

***Всероссийская олимпиада школьников
по математике
7класс***

Сургут 2015

**Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап)
2012-2013 учебный год**

7 класс

Задача 1(7 баллов)

Разрежьте квадрат 3×3 на две части и квадрат 4×4 на две части так, чтобы из получившихся четырех кусков можно было сложить квадрат.

Задача 2(7 баллов)

Поставьте вместо звездочек в выражение $* + ** + *** + **** = 3330$ десять различных цифр так, чтобы получилось верное равенство.

Задача 3(7 баллов)

В магазине картофель расфасовали в 24 пакета по 3 кг и 5 кг. Масса всех 5-килограммовых пакетов равна общей массе 3-килограммовых. Сколько было 3- и 5-килограммовых пакетов?

Задача 4(7 баллов)

Человек шел со скоростью 3 км/ч вдоль трамвайной линии и считал трамваи. И те, которые двигались ему навстречу, и те, которые обгоняли его. Человек насчитал 40 трамваев, обогнавших его, и 60 встречных. Предположим, что трамваи движутся равномерно, с одинаковыми промежутками между собой (в задаче это вполне возможно). Какова средняя скорость движения трамваев?

Задача 5(7 баллов)

Каждый из трех приятелей Антон, Боря и Вася либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Всем троим задали вопрос: «Есть ли среди двух остальных хоть один правдивый?». На это Антон ответил: «Да». Боря ответил: «Нет». Что сказал Вася? (Слово приятеля в данном случае означает, что каждый из троих знает об остальных, кто прав, а кто лжец).

**Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап)
2012-2013 учебный год**

Решение олимпиадных задач за 7 класс.

1. Ответ. Два из возможных примеров разрезания приведены на рисунках 1 и 2.

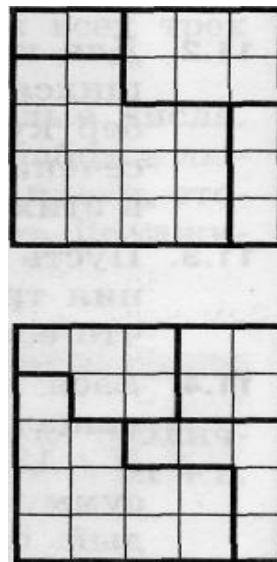
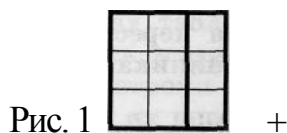
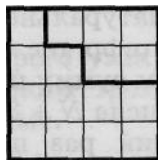
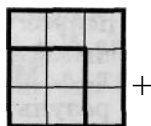


Рис. 2



2. Например, $5 + 40 + 367 + 2918 = 3330$.

3. Так как масса 5-килограммовых пакетов равна массе 3-килограммовых пакетов, то наименьшее количество 5-килограммовых пакетов 3, а 3-кг пакетов – 5, т.е. $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$, но тогда всего пакетов $3 + 5 = 8$, в три раза меньше чем у нас есть, значит, пакетов по 5 кг не 3, а **9**, а по 3 кг – не 5, а **15**.

Ответ: было 15 пакетов по 3 кг и 9 пакетов по 5 кг.

4. 15 км/ч. Относительные скорости трамваев, идущих вдогонку и навстречу человеку, пропорциональны числу трамваев, поравнявшихся с ним. Следовательно, можно составить уравнение: $(x-3):(x+3)=40:60$; $60(x-3)=40(x+3)$. Решая уравнение получаем $x=15$.

5. Вася ответил «Да». Если Антон солгал, то из его ответа следует, что остальные двое тоже солгали. Но тогда Боря сказал правду, что для лжеца невозможно. Поэтому Антон правдивый, и хотя бы один из остальных тоже правдивый. Но Боря в этой ситуации солгал, поэтому правдивым оказывается Вася. Так как Антон сказал «Да», то Вася ответил «Да».

Всероссийская олимпиада школьников по математике. Школьный этап.
2013-2014 учебный год
7 класс

Задача 1(7 баллов)

Семь девяток выписали подряд: 9 9 9 9 9 9 9. Поставьте между некоторыми из них знаки "+" или "-", чтобы получившееся выражение равнялось 1989.

Задача 2(7 баллов)

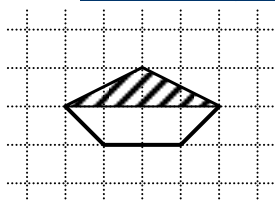


Рис.

На клетчатой бумаге изображена чашка с крышкой (см. рис.). На покраску крышки израсходовали 30 г. краски. Сколько ещё нужно грамм краски для покраски чашки? Ответ обосновать.

Задача 3(7 баллов)

В ящиках лежат орехи. В первом ящике на 6 кг орехов меньше, чем в двух других вместе. А во втором на 10 кг меньше, чем в двух других вместе. Сколько орехов в третьем ящике?

Задача 4(7 баллов)

На доске были написаны 10 последовательных натуральных чисел. Когда стёрли одно из них, то сумма девяти оставшихся оказалась равна 2002. Какие числа остались на доске?

Задача 5(7 баллов)

Три друга Пётр, Роман и Сергей учатся на математическом, физическом и химическом факультетах. Если Пётр математик, то Сергей не физик. Если Роман не физик, то Пётр математик. Если Сергей не математик, то Роман – химик. Смогут ли вы определить специальности каждого?

*Всероссийская олимпиада школьников по математике. Школьный этап.
2013-2014 учебный год*

7 класс

Ответы и решения задач

1.Условие: Семь девяток выписали подряд: 9 9 9 9 9 9 9. Поставьте между некоторыми из них знаки "+" или "-", чтобы получившееся выражение равнялось 1989.

Ответ: $999+999-9=1989$.

2.Условие: На клетчатой бумаге изображена чашка с крышкой (см. рис.). На покраску крышки израсходовали 30 г. краски. Сколько ещё нужно грамм краски для покраски чашки? Ответ обосновать.

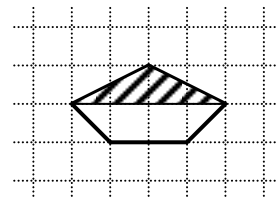


Рис.

Решение: Площадь закрашенной части составляет ровно 2 клеточки. Тогда на покраску 1 клетки расходуется 15 г краски. Площадь «чашки» составляет 3 клеточки. Тогда на ее покраску потребуется еще 45 г краски.

Ответ: 45 г

3.Условие: В ящиках лежат орехи. В первом ящике на 6 кг орехов меньше, чем в двух других вместе. А во втором на 10 кг меньше, чем в двух других вместе. Сколько орехов в третьем ящике?

Решение: Соединим оба заданных условия и получим следующее утверждение: «В первом и втором ящиках орехов на 6 кг+10 кг меньше, чем в первом, втором и двух третьих». Отсюда следует, что в двух третьих ящиках 16 кг орехов, т. е. в третьем ящике 8 кг орехов.

Ответ: 8 кг орехов

4.Условие: На доске были написаны 10 последовательных натуральных чисел. Когда стёрли одно из них, то сумма девяти оставшихся оказалась равна 2002. Какие числа остались на доске?

Решение: Пусть x — наименьшее из написанных чисел. Обозначим через $(x + y)$ вычеркнутое число ($0 < y < 9$). Тогда $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) + (x + 5) + (x + 6) + (x + 7) + (x + 8) + (x + 9) - (x + y) = 2002$. Приведём подобные слагаемые: $10x + 45 - x - y = 2002$, то есть $9x = 1957 + y$. Отсюда $1957 + y$ делится на 9. Учитывая условие $0 < y < 9$, получаем, что $y = 5$. Значит, $x = 1962 : 9 = 218$.

Ответ: 218, 219, 220, 221, 222, 224, 225, 226 и 227.

5.Условие: Три друга — Пётр, Роман и Сергей — учатся на математическом, физическом и химическом факультетах. Если Пётр математик, то Сергей не физик. Если Роман не физик, то Пётр математик. Если Сергей не математик, то Роман — химик. Сможете ли вы определить их специальности?

*Всероссийская олимпиада школьников по математике. Школьный этап.
2013-2014 учебный год*

Решение: Предположим, что Роман не физик, тогда (по условию 2) Пётр математик, но если Пётр математик, то Сергей (по условию 1) не физик — получилось явное противоречие. Значит, Роман — физик. Тогда Сергей математик — иначе (по условию 3) Роман был бы химиком. Значит, Пётр — химик. Итак: Пётр — химик, Роман — физик, Сергей — математик.

Ответ: Пётр — химик, Роман — физик, Сергей — математик.

**Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап)
2014-2015 учебный год**

7 класс

Задача 1(7 баллов)

Саша может получить число 100, используя десять семерок, скобки и знаки арифметических действий:

$$100 = (77 : 7 - 7 : 7) \cdot (77 : 7 - 7 : 7)$$

Улучшите его результат: используйте меньшее число семерок и получите число 100. *(Достаточно привести один пример).*

Задача 2(7 баллов)

Электронные часы показывают часы и минуты: от 00.00 до 23.59. Сколько времени в течение суток на табло присутствует хотя бы одна цифра 2?

Задача 3(7 баллов)

Саша, Лёша и Коля одновременно стартовали в забеге на 100 м. Когда Саша финишировал, Лёша находился в десяти метрах позади него, а когда финишировал Лёша — Коля находился позади него в десяти метрах. На каком расстоянии друг от друга находились Саша и Коля, когда Саша финишировал? *(Предполагается, что все мальчики бегут с постоянными, но не равными скоростями.)*

Задача 4(7 баллов)

В одной сказке хозяин, нанимая работника, предложил ему испытание: «Вот тебе бочка, наполни ее водой ровно наполовину, не используя никаких измерительных приборов». Работник исполнил задание. Как он это сделал?

Задача 5(7 баллов)

Попрыгунья Стрекоза половину времени каждых суток красного лета спала, третью часть времени каждых суток танцевала, шестую часть — пела. Остальное время она решила посвятить подготовке к зиме. Сколько часов в сутки Стрекоза готовилась к зиме?

**Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап)
2014-2015 учебный год**




Решение олимпиадных задач за 7 класс.

1. $(777 - 77) : 7 = 100$ или $(77 - 7) : 7 \cdot (77 - 7) : 7 = 100$.
2. Запись часа где цифра 2 на первом месте 20, 21, 22, 23 – всего 4 варианта, где цифра 2 на втором месте 02, 12, 22 – 3 варианта. При этом число 22 есть в обоих списках, считать его нужно только один раз. Таким образом, мы нашли 6 полных часов.

Рассмотрим оставшиеся 18 часов. С цифрой 2 в каждом таком часе это минуты от 20 до 29 (10 минут) и по одной минуте в каждом из оставшихся пяти десятков минут. Итак в каждом часе мы нашли $10 + 5 = 15$ минут. Всего получится $15 \cdot 18 = 270$ минут, т.е. 4,5 часа. Всего получается 10 часов 10 часов 30 минут.



3. Рассуждения (почти без формул).

Рассмотрим момент финиша Саши.

Коля	Леша	Саша
		
???	90 м	100 м

К этому моменту Саша пробежал 100 м, а Леша за то же время – всего 90 м. Значит, скорость Леша составляет $90/100 = 0,9$ от скорости Саши.

Теперь рассмотрим момент финиша Леша.

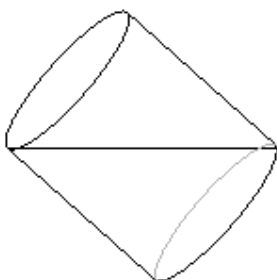
	Коля	Леша
		
	90 м	100
		101

***Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап)
2014-2015 учебный год***

К этому моменту Леша наконец-то пробежал 100 м, а Коля – всего 90 м. Значит, скорость Коли составляет $90/100 = 0,9$ от скорости Леша.

Тогда получается, что скорость Коли составляет $0,9 \cdot 0,9 = 0,81$ от скорости Саши. И когда Саша завершил свои 100 м, Коля сумел пробежать всего 81 м. Т.е. Коля будет отставать на 19 м. в момент финиша Саши.

4. Нужно наклонить бочку, как показано на рисунке. Объем воды под горизонтальной чертой равен половине объема бочки.



5. В сутках 24 ч, из них Стрекоза спала $24 : 2 = 12$ (ч), танцевала $24 : 3 = 8$ (ч), пела $24 : 6 = 4$ (ч). Всего на эти дела она потратила $12 + 8 + 4 = 24$ (ч), поэтому на подготовку к зиме времени у нее не осталось.

Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап)
2015-2016 учебный год

Математика 7 класс

Задача 1(7 баллов)

Лифт едет с 1-го на 6-й этаж 15 секунд. За сколько секунд он проедет со 2-го по 10-й этаж?

Задача 2(7 баллов)

Расшифруйте пример на сложение, где одинаковые буквы означают одинаковые цифры, а разные буквы – разные цифры. Объясните. Как вы рассуждали.

$$\begin{array}{r} \text{ААБ} \\ \text{АБА} \\ \text{БАА} \\ \hline \text{БВВБ} \end{array}$$

Задача 3(7 баллов)

Прямоугольник разделён двумя отрезками на четыре прямоугольника, площади трёх из них, площади трёх из которых 2 см^2 , 4 см^2 , 6 см^2 . Найдите площадь прямоугольника.

2	4
6	

Задача 4(7 баллов)

Произведение двух натуральных чисел равно 1000. Найдите сумму данных чисел, если известно, что каждое из них не делится нацело на 10.

Задача 5(7 баллов)

Учитель математики, проверив контрольные работы у трёх друзей: Алексея, Бориса и Василия, сказал им: «Все вы написали работу, причём получили разные отметки («3», «4», «5»). У Василия – не «5», у Бориса – не «4», а у Алексея, по-моему, «4». Впоследствии оказалось, что учитель ошибся: одному ученику сказал отметку верно, а другим двум – неверно. Какие отметки получил каждый из учеников?

**Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап)
2015-2016 учебный**

Решение олимпиадных задач за 7 класс.

Задача 1(7 баллов)

Лифт едет с 1-го на 6-й этаж 15 секунд. За сколько секунд он проедет со 2-го по 10-й этаж?

Решение. С 1-го по 6-й этаж – 5 этажей, $15:5=3(с)$ – лифт проезжает 1 этаж за 3 секунды. Со 2-го по 10-й будет 8 этажей, поэтому нужно затратить времени $3с \cdot 8 = 24 с$.

Ответ: 24 секунды.

Задача 2(7 баллов)

Расшифруйте пример на сложение, где одинаковые буквы означают одинаковые цифры, а разные буквы – разные цифры. Объясните. Как вы рассуждали.

$$\begin{array}{r} ААБ \\ АБА \\ \hline БАА \\ БВВБ \end{array}$$

Решение. Так как сумма $Б+А+А$ оканчивается цифрой Б, то $А+А$ оканчивается цифрой 0. Поэтому $А=5$ (Цифра А не может быть равна 0, потому что с неё начинаются первые два слагаемых.) Тогда сумма $55Б + 5Б5 + Б55$ не больше чем $559 + 595 + 955 = 2109$. Поэтому $Б = 1$ или $Б = 2$. Но $552 + 525 + 255 = 1312$ – не подходит. Значит, $Б = 1$.

Ответ: $551 + 515 + 155 = 1221$.

Задача 3(7 баллов)

Прямоугольник разделён двумя отрезками на четыре прямоугольника, площади трёх из них, площади трёх из которых 2 см^2 , 4 см^2 , 6 см^2 . Найдите площадь прямоугольника.

2	4
6	

Решение. Так как верхние прямоугольники имеют общую сторону и площадь правого в 2 раза больше, то и его вторая сторона будет в 2 раза больше. Аналогично и вторая сторона правого нижнего прямоугольника больше стороны верхнего левого прямоугольника в 3 раза, а это означает, что площадь нижнего правого прямоугольника будет в 6 раз больше площади левого верхнего прямоугольника, то есть будет равна 12 см^2 . Поэтому площадь всего прямоугольника будет равна $2 + 4 + 6 + 12 = 24\text{ см}^2$.

Ответ : 24

**Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап)
2015-2016 учебный**

Задача 4(7 баллов)

Произведение двух натуральных чисел равно 1000. Найдите сумму данных чисел, если известно, что каждое из них не делится нацело на 10.

Решение. Так как $1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, то каждое из чисел в своём разложении на простые множители может содержать только двойки и пятёрки. Так как оба числа на 10 не делятся, то множители 2 и 5 не могут присутствовать в разложении каждого из чисел на простые множители. Тогда первое число будет $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$, а второе - $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. И сумма их будет равна 133.

Ответ: 133.

Задача 5(7 баллов)

Учитель математики, проверив контрольные работы у трёх друзей: Алексея, Бориса и Василия, сказал им: «Все вы написали работу, причём получили разные отметки («3», «4», «5»). У Василия – не «5», у Бориса – не «4», а у Алексея, по-моему, «4». Впоследствии оказалось, что учитель ошибся: одному ученику сказал отметку верно, а другим двум – неверно. Какие отметки получил каждый из учеников?

Решение. *1-й случай.* Пусть учитель сказал верно Алексею. Значит, у Алексея «4». Так как Борису и Василию учитель назвал неверные отметки, то у Бориса «4», а у Василия «5». Получилось, что у двух учеников оказались одинаковые отметки, что противоречит условию задачи. Данный случай невозможен.

2-й случай. Пусть учитель сказал верно Василию. Тогда у Василия отметка не «5». Так как учитель сказал неверно об отметках Алексея и Бориса, то у Алексея отметка не «4», а у Бориса «4». Тогда у Алексея будет отметка «5», а у Василия «3.»

3-й случай. Предположим, что учитель сказал верно про отметку Борису. Тогда Борис получил не «4». Так как утверждения про отметки Алексея и Василия ложные, то Алексей получил отметку не «4», а Василий - «5». Получается, что отметку «4» не получил ни один из учеников. Этот случай также противоречит условию задачи.

Ответ: У Алексея отметка «5», у Бориса – «4», у Василия – «3».

**Примерные критерии
оценивания заданий по математике в 7 классе**

В соответствии с регламентом проведения математических олимпиад школьников каждая задача оценивается из 7 баллов.

Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице:

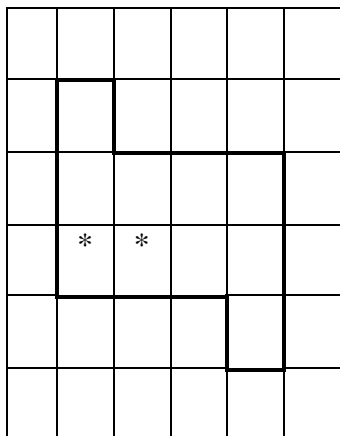
Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6 - 7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5 - 6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2 - 3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют. Решение отсутствует.

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

**Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2012-2013 учебный год**

7 класс

1. К некоторому трехзначному числу приписали цифру 7 сначала справа, а потом слева – получили два четырехзначных числа, разность которых (из большего вычитается меньшее) равна 1809. Найдите все такие трехзначные числа.
2. Внутри отрезка AB взяли произвольную точку M . Точка C – середина отрезка AM , а точка D – середина отрезка MB . Наконец, точка P – середина отрезка CM , а точка Q – середина отрезка MD . Найдите длину отрезка PQ , если длина отрезка AB равна 40 сантиметрам.
3. Известно, что с полным баком топлива моторная лодка проплывет 60 км по течению реки или 40 км против течения реки. На какое наибольшее расстояние можно отплыть по реке на этой лодке, чтобы топлива хватило и на обратный путь.
4. Фигуру, изображенную на рисунке, разрежьте на две равные части так, чтобы в каждой части было по одной звездочке. Разрезать можно только по линиям сетки.



5. В куче 2012 камешков. Двое по очереди забирают их из кучи. За один ход можно взять от одного до десяти камешков. Выигрывает тот, кто заберет последние камешки. У кого из игроков – у начинающего или у его партнера – имеется выигрышная стратегия?

Ответы и решения.

7 класс

1. К некоторому трехзначному числу приписали цифру 7 сначала справа, а потом слева – получили два четырехзначных числа, разность которых (из большего вычитается меньшее) равна 1809. Найдите все такие трехзначные числа.

Ответ: 978; 576.

Решение. Пусть искомое трехзначное число имеет вид \overline{abc} . После приписывания к нему слева и справа цифры 7 получим четырехзначные числа. Если первое число

$$\overline{7abc} - \overline{abc7} = 1809$$

больше, то имеем $\overline{7abc} - \overline{abc7} = 1809$. Откуда, $c = 9 + 7 - 10 = 6$, $b = 0 + 6 + 1 = 7$, $a = 8 + 7 - 10 = 5$ и $1 + 5 + 1 = 7$. Если же второе число больше, то $\overline{abc7} - \overline{7abc} = 1809$. Аналогично находим, $c = 7 + 10 - 9 = 8$, $b = 8 - 1 = 7$, $a = 7 + 10 - 8 = 9$, и $9 - 1 - 7 = 1$.

Примечание. Если найдено одно число – 5 баллов.

2. Внутри отрезка AB взяли произвольную точку M . Точка C – середина отрезка AM , а точка D – середина отрезка MB . Наконец, точка P – середина отрезка CM , а точка Q – середина отрезка MD . Найдите длину отрезка PQ , если длина отрезка AB равна 40 сантиметрам.

Ответ: 10 см.

Решение. Вначале найдем длину отрезка CD . По условию, длина отрезка CM равна половине длины отрезка AM , а длина отрезка MD – половине отрезка MB . Следовательно, $CD = CM + MD = \frac{1}{2}AM + \frac{1}{2}MB = \frac{1}{2}AB$. Аналогично показывается, что длина отрезка PQ равна половине отрезка CD .

Примечание. Найден правильный ответ без обоснования – 6 баллов. Если ответ не получен или получен не верный, но показано, что длина отрезка CD равна половине длины отрезка AB – 3 балла.

3. Известно, что с полным баком топлива моторная лодка проплывет 60 км по течению реки или 40 км против течения реки. На какое наибольшее расстояние можно отплыть по реке на этой лодке, чтобы топлива хватило и на обратный путь.

Ответ: 24 км.

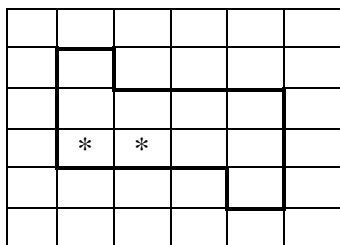
Первое решение. На 1 км по течению реки моторная лодка расходует $\frac{1}{60}$ бака топлива, а на 1 км против течения реки – $\frac{1}{40}$ бака топлива. Таким образом, если лодка

проплывет 1 км по течению и обратно (все равно в какой последовательности), то она затратит бака топлива. Следовательно, полного бака топлива лодке хватит, чтобы отплыть и вернуться назад не более чем на 24 км.

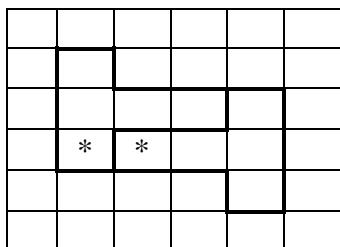
Второе решение. Предположим, что лодка проплыла 120 км по реке туда и обратно. Тогда на весь путь она затратит ровно 5 баков топлива: 2 бака при движении по течению и 3 бака при движении против течения. Следовательно, с одним баком топлива лодка может проплыть туда и обратно расстояние в 5 раз меньшее, то есть 24 км. То, что это расстояние наибольшее, следует из обратных рассуждений. Если бы лодка с одним баком топлива могла бы отплыть более чем на 24 км, то с пятью баками топлива она могла бы проплыть туда и обратно более 120 км, что не возможно.

Примечание. Арифметическая ошибка при верных рассуждениях – минус 1-2 балла.

4. Фигуру, изображенную на рисунке, разрежьте на две равные части так, чтобы в каждой части было по одной звездочке. Разрезать можно только по линиям сетки.



Решение.



Примечание. При условиях задачи, решение единственное – 0 или 7 баллов.

5. В куче 2012 камешков. Двое по очереди забирают их из кучи. За один ход можно взять от одного до десяти камешков. Выигрывает тот, кто заберет последние камешки. У кого из игроков – у начинающего или у его партнера – имеется выигрышная стратегия?

Ответ: у начинающего. **Решение.** Поскольку за один ход берется от одного до десяти камешков, то любой предыдущий ход всегда можно дополнить до 11 камней, причем это число единственное. И, так как $2012 = 11 \cdot 182 + 10$, то начинающий игрок первым ходом берет 10 камешков, а каждым следующим своим ходом дополняет ход партнера до 11.

Примечание. Верный ответ при неверном обосновании – 1 балл.

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

***Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2013-2014 учебный год***

7 класс

1. Решите задачу (7 баллов)

На доске написано $4\ 9\ 2\ 5\ 2\ 1=100$. Поставьте между некоторыми цифрами знаки сложения и вычитания, чтобы получилось верное равенство.

2. Решите задачу (7 баллов)

Сколько раз в сутки часовая и минутная стрелки образуют прямой угол?

3. Решите задачу (7 баллов)

Даны три натуральных числа. Для каждой двух из них вычислили наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Полученные шесть чисел сложили. Могло ли получиться число 12345?

4. Решите задачу (7 баллов)

Остатки от деления натурального числа n на 10, 11, 12, ..., 20 выписали в строчку. Оказалось, что каждое число, начиная со второго, больше предыдущего. Докажите, что в строчке записано 11 последовательных целых чисел.

5. Решите задачу (7 баллов)

В новой социальной сети зарегистрировалось 2000 человек. Каждый из них пригласил к себе в друзья по 1000 человек. Два человека объявляются друзьями, только если каждый из них пригласил другого в друзья. Какое наименьшее количество пар друзей могло образоваться?

Ответы к заданиям

1. Решите задачу (7 баллов)

На доске написано $4\ 9\ 2\ 5\ 2\ 1=100$. Поставьте между некоторыми цифрами знаки сложения и вычитания, чтобы получилось верное равенство.

Решение. $4+92+5-2+1=100$, $49-2+52+1=100$.

Оценивание. За любой верный пример – 7 баллов.

2. Решите задачу (7 баллов)

Сколько раз в сутки часовая и минутная стрелки образуют прямой угол?

Решение. В сутки часовая стрелка делает два оборота, а минутная – 24 (на 22 оборота больше). В течение каждого такого оборота есть два момента времени, когда стрелки образуют прямой угол.

Ответ: 44

Оценивание. За верное решение 7 баллов

3. Решите задачу (7 баллов)

Даны три натуральных числа. Для каждой двух из них вычислили наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Полученные шесть чисел сложили. Могло ли получиться число 12345?

Решение. Заметим, что НОД и НОК четных чисел число чётное, а нечётных – нечётное. НОД четного и нечётного чисел – нечётное число, и их НОК – чётное число. Перебирая все случаи (три чётных числа; два чётных, одно нечётное; одно чётное, два нечётных; три нечётных), приходим к выводу, что сумма чисел, о которых говорится в условии задачи, чётна.

Ответ: нет

Оценивание. За верное решение – 7 баллов.

4. Решите задачу (7 баллов)

Остатки от деления натурального числа n на 10, 11, 12, ..., 20 выписали в строчку. Оказалось, что каждое число, начиная со второго, больше предыдущего. Докажите, что в строчке записано 11 последовательных целых чисел.

Решение. Пусть остаток от деления числа n на 20 равен r . Это означает, что для некоторого целого числа q выполнено равенство $n=20q+r$, где $0\leq r<20$. Если $r<10$, остаток от деления n на 10 будет равен также r , что противоречит условию задачи. Значит, $r\geq 10$ и $n=10\cdot(2q+1)+(r-10)$. Поскольку $0\leq r-10<10$, число $(r-10)$ является остатком от деления n на 10. В возрастающей последовательности 11 целых чисел, последнее число на 10 больше первого – это говорит о том, что числа идут подряд (иначе разность последнего и первого числа была бы больше 10).

Оценивание. За верное решение – 7 баллов.

5. Решите задачу (7 баллов)

В новой социальной сети зарегистрировалось 2000 человек. Каждый из них пригласил к себе в друзья по 1000 человек. Два человека объявляются друзьями, только если каждый из них пригласил другого в друзья. Какое наименьшее количество пар друзей могло образоваться?

Решение. Положим $n=1000$. Всего возможных пар друзей $m = \frac{2n(2n-1)}{2} = 2n^2 - n$.

Представим себе, что для каждой из m возможных пар имеется свой ящик и что участник сети, делая приглашение дружить, кладёт в этот ящик шарик. Всего в ящики будет положено $2n^2$ шариков (потому что у каждого из $2n$ участников по n шариков). Поскольку, шариков на n больше, чем ящиков, хотя бы в n ящиков попадёт по два шарика – значит, образуется не менее n пар друзей.

Покажем, что ровно n пар может образоваться. Представим, что $2n$ человек стоят по кругу (равномерно), и каждый приглашает в друзья n человек, следующих за ним по часовой стрелке. Тогда друзьями окажутся только те, кто стоит строго напротив друг друга.

Ответ: 1000

Оценивание. За верное решение – 7 баллов;

за доказательство того, что пар друзей 1000 – 4 балла;

за приведенный пример – 3 балла.

**Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по
математике**

Ханты-Мансийский автономный округ - Югра

2014-2015 учебный год

7- классы

1. Имеется правильная дробь. Ее перевернули и снова получили дробь. Какая из двух дробей ближе к единице: исходная или перевернутая?

2. Можно ли напрямую отметить точки A, B, C, D, E так, чтобы расстояния между ними в сантиметрах оказались равными: $AB = 6, BC = 7, CD = 10, DE = 9, AE = 12$? Если да – приведите пример, если нет – объясните, почему нельзя.

3. Есть три двузначных числа. Если сложить те из них, в записи которых есть цифра 3, получится 80, а если сложить те, в записи которых есть цифра 4, получится 90. Определите, а сколько получится, если сложить все три числа. Приведите все возможные варианты ответов.

4. В ящике лежат 2014 одинаковых шариков четырех различных цветов. Если наугад вытащить 1900 шариков, то среди них обязательно найдутся 4 шарика различных цветов. Какое наименьшее число шариков нужно вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них наверняка нашлись 3 шарика различных цветов?

5. В некоторые клетки шахматной доски 8×8 поместили 33 жука. Изначально в каждой клетке находится не более одного жука. Каждую секунду жуки переползают в одну из соседних по стороне клетку. Может ли так оказаться, что в какой-то момент времени они все соберутся в одной клетке?

Ответы и решения

1. Ответ: ближе к единице исходная дробь.

Решение. Пусть $\frac{a}{b}$ исходная дробь. Так как она правильная, то $a < b$ и $\frac{a}{b} < 1$, а $\frac{b}{a} > 1$. Тогда расстояние от исходной дроби до единицы равно $1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$, а от перевернутой дроби до единицы равно $\frac{b}{a} - 1 = \frac{b-a}{a}$. Так как $a < b$, то первое расстояние меньше.

Критерии. Рассмотрение конкретных примеров – 0 баллов.

2. Ответ: да, можно.

Пример расположения точек на прямой с указанными расстояниями: слева на право A, D, B, E, C , где $AD = 3$, $DB = 3$, $BE = 6$, $EC = 1$.

Критерии. Любой правильный пример – 7 баллов.

3. Ответ: 127.

Решение. Пусть \overline{ab} , \overline{cd} , \overline{ef} – двузначные числа и $\overline{ab} + \overline{cd} = 80$. Сумма 80 не может состоять из одного числа – в нем нет цифры 3, и не может быть суммой трех чисел, так как она наименьшая из данных сумм. Следовательно, в записи чисел \overline{ab} и \overline{cd} имеется цифра 3. Цифры b и d не могут одновременно равняться 3, так как их сумма не будет оканчиваться 0. Цифры a и c тоже не могут быть одновременно тройками, так как в этом случае сумма чисел не превосходит $39 + 39 = 78 < 80$. Следовательно, в этих числах одна из цифр десятков и одна из цифр единиц – тройки. Пусть $a = d = 3$. Тогда $b = 7$, а $c = 4$. Число $\overline{cd} = 43$ содержит в своей записи цифру 4, $\overline{ab} = 37$ – нет. Следовательно, $43 + \overline{ef} = 90$. Отсюда $\overline{ef} = 47$, и полученное число имеет цифру 4. Таким образом, $37 + 43 + 47 = 127$. Решение единственное.

Критерии. Верный ответ без обоснования единственности – 4 - 5 баллов.

4. Ответ: 1785 шариков.

Решение. Из условия следует, что шариков любого цвета в ящике не менее 115. В противном случае можно вытащить 1900 шариков – всех, кроме тех, которых меньше 115, среди которых не все цвета будут представлены. Следовательно, среди любых $1785 = 2014 - 115 - 115 + 1$ шариков, вытащенных из ящика, всегда найдутся три разного цвета. Если, например, в ящике шариков трех цветов будет по 115, а остальные – четвертого цвета, то меньшим числом обойтись нельзя.

Критерии. Обосновано, что шариков любого цвета в ящике не менее 115 – 4 балла, неверный ответ из-за арифметической ошибки в подсчете – минус 1 балл.

5. Ответ: нет, не может.

На шахматной доске имеется 32 белые и 32 черные клетки, причем каждая клетка граничит только с клетками другого цвета. Следовательно, переползая в соседнюю клетку, жук меняет цвет клетки. Вначале все жуки располагаются в разных клетках. Так как их 33, то найдутся два жука, которые сидят в клетках разного цвета. Поскольку они одновременно переползают в соседние клетки, то в любой момент времени они будут находиться в клетках разного цвета, а следовательно, не смогут оказаться в одной клетке.

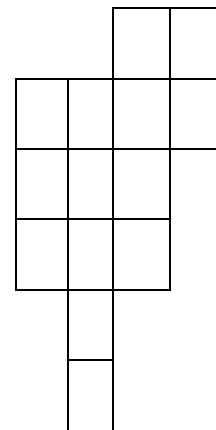
Критерии. Отмечено, что среди клеток, на которых находятся жуки в начальный момент, имеются клетки разного цвета – 4 балла.

**Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по
математике**

**Ханты-Мансийский автономный округ - Югра
2015-2016 учебный год**

7 класс

1. Будильник спешит на 9 минут в сутки. Ложась спать, в 22.00 на нем установили точное время. На какое время надо завести звонок, чтобы будильник прозвенел ровно в 6 часов утра?
2. Какие 500 идущих подряд натуральных чисел надо выписать, чтобы всего было выписано 2015 цифр?
3. Чтобы от театра доехать до цирка, можно сесть на остановке на автобус №1 или на автобус №2. Они ходят с постоянными интервалами, причем автобус №1 в 2 раза реже, чем №2. За последние 20 минут автобус прошел 16 минут назад, 10 минут назад и 2 минуты назад. Когда будет следующий автобус?
4. В классе 25 учеников. Известно, что у любых двух девочек класса количество друзей – мальчиков из этого класса не совпадает. Какое наибольшее количество девочек может быть в этом классе?
5. Разрежьте фигуру на рисунке на две равные части.



Ответы и решения.

7 класс.

1. **Ответ:** на 6 часов 3 минуты.

Решение. За сутки (24 часа) будильник уходит на 9 минут вперед. Следовательно, за 8 часов – с 22.00 вечера до 6.00 утра – будильник уйдет вперед на три минуты, и в 6 утра будет показывать 6 часов 3 минуты. На это время и надо ставить звонок.

Критерии. Верный и обоснованный ответ – 7 баллов; верный ответ без обоснования – 3 балла.

2. **Ответ:** 9515, 9516, . . . , 10014.

Решение. Так как 500 четырехзначных чисел содержат 2000 цифр, а 500 пятизначных – 2500, то в нужном наборе должны быть четырехзначные и пятизначные числа. Замена четырехзначного числа на пятизначное увеличивает число цифр на 1. Поэтому в требуемом наборе будет 485 четырехзначных чисел и 15 пятизначных. Алгебраическое решение. Пусть в нужном наборе n четырехзначных чисел и $500 - n$ пятизначных

Тогда . Откуда $n = 485$. Учитывая, что числа должны идти подряд, получаем набор от 9515 до 1014.

Критерии. Правильный ответ с пояснениями – 7 баллов; ошибка в крайних числах на единицу – минус 2 балла; отмечено, что в нужном наборе чисел присутствуют только четырехзначные и пятизначные числа – 2 балла; правильный ответ без пояснений – 6 баллов.

3. **Ответ:** через 12 минут.

Решение. Обозначим через A , B и B автобусы, пройденные, соответственно, 16 минут назад, 10 минут и 2 минуты назад. Временные интервалы движения между ними равны 6 минут, 8 минут и 14 минут. Так как номеров маршрутов всего два, то из трех пройденных автобусов два имеют один номер (очевидно, что все три автобуса не могут иметь один и тот же номер). Автобусы A и B не могут быть с одним номером, так как следующий автобус с этим номером должен был пройти 4 минуты назад. Точно так же, автобусы B и B не с одним номером: предыдущий автобус с этим номером должен был пройти 18 минут назад. Значит один и тот же номер имеют автобусы A и B . Они не могут иметь № 1, так как, согласно условию задачи, автобусы маршрута № 2, которым принадлежит и B , должны ходить с интервалом в 7 минут, и за последние 20 минут должны были пройти три автобуса: 17 минут назад, 10 минут и 3 минуты назад, чего не было. Следовательно, автобусы A и B имеют № 2 и двигаются с интервалом в 14 минут, а автобусы № 1 – с интервалом в 28 минут. Поэтому следующий автобус с № 2 пройдет через 12 минут, а автобус с № 1 – через 18 минут.

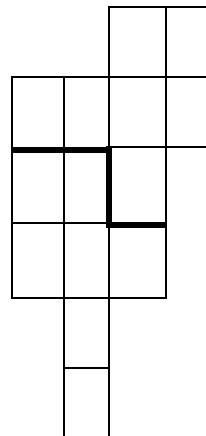
Критерии. Получен правильный обоснованный ответ – 7 баллов; верно определены автобусы, имеющие одинаковый номер, но неверно определен их номер – 3 балла; правильный ответ без пояснений – 1 балл.

4. **Ответ:** 13 девочек.

Решение. Покажем, что больше 13 девочек в классе не может быть. Действительно, если девочек не менее 14, то мальчиков в классе не более 11, а значит, наибольшее число друзей – мальчиков может быть не более 11. Тогда число различных вариантов количества друзей будет не более 12: от 0 до 11. Так как девочек не менее 14, то найдутся две девочки с равным числом друзей, что противоречит условию задачи. В классе с 13 девочками и 12 мальчиками выполнение условий задачи возможно: одна девочка не дружит ни с одним мальчиком, одна – дружит ровно с одним мальчиком, одна – ровно с двумя, и т. д., одна со всеми 12 мальчиками.

Критерии: верный, обоснованный ответ – 7 баллов; Показано, что 13 девочек может быть в классе, но нет обоснования, что больше не возможно – 4 балла; верный, обоснованный ответ в предположении, что каждая девочка дружит хотя бы с одним мальчиком (ответ 12 девочек) – 3 балла; ответ без обоснования – 1 балл.

5. Пример правильного разбиения:



Критерии: любое верное разбиение – 7 баллов, разбиений, среди которых есть верное – не

приведено несколько больше 5 баллов.