Решаем рационально на ЕГЭ

Литвиненко Тамара Васильевна, учитель математики МБОУ СОШ №13, г. Сургут

Решение логарифмических неравенств, содержащих переменную в основании логарифма: методы, приемы, равносильные переходы

- Метод рационализации: $\log_{k(x)} f(x) > \log_{k(x)} g(x)$

равносильно неравенству $(f(x) - g(x))(k(x) - 1) > 0$

(знак неравенсва любой, но одинаковые в обоих неравенствах).

При отбрасывании логарифмов могут появиться посторонние корни. Не забывайте ОДЗ логарифма!

Всё, что связано с ОДЗ, выписываем и решаем отдельно: $f(x) > 0$; $g(x) > 0$; $k(x) > 0$; $k(x) \neq 1$.

Выражение (множитель) в неравенстве *(правая часть неравенства равна нулю!)*	**На что меняем**
$\log_a f - \log_a g$ (*помните, что* f >0, g >0,a >0, a≠1)	$(a-1)\cdot(f-g)$
$\log_a f - 1$ (*помните, что* f >0, ,a >0, a≠1)	$(a-1)\cdot(f-a)$
$\log_a f$ (*помните, что* f >0, a >0 ,a≠1)	$(a-1)\cdot(f-1)$

Примечание: ***a – функция от x или число, f и g – функции от x.***

№1 Решите неравенство:

- $\log_{x^2+1} 10 < 1$. Решение: Выпишем ОДЗ логарифма:

$$\begin{cases} 10 > 0, \\ x^2 + 1 > 0, \\ x^2 + 1 \neq 1. \end{cases}$$

Распишем последнее неравенство: $x^2 + 1 \neq 1$; $x^2 \neq 0$; $x \neq 0$. ОДЗ логарифма все числа, кроме нуля: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Теперь решаем основное неравенство: $\log_{x^2+1} 10 < 1$;

$$\log_{x^2+1} 10 < \log_{x^2+1}(x^2 + 1)^1;$$

Выполняем переход от логарифмического неравенства к рациональному.

Имеем:

$(10 - (x^2 + 1)) \cdot (x^2 + 1 - 1) < 0;$

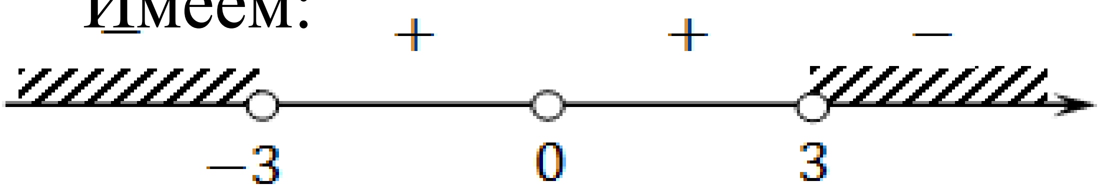
$(9 - x^2) \cdot x^2 < 0;$

$(3 - x) \cdot (3 + x) \cdot x^2 < 0.$

Нули этого выражения: $x = 3$; $x = -3$; $x = 0$.

Причем $x = 0$ — корень второй кратности, значит при переходе через него знак функции не меняется.

Имеем:



Получаем $x \in (-\infty\ -3) \cup (3; +\infty)$. Данное множество полностью содержится в ОДЗ логарифма, значит это и есть ответ.

<u>Ответ:</u> $\boldsymbol{x \in (-\infty\ -3) \cup (3; +\infty)}$

№2 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 4^x - 129 \le 2^{x+7}, \\ \log_{x+8}\left(\dfrac{7-x}{x+1}\right)^2 \le 1 - \log_{x+8}\dfrac{x+1}{x-7}. \end{cases}$$

Решение.

1) *ОДЗ:*

$$\begin{cases} x+8>0, \\ \dfrac{x+1}{x-7}>0, \\ x+8 \ne 1; \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in (-8;-7) \cup (-7;-1) \cup (7;+\infty).$$

2) $4^x - 129 \le 2^{x+7}$

$4^x - 128 \cdot 2^x - 129 \le 0$

Пусть $2^x = t,\ t > 0,$ *тогда*

$t^2 - 128 \cdot t - 129 \le 0$

$(t+1)(t-129) \le 0$

$-1 \le t \le 129$

Учитывая, что $t > 0$, *имеем*

$0 < t \le 129$

Вернемся к исходной переменной

$0 < 2^x \le 129$

$2^x \le 2^{\log_2 129}$

$x \le \log_2 129$

$\log_2 129 > 7 = \log_2 128$

С учетом ОДЗ, имеем

$x \in (-8;-7) \cup (-7;-1) \cup (7;\log_2 129].$

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^x - 129 \le 2^{x+7}, \\ \log_{x+8}\left(\dfrac{7-x}{x+1}\right)^2 \le 1 - \log_{x+8}\dfrac{x+1}{x-7}. \end{cases}$$

3) *(продолжение)*

$$\log_{x+8}\left(\frac{7-x}{x+1}\right)^2 \le 1 - \log_{x+8}\frac{x+1}{x-7}$$

$$(a-b)^2 = (b-a)^2$$

$$\log_{x+8}\left(\frac{x-7}{x+1}\right)^2 + \log_{x+8}\frac{x+1}{x-7} \le \log_{x+8}(x+8)$$

$$\log_{x+8}\left(\left(\frac{x-7}{x+1}\right)^2 \cdot \frac{x+1}{x-7}\right) \le \log_{x+8}(x+8)$$

$$\log_{x+8}\left(\frac{x-7}{x+1}\right) \le \log_{x+8}(x+8)$$

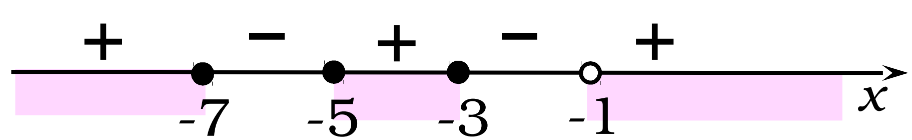
$$(x+8-1)\left(\frac{x-7}{x+1} - (x+8)\right) \le 0$$

$$(x+7)\left(\frac{x-7-x^2-9x-8}{x+1}\right) \le 0$$

$$(x+7)\left(\frac{-x^2-8x-15}{x+1}\right) \le 0$$

$$(x+7)\left(\frac{x^2+8x+15}{x+1}\right) \ge 0$$

$$\frac{(x+7)(x+3)(x+5)}{x+1} \ge 0$$



$$x \in (-\infty; -7] \cup [-5; -3] \cup (-1; +\infty)$$

С учетом ОДЗ, имеем

$$x \in (-8; -7) \cup [-5; -3] \cup (7; +\infty).$$

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^{x} - 129 \le 2^{x+7}, \\ \log_{x+8}\left(\dfrac{7-x}{x+1}\right)^{2} \le 1 - \log_{x+8}\dfrac{x+1}{x-7}. \end{cases}$$

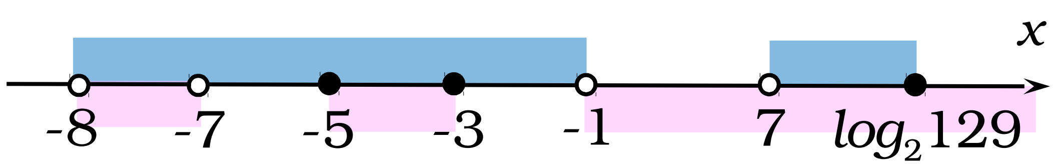
(продолжение)

4) *Общее решение:*

$$x \in (-8; -7) \cup (-7; -1) \cup \left(7; \log_2 129\right]$$

и

$$x \in (-8; -7) \cup [-5; -3] \cup (7; +\infty)$$



$$x \in (-8; -7) \cup [-5; -3] \cup \left(7; \log_2 129\right]$$

$$\textit{Ответ}: (-8; -7) \cup [-5; -3] \cup \left(7; \log_2 129\right].$$

№3 Решите неравенство $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > 1$

Решение.

ОДЗ:

$$\begin{cases} 25-x^2>0, \\ 24+2x-x^2>0, \\ 25-x^2\neq 16; \end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in(-4;-3)\cup(-3;3)\cup(3;5).$$

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > 1$$

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > \log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{25-x^2}{16}$$

$$\left(\frac{25-x^2}{16}-1\right)\left(\frac{24+2x-x^2}{14}-\frac{25-x^2}{16}\right)>0$$

$$\left(9-x^2\right)\left(8\left(24+2x-x^2\right)-7\left(25-x^2\right)\right)>0$$

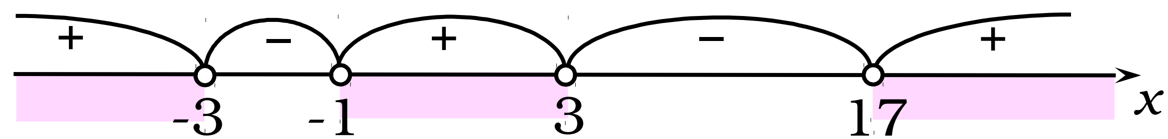
$$\left(9-x^2\right)\left(17+16x-x^2\right)>0$$

Решите неравенство $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \dfrac{24+2x-x^2}{14} > 1$

(продолжение)

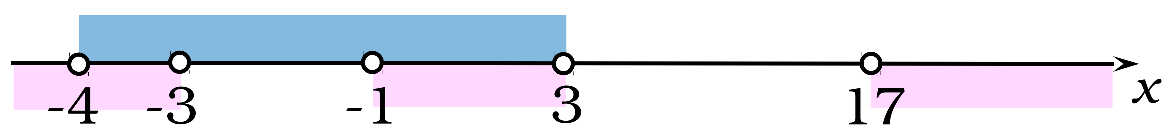
$$\left(x^2-9\right)\left(x^2-16x-17\right)>0$$

$$(x-3)(x+3)(x+1)(x-17)>0$$



$$x \in (-\infty;-3) \cup (-1;3) \cup (17;+\infty).$$

С учетом ОДЗ, имеем



$$x \in (-4;-3) \cup (-1;3).$$

Ответ : $(-4;-3) \cup (-1;3).$

№ 4 Решите неравенство

$$\log^2_{x+2}(x-18)^2+32\le 16\log_{x+2}\left(36+16x-x^2\right).$$

Решение.

ОДЗ:

$$\begin{cases} x+2>0, \\ x+2\ne 1, \\ 36+16x-x^2>0; \end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in(-2;-1)\cup(-1;18).$$

$$\log^2_{x+2}(x-18)^2+32\le 16\log_{x+2}\left(36+16x-x^2\right)$$

$$4\log^2_{x+2}|x-18|+32\le 16\log_{x+2}(x+2)(18-x)$$

С учетом ОДЗ, имеем

$$4\log^2_{x+2}(18-x)+32\le 16\left(\log_{x+2}(x+2)+\log_{x+2}(18-x)\right)$$

$$4\log^2_{x+2}(18-x)-16\log_{x+2}(18-x)+16\le 0$$

$$\log^2_{x+2}(18-x)-4\log_{x+2}(18-x)+4\le 0$$

$$\left(\log_{x+2}(18-x)-2\right)^2\le 0$$

$$\log_{x+2}(18-x)=2$$

Решите неравенство

$$\log^2_{x+2}(x-18)^2+32\le 16\log_{x+2}\left(36+16x-x^2\right).$$

(продолжение)

$$\log_{x+2}(18-x)=\log_{x+2}(x+2)^2$$

$$18-x=(x+2)^2$$

$$x^2+5x-14=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-7, \quad - \textit{ не удовлетворяет ОДЗ} \\ x=2. \end{array}\right.$$

$$\textit{Ответ: } 2.$$

№ 5 Решите неравенство $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0$

<u>*Решение.*</u>

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2-x>0, \\ 2-x\ne 1, \\ x+2>0, \\ x+3>0, \\ x+3\ne 1, \\ 3-x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in(-2;\,1)\cup(1;\,2).$$

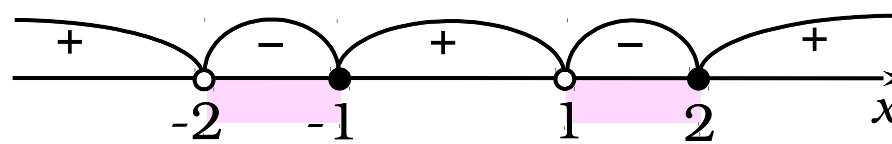
$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0$$

$$\frac{\log_2(x+2)\cdot\log_2(3-x)}{\log_2(2-x)\cdot\log_2(x+3)}\le 0$$

$$\frac{((x+2)-1)\cdot((3-x)-1)}{((2-x)-1)\cdot((x+3)-1)}\le 0$$

$$\frac{(x+1)\cdot(2-x)}{(1-x)\cdot(x+2)}\le 0$$

$$\frac{(x+1)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x+2)}\le 0$$



С учетом ОДЗ, имеем

$$x\in(-2;\,-1]\cup(1;\,2).$$

Ответ: $(-2;\,-1]\cup(1;\,2).$

№6 Решить систему неравенств: $\begin{cases} \sqrt{x+2} + \log_5(x+3) \ge 0, \\ 9^{x+1} - 28 \cdot 3^x + 3 \ge 0. \end{cases}$

Решение: Решение системы начнём со второго неравенства.

Пусть $3^x = t$, тогда получим квадратное неравенство $9t^2 - 28t + 3 \ge 0$, имеющее решение: $t \le \frac{1}{9}$ или $t \ge 3$. Отсюда имеем $3^x \le \frac{1}{9}$ или $3^x \ge 3$ и решение второго неравенства системы: $(-\infty;\ -2] \cup [1; +\infty)$.

Для решения первого неравенства системы рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x+2} + \log_5(x+3)$, которая является возрастающей на промежутке $[-2; +\infty)$, как сумма двух возрастающих функций.

Так как $f(-2)=0$, то $f(x) \ge 0$ для всех значений $x \in [-2; +\infty)$.

Следовательно, решением первого неравенства системы является промежуток $[-2; +\infty)$.

Общим решением двух неравенств системы является множество:

- $\begin{cases} [-2;+\infty), \\ (-\infty;-2] \cup [1;+\infty); \end{cases} \leftrightarrow \{-2\} \cup [1;+\infty).$

Ответ:

Ответ: $\{-2\} \cup [1;+\infty).$