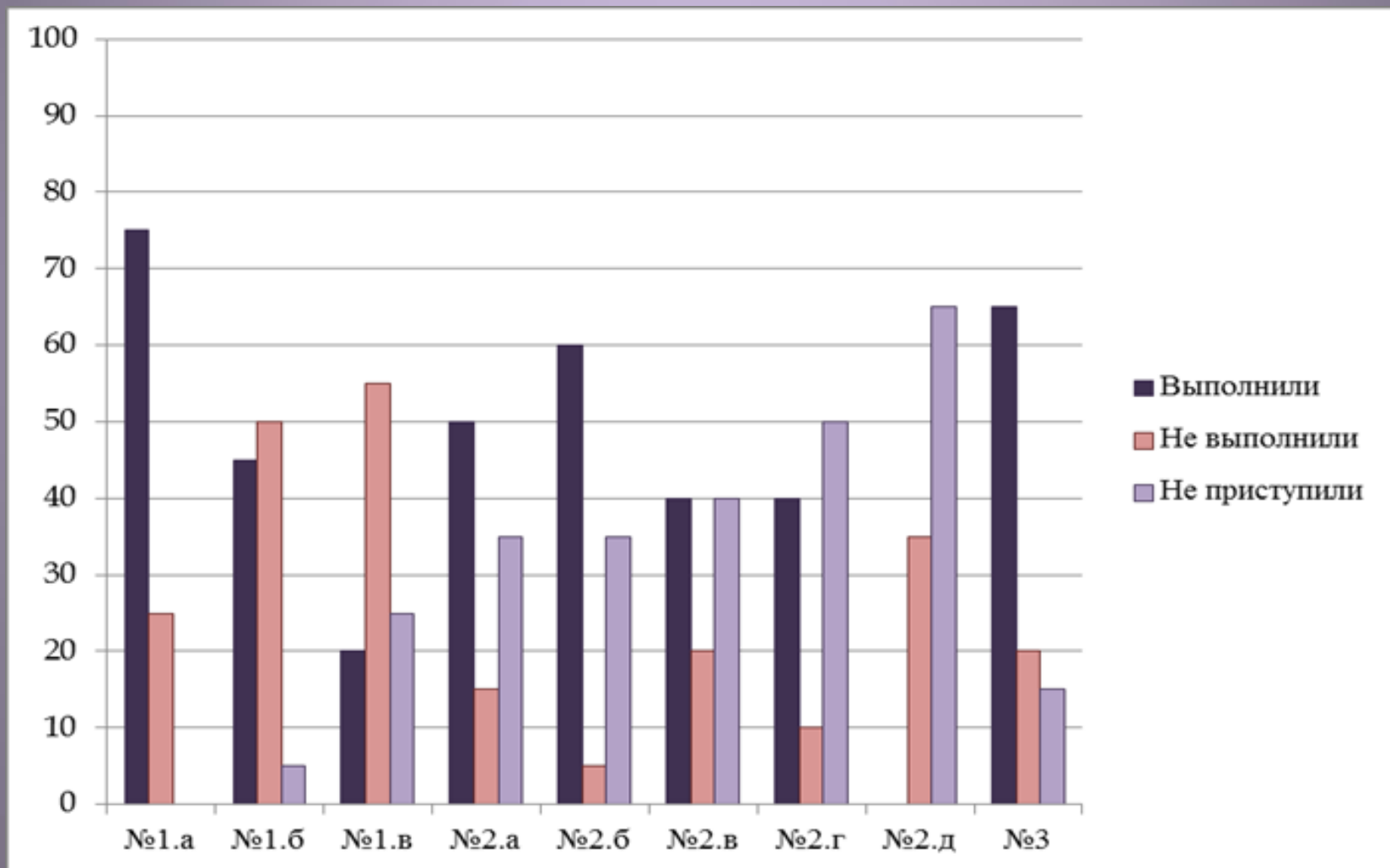
1. Решите уравнение: а) $5\sqrt{x}=3$ б) $\frac{1}{4\sqrt{x}}=2$ в) $5x\sqrt{2x}=15\sqrt{8x}$

2. Укажите допустимые значения переменных в выражениях:

а) $\sqrt{(4-x)^2}$ б) $\sqrt{x^2+1}$ в) $\sqrt{-ab}$ г) $\frac{4}{\sqrt{x}}$ д) $\frac{5}{\sqrt{x}-1}$

3. Вычислите значение выражения при $n=3$: $n+\sqrt{1-2n+n^2}$

Результаты самостоятельной работы №1



Работа над ошибками

Работа над ошибками.

1. $1=2$.

Где ошибка в следующей цепочке следствий из верного утверждения:

$$1-3=4-6,$$

$$1-3+\frac{9}{4}=4-6+\frac{9}{4},$$

$$\left(1-\frac{3}{2}\right)^2=\left(2-\frac{3}{2}\right)^2,$$

$$\sqrt{\left(1-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2},$$

$$1-\frac{3}{2}=2-\frac{3}{2},$$

$$1=2. \text{ В чем ошибка?}$$

2. Два ученика решили уравнение $5x\sqrt{2x}=15\sqrt{8x}$ различными способами.

Решение первого ученика: $5x\sqrt{2x}=15\sqrt{8x}$

$$x\sqrt{2x}=3\cdot 2\sqrt{2x},$$

$$\sqrt{2x}(x-6)=0,$$

$$\sqrt{2x}=0, \text{ или } x-6=0,$$

$$\sqrt{2x}=0 \Leftrightarrow x=0,$$

$$x-6=0 \Leftrightarrow x=6. \text{ Ответ: } x=0, x=6.$$

Решение второго ученика: $5x\sqrt{2x}=15\sqrt{8x}$,

$$x\sqrt{2x}=3\sqrt{8x}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$2x^3=72x \Leftrightarrow 2x(x-6)(x+6)=0.$$

$$\text{Ответ: } x=0, x=6, x=-6$$

1) Которое решение выполнено правильно?

2) Объясните допущенные ошибки.

3. Два ученика вычисляли при $n=3$ значение выражения $n+\sqrt{1-2n+n^2}$ каждый своим способом.

Один из них рассуждал так: $n+\sqrt{1-2n+n^2}=n+\sqrt{(1-n)^2}=n+1-n=1$ при любых n .

Другой сразу подставлял в алгебраическое выражение заданное значение n .

1) Кто из двух верно решил задачу?

2) Найти допущенные ошибки.

Самостоятельная работа №2 по теме: «Квадратный корень»

Самостоятельная работа №2

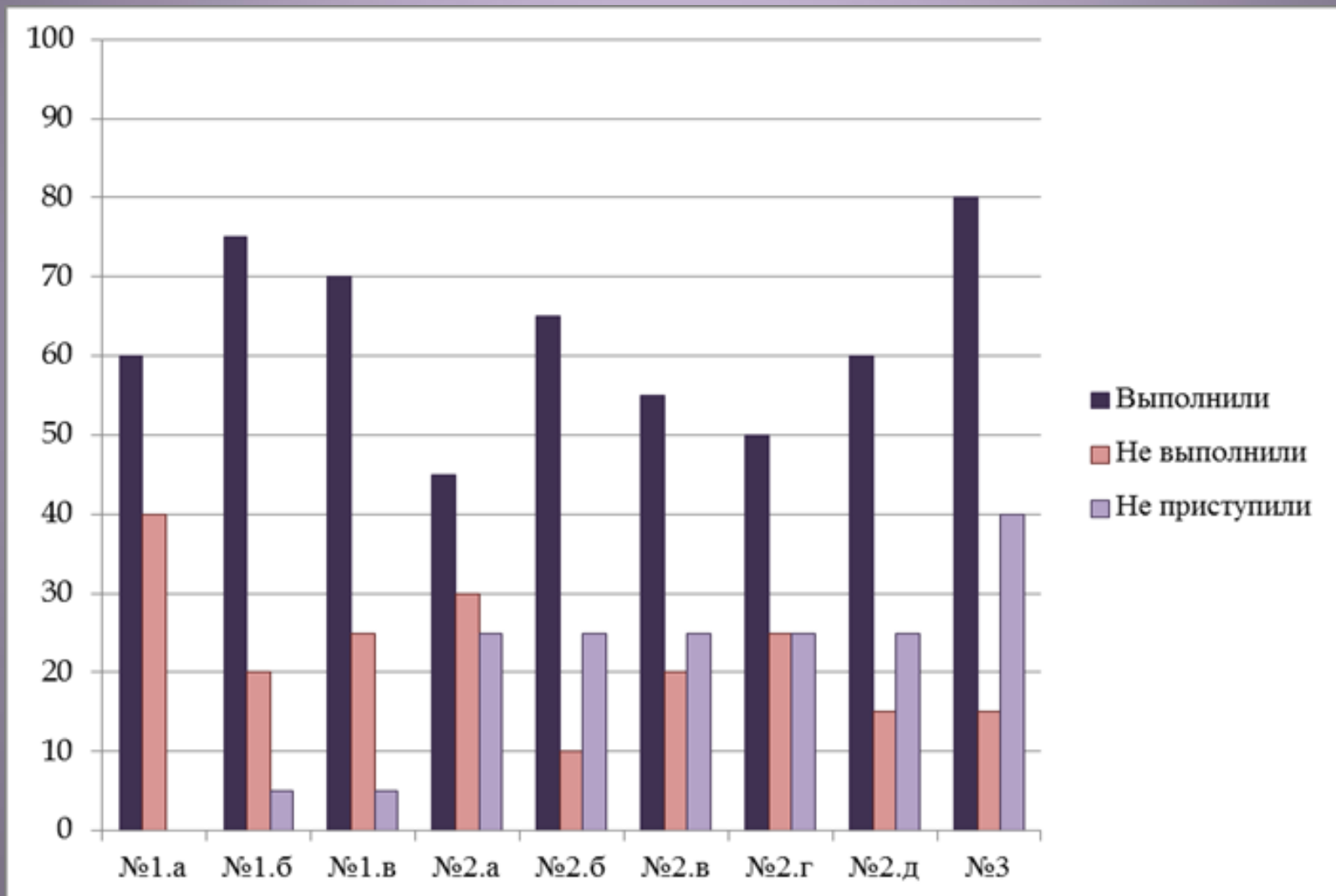
1. Решите уравнение: а) $\frac{1}{\sqrt{3x}} = 1$ б) $\sqrt{x-5} = 4$ в) $6x\sqrt{3x} = 18\sqrt{12x}$

2. Укажите допустимое значение переменных в выражениях:

а) $\sqrt{-x^3}$ б) $\sqrt{x^3}$ в) $\sqrt{-ab^2}$ г) $\frac{1}{\sqrt{x+2}}$ д) $\sqrt{a^2b}$

3. Вычислите значение выражения при $k = 7$: $-k + \sqrt{1+2k+k^2}$

Результаты самостоятельной работы №2



Рабочие материалы для учителей

Заключение

*Математика – это игра ума, которая
всегда права.*

*Так играйте же в неё правильно, не
допуская ошибок!*

XVII городская научная конференция молодых исследователей «ШАГ В БУДУЩЕЕ»



ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ АДМИНИСТРАЦИИ ГОРОДА
МУНИЦИПАЛЬНОЕ КАЗЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЙ ЦЕНТР»

СВИДЕТЕЛЬСТВО

Участника очного этапа XVII городской научной конференции молодых исследователей «ШАГ В БУДУЩЕЕ»
вручается

Урдаманен Зое Артуровне
(фамилия, имя, отчество)

Образовательная организация *МБОУ сош № 13*

Научный руководитель *Урдаманенко Татьяна Робертовна*

Директор департамента образования Администрации города

Директор муниципального казенного учреждения
«Информационно-методический центр»

г. Сургут – 2015



Т. Н. Османкина

С. П. Гончарова



ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ
АДМИНИСТРАЦИИ ГОРОДА

МУНИЦИПАЛЬНОЕ КАЗЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЙ ЦЕНТР»

ДИПЛОМ III СТЕПЕНИ

XVII городской научной конференции
молодых исследователей «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Учащаяся
Зоя Артуровна
учащаяся 11 класса
МБОУ СОШ №13
секция «Математика»

Научный руководитель *Огарченко*
Галина Робертовна

Директор департамента
образования Администрации города

Директор муниципального
казенного учреждения
«Информационно-методический центр»



Т. Н. Османкина



С. П. Гончарова

XXV Юбилейный Всероссийский форум научной молодежи «Шаг в будущее»



РОССИЙСКАЯ НАУЧНО-СОЦИАЛЬНАЯ ПРОГРАММА ДЛЯ МОЛОДЕЖИ И ШКОЛЬНИКОВ

ШАГ В БУДУЩЕЕ

XXV

Юбилейный Всероссийский форум научной молодежи
«Шаг в будущее»

Россия, г. Москва, 21-25 марта 2016 г.

Свидетельство

УРФАНЯН Зоя Артуровна

Ханты-Мансийский автономный округ-Югра, г. Сургут
МБОУ средняя общеобразовательная школа №13, 11 класс

принял(а) участие
в Юбилейном Всероссийском форуме научной молодежи
«Шаг в будущее»

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Московский технологический университет (МИРЭА)

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

ФИЦ «Фундаментальные основы биотехнологии» Российской академии наук

Институт всеобщей истории Российской академии наук

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»

Московский педагогический государственный университет

Российский государственный гуманитарный университет

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Психологический институт Российской академии образования

Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина

Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева

Национальный исследовательский технологический университет «Московский институт стали и сплавов»

Московский гуманитарно-экономический институт

Московский государственный университет дизайна и технологии

С ДОКЛАДОМ

СОФИЗМЫ И ПАРАДОКСЫ: ИХ ЗНАЧЕНИЕ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Председатель
Центрального Совета
программы «Шаг в будущее»

Председатель Жюри
Всероссийского форума
научной молодежи
«Шаг в будущее»

А.О. КАРПОВ

В.Н. НАУМОВ

24 марта 2016 г.

Российская научно-социальная программа для молодежи и школьников «Шаг в будущее»

ДИПЛОМ

XXV лет программе «Шаг в будущее»

I СТЕПЕНИ

Юбилейного
Всероссийского
форума научной
молодежи
«Шаг в будущее»
21-25 марта 2016 г.

лауреата Российской
научно-социальной программы
для молодежи и школьников
«Шаг в будущее» присужден
за высокие результаты
в научных исследованиях



УРФАНИЯН Зое Артуровне

СОФИЗМЫ И ПАРАДОКСЫ: ИХ ЗНАЧЕНИЕ В
ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Ханты-Мансийский
автономный
округ – Югра,
г. Сургут,
МБОУ СОШ №13,
11 класс



Настоящий диплом подтверждает
высокое качество научных результатов,
их успешную апробацию и, в случае
необходимости может быть принят во
внимание при поступлении в Высшее
учебное заведение на специальность,
соответствующую тематике
исследований.

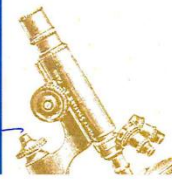
This diploma certifies high quality of
research results obtained by the laureate
and may be taken into consideration when
he/she applies for admission to a relevant
department of higher academic institution



В.Л. Петров
Проректор по учебной
работе НИТУ «МИСиС»



А.О. Карпов
Председатель
Центрального Совета
программы
«Шаг в будущее»





РЕКОМЕНДАЦИЯ

Экспертный Совет Российской научно-социальной программы для молодежи и школьников «Шаг в будущее» рекомендует для публикации в сборнике «Научные труды молодых исследователей программы «Шаг в будущее» (том 19, 2016 год) статью

УРФАНИЯН Зои Артуровны

*Ханты-Мансийский автономный округ - Югра, г. Сургут
МБОУ средняя общеобразовательная школа №13, 11 класс*

по результатам научно-исследовательской работы

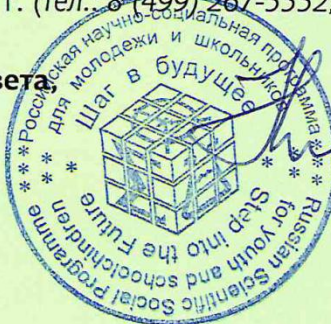
СОФИЗМЫ И ПАРАДОКСЫ: ИХ ЗНАЧЕНИЕ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

представленной на Всероссийском форуме научной молодежи «Шаг в будущее» (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 21-25 марта 2016 г.).

Статья должна быть оформлена в соответствии с прилагаемыми правилами и доставлена в Оргкомитет программы «Шаг в будущее» до 20 июня 2016 г. (тел.: 8 (499) 267-5552, 263-6282).

Заместитель Председателя Экспертного Совета,
профессор МГТУ им. Н.Э. Баумана

НАУМОВ В.Н.





Российская научно-социальная программа для молодежи и школьников
«Шаг в будущее»



Нагрудный знак
«ШКОЛЬНИК-ИССЛЕДОВАТЕЛЬ»
программы «Шаг в будущее»

награждается

УРФАНИЯ Зоя Артуровна

Ханты-Мансийский автономный округ-Югра, г. Сургут
МБОУ средняя общеобразовательная школа №13, 11 класс

за высокие результаты
научных исследований и разработок,
за творческий поиск нового и стремление к истине,
составляющие суть работы
настоящего ученого.

Председатель Центрального Совета
программы «Шаг в будущее»

Наградной акт от 23 марта 2016 года № 2



КАРПОВ А.О.

24 марта 2016 г.



ШАГ В БУДУЩЕЕ



ДИПЛОМ

в профессиональной номинации

«ЛУЧШАЯ РАБОТА В ОБЛАСТИ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,
АВТОМАТИЗАЦИИ И ЭНЕРГОСБЕРЕЖЕНИЯ»

присужден

УРФАНИЯН Зое Артуровне

*Ханты-Мансийский автономный округ-Югра, г. Сургут
МБОУ средняя общеобразовательная школа №13, 11 класс*

за исследовательскую работу

СОФИЗМЫ И ПАРАДОКСЫ: ИХ ЗНАЧЕНИЕ В
ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

на Юбилейном Всероссийском форуме научной
молодежи «Шаг в будущее»
(г. Москва, 21-25 марта 2016 г.)

Председатель Жюри
Всероссийского форума научной
молодежи «Шаг в будущее»,
профессор

В.Н. НАУМОВ



Председатель
Центрального Совета программы
«Шаг в будущее»

А.О. КАРПОВ

25 марта 2016 г.



МАЛАЯ НАУЧНАЯ МЕДАЛЬ

Настоящим удостоверяется
награждение Малой научной медалью
программы «Шаг в будущее»

УРФАНИЯН Зои Артуровны

Ханты-Мансийский автономный округ-Югра, г. Сургут
МБОУ средняя общеобразовательная школа №13, 11 класс

за большие успехи
в научно-исследовательской деятельности

Председатель Жюри
Всероссийского форума научной
молодежи «Шаг в будущее»,
профессор



В.Н. НАУМОВ

г. Москва
25 марта 2016 г.

Спасибо за внимание!