



Задание 20

«Алгебраические выражения, уравнения, неравенства и их системы»

**Автор: Павиланис Светлана Михайловна,
учитель математики МБОУ СОШ № 44,
город Сургут, ХМАО - Югра**

Алгебраические выражения



1. Сократите дробь

$$\frac{18^{n+3}}{3^{2n+5} \cdot 2^{n-2}}$$

Решение.

Используем свойства степеней:

$$\begin{aligned} \frac{18^{n+3}}{3^{2n+5} \cdot 2^{n-2}} &= \frac{(9 \cdot 2)^{n+3}}{3^{2n+5} \cdot 2^{n-2}} = \frac{3^{2n+6} \cdot 2^{n+3}}{3^{2n+5} \cdot 2^{n-2}} = \\ &= 3^{2n+6-(2n+5)} \cdot 2^{n+3-(n-2)} = 3 \cdot 2^5 = 96. \end{aligned}$$

Ответ: 96.



2. Упростите выражение: $\frac{5^{n+1} - 5^{n-1}}{2 \cdot 5^n}$

Решение.

Используем свойства степеней:

$$\begin{aligned} \frac{5^{n+1} - 5^{n-1}}{2 \cdot 5^n} &= \frac{5 \cdot 5^n - \frac{5^n}{5}}{2 \cdot 5^n} = \frac{5^n(5 - \frac{1}{5})}{2 \cdot 5^n} = \frac{5 - \frac{1}{5}}{2} = \\ &= \frac{24}{10} = 2,4. \end{aligned}$$

Ответ: 2,4.



3. Сократите дробь: $\frac{(2a^2)^3 \cdot (3b)^2}{(6a^3b)^2}$.

Решение.

$$\frac{(2a^2)^3 \cdot (3b)^2}{(6a^3b)^2} = \frac{8a^6 \cdot 9b^2}{36a^6b^2} = \frac{72}{36} = 2.$$

Ответ: 2.



4. Упростите выражение $\frac{\sqrt{\sqrt{10}-2} \cdot \sqrt{\sqrt{10}+2}}{\sqrt{24}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\sqrt{10}-2} \cdot \sqrt{\sqrt{10}+2}}{\sqrt{24}} &= \frac{\sqrt{(\sqrt{10}-2)(\sqrt{10}+2)}}{\sqrt{24}} = \\ &= \frac{\sqrt{10-4}}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{24}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: 0,5.



5. Упростите выражение $\frac{m}{m^2 - 2m + 1} - \frac{m + 2}{m^2 + m - 2}$.

Решение.

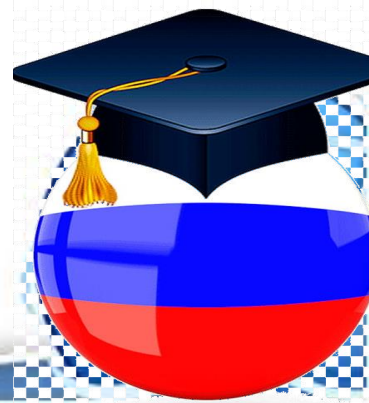
Корни квадратного трёхчлена $m^2 + m - 2$: $m_1 = -2$, $m_2 = 1$.

Разложим данный квадратный трёхчлен на множители

$$m^2 + m - 2 = (m + 2)(m - 1).$$

$$\begin{aligned} \frac{m}{m^2 - 2m + 1} - \frac{m + 2}{m^2 + m - 2} &= \frac{m}{(m - 1)^2} - \frac{m + 2}{(m + 2)(m - 1)} = \\ &= \frac{m}{(m - 1)^2} - \frac{1}{m - 1} = \frac{m - (m - 1)}{(m - 1)^2} = \frac{1}{(m - 1)^2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{(m - 1)^2}$.



6. Найдите значение выражения $\frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}$, если

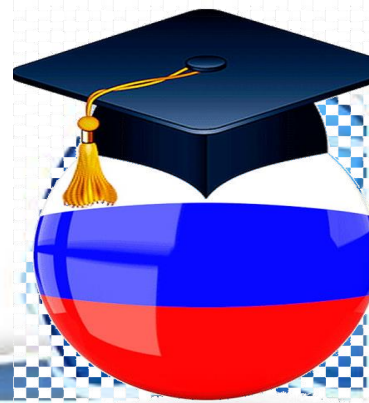
$$p(b) = \left(b + \frac{5}{b}\right) \left(5b + \frac{1}{b}\right).$$

Решение.

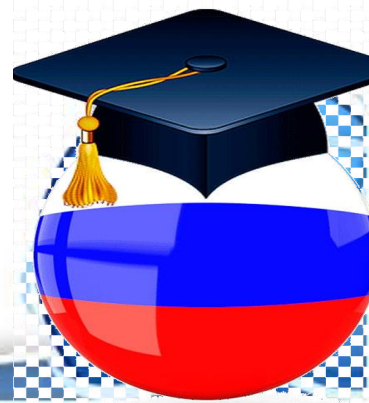
Найдём значение выражения $p\left(\frac{1}{b}\right) = \left(\frac{1}{b} + 5b\right) \left(\frac{5}{b} + b\right) = p(b)$.

Поэтому $\frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)} = 1$.

Ответ: 1.



Уравнения



1. Решите уравнение $(2x - 3)^2 = (1 - 2x)^2$.

Решение.

Перенесем все члены влево и применим формулу разности квадратов:

$$(2x - 3)^2 - (1 - 2x)^2 = 0;$$

$$-2(4x - 4) = 0;$$

$$x = 1.$$

Другой способ. Раскроем скобки, пользуясь формулой квадрата разности:

$$4x^2 - 12x + 9 = 1 - 4x + 4x^2;$$

$$8x = 8;$$

$$x = 1.$$

Ответ: 1.



2. Решите уравнение $(x^2 - 25)^2 + (x^2 + 3x - 10)^2 = 0$

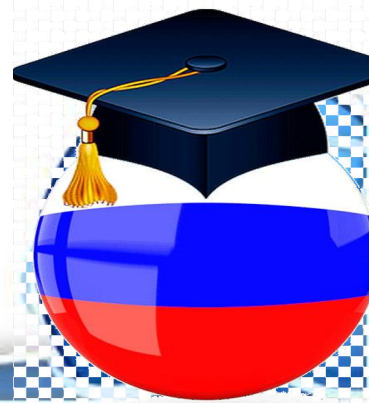
Решение.

Квадрат любого числа неотрицателен. Сумма двух неотрицательных чисел равна нулю, только если они оба равны нулю. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 25 = 0, & \text{Из первого уравнения } x = -5 \text{ или } x = 5. \\ x^2 + 3x - 10 = 0. & \text{Из второго уравнения } x = -5 \text{ или } x = 2. \end{cases}$$

Системе удовлетворяет единственное значение -5 .

Ответ: -5 .



3. Решите уравнение $x^2 - 2x + \sqrt{3 - x} = \sqrt{3 - x} + 8$.

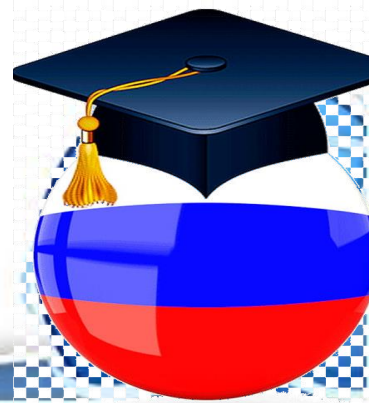
Решение.

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0, \\ x^2 - 2x - 8 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ \begin{cases} x = -2, \\ x = 4; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

Ответ: - 2.



Неравенства



1. Решите неравенство $(\sqrt{3} - 1,5)(3 - 2x) > 0$

Решение.

Определим знак разности $\sqrt{3} - 1,5$.

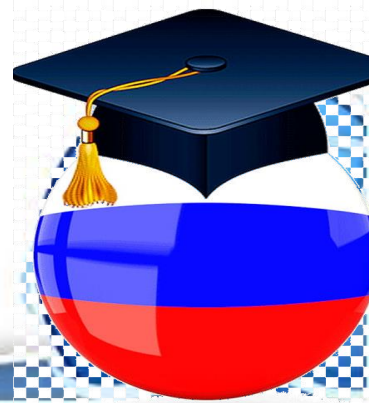
Так как $1,5 = \sqrt{2,25}$ и $\sqrt{3} > \sqrt{2,25}$, то $\sqrt{3} - 1,5 > 0$.

Получаем неравенство $3 - 2x > 0$.

Отсюда $x < 1,5$.

Ответ: $(-\infty; 1,5)$.

Другая возможная форма ответа: $x < 1,5$.



2. Решите неравенство $\frac{-10}{(x-3)^2-5} \geq 0$.

Решение.

Решим неравенство методом интервалов, для этого, сначала, найдём корни уравнения $(x-3)^2-5=0$:

$$x^2 - 6x + 9 - 5 = 0$$

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 3 - \sqrt{5}, \\ x = 3 + \sqrt{5}. \end{array} \right.$$

Теперь расставим точки на числовой прямой и определим знаки *исходного* выражения на каждом получившемся промежутке.



Ответ: $(3 - \sqrt{5}; 3 + \sqrt{5})$.



3. Решите неравенство $(x - 7)^2 < \sqrt{11}(x - 7)$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$(x - 7)^2 - \sqrt{11}(x - 7) < 0$$

$$(x - 7)(x - 7 - \sqrt{11}) < 0$$



$$7 < x < 7 + \sqrt{11}.$$

Ответ: $(7; 7 + \sqrt{11})$.



4. Решите неравенство $(4x - 6)^2 \geq (6x - 4)^2$.

Решение.

$$\begin{aligned}(4x - 6)^2 &\geq (6x - 4)^2 \Leftrightarrow (4x - 6)^2 - (6x - 4)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (4x - 6 - (6x - 4))(4x - 6 + (6x - 4)) &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (-2x - 2)(10x - 10) &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2 \cdot 10(x + 1)(x - 1) &\geq 0 \Leftrightarrow \\ (x + 1)(x - 1) &\leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.\end{aligned}$$

Ответ: $[-1; 1]$.



Системы уравнений



1. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} (2x + 3)^2 = 5y, \\ (3x + 2)^2 = 5y. \end{cases}$$

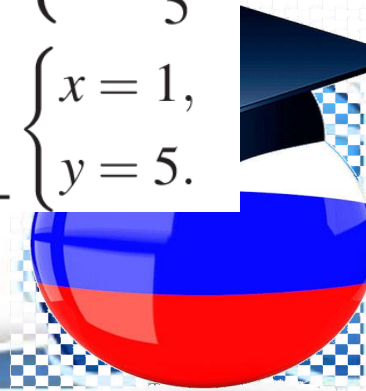
Решение.

Вычтем из первого уравнения второе, используем формулу разности квадратов, затем метод подстановки:

$$\begin{cases} (2x + 3)^2 - (3x + 2)^2 = 0, \\ (3x + 2)^2 = 5y; \end{cases} \quad \begin{cases} (2x + 3 + 3x + 2)(2x + 3 - 3x - 2) = 0, \\ (3x + 2)^2 = 5y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5x + 5)(1 - x) = 0, \\ (3x + 2)^2 = 5y; \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x = -1, \\ x = 1, \end{cases} \\ 5y = (3x + 2)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x = -1, \\ 5y = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ 5y = 25; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x = -1, \\ y = \frac{1}{5}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 5. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $\left(-1; \frac{1}{5}\right), (1; 5).$



2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} (x-4)(y-6) = 0, \\ \frac{y-4}{x+y-8} = 2. \end{cases}$$

Решение.

Решая, первое уравнение системы: $(x-4)(y-6) = 0$,
получим: $x = 4$ или $y = 6$.

Подставим эти значения во второе уравнение.

При $x = 4$
$$\frac{y-4}{4+y-8} = 2 \Leftrightarrow \frac{y-4}{y-4} = 2.$$

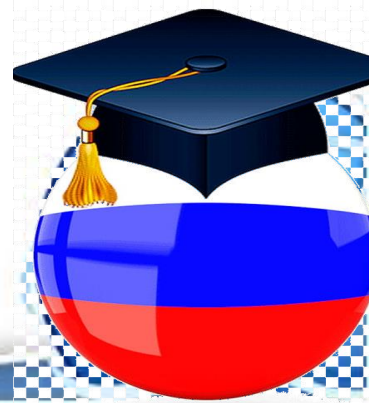
Это уравнение не имеет решений.

При $y = 6$
$$\frac{6-4}{x+6-8} = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{x-2} = 2 \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: (3; 6).



Системы неравенств



2. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \frac{10 - 2x}{3 + (5 - 2x)^2} \geq 0, \\ 2 - 7x \leq 14 - 3x. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство системы:

$$\frac{10 - 2x}{3 + (5 - 2x)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(5 - x)}{3 + 25 - 20x + 4x^2} \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{5 - x}{2x^2 - 10x + 14} \geq 0 \text{ Выражение } 2x^2 - 10x + 14$$

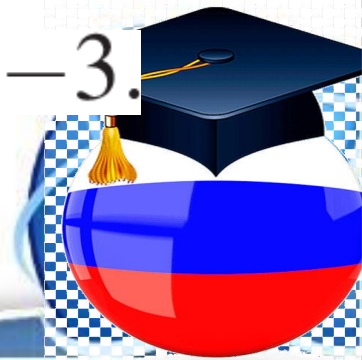
всегда больше нуля, поэтому данное неравенство равносильно неравенству $5 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$.

Решим второе неравенство системы:

$$2 - 7x \leq 14 - 3x \Leftrightarrow 4x \geq -12 \Leftrightarrow x \geq -3.$$

Пересекая решения обоих неравенств, получим, что решением системы является отрезок $[-3; 5]$.

Ответ: $[-3; 5]$.



Источники (электронные ресурсы):

<https://math-oge.sdamgia.ru/>

<https://fipi.ru/oge/otkrytyy-bank-zadaniy-oge#!/tab/173942232-2>



Благодарю за внимание

