Решение геометрических задач ОГЭ (на примере задания № 23)

УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ МБОУ СОШ № 1
БОГАТЕНКОВА А.А

Геометрия –это раздел математики, изучающий пространственные отношения и формы, а также другие отношений и формы, сходные с пространственными по своей структуре.

Геометрия – это феномен общечеловеческой культуры. История геометрии, по сути, является отражением истории развития человеческой мысли.

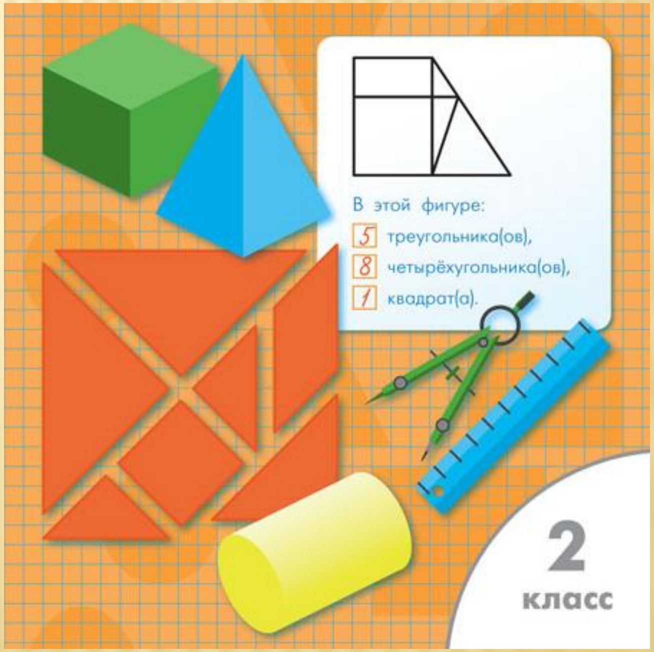
И.Ф. Шарыгин
(1937-2004)

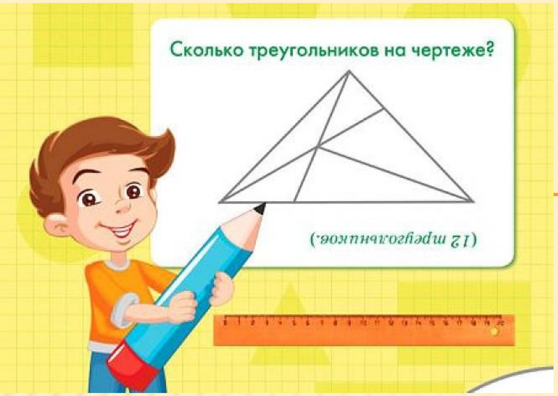
ТРУДНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

- Неалгоритмичность задач
- Необходимость выбора метода решения задачи и теоремы для решения конкретной задачи (нескольких теорем) из большого набора известных фактов
- Чтобы научиться решать геометрические задачи, нужно выполнить большое количество задач

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

- Использование числовых данных, а также теоретического материала
- Введение вспомогательной
- переменной
- Дополнительное построение





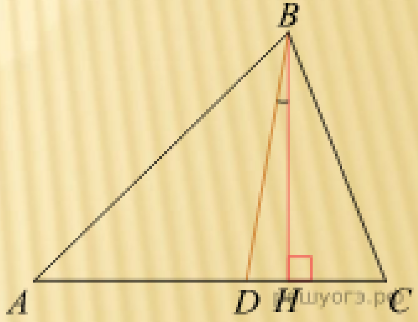
ЛАЙФХАКИ (ПОЛЕЗНЫЕ СОВЕТЫ)

- Известны два угла в треугольнике – найди третий
- Известен один из смежных углов – найди второй
- Известны две стороны в прямоугольном треугольнике – найди третью по теореме Пифагора
- Известны три стороны в треугольнике – проверь «обратного Пифагора»

- Теорема Фалеса (№ 385)
- Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой пропорциональные отрезки.
- Теорема о биссектрисе треугольника (№ 535)
  Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.
- Теорема Вариньона (№ 567)
- Середины сторон произвольного четырёхугольника являются вершинами параллелограмма
- Теорема о касательной и секущей (№ 670)
- Если из точки, лежащей вне окружности, проведены касательная и секущая, то квадрат длины касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть:

Задача 1

В ТРЕУГОЛЬНИКЕ ABC УГЛЫ A И C РАВНЫ 40° И 60° СООТВЕТСТВЕННО. НАЙДИТЕ УГОЛ МЕЖДУ ВЫСОТОЙ BH И БИССЕКТРИСОЙ BD.



Решение:

Из треугольника ABC найдем угол ABC:

угол ABC=180°- угол A -угол C=180°- 40°- 60°=80°.

BD — биссектриса, следовательно,

угол DBC= 0,5угла ABC=40°.

Треугольник HBC — прямоугольный, следовательно:

угол HBC=90°- угол C=90°- 60°=30°.

Найдём угол DBH:

угол DBH=угол DBC -угол HBC=40°- 30°=10° .

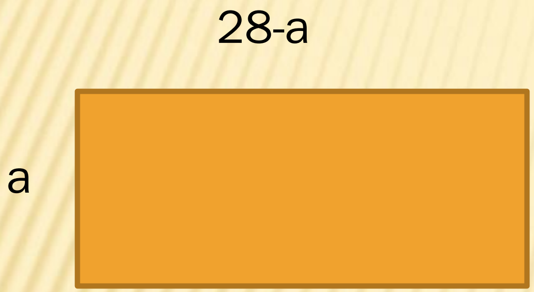
Ответ: 10°.

Введение вспомогательной переменной

Суть метода заключается в том, что исходя из условия задачи составляют уравнение (или систему уравнений). В качестве вспомогательных аргументов удобно выбирать величины, которые вместе с данными из условия задачи дают набор элементов, однозначно задающих некоторую фигуру.

Задача 2

ПЕРИМЕТР ПРЯМОУГОЛЬНИКА РАВЕН 56, А ДИАГОНАЛЬ РАВНА 27. НАЙДИТЕ ПЛОЩАДЬ ЭТОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА.



Решение:

Пусть одна из сторон прямоугольника равна a. Тогда другая сторона равна $28 - a$, а площадь $a(28 - a)$. По теореме Пифагора:

$$a^2 + (28 - a)^2 = 27^2$$

$$2a^2 - 56a + 55 = 0$$

$$a = \frac{56 \pm \sqrt{2696}}{4}$$

$$S = \frac{56 - \sqrt{2696}}{4} \cdot \frac{56 + \sqrt{2696}}{4} = \frac{56^2 - 2696}{16} = \frac{440}{16} = 27{,}5$$

Приведем еще одно решение.

Пусть одна из сторон прямоугольника равна a, а другая b, тогда площадь равна ab. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a+b=28, \\ a^2+b^2=27^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2=28^2 \\ a^2+b^2=27^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2ab+b^2=28^2 \\ a^2+b^2=27^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27^2+2ab=28^2 \\ a^2+b^2=27^2 \end{cases} \Leftrightarrow ab=\frac{28^2-27^2}{2}=27{,}5.$$

Пусть одна из сторон прямоугольника равна a. Тогда другая сторона равна $28-a$, а площадь $a(28-a)$. По теореме Пифагора:

$$a^2+(28-a)^2=27^2 \Leftrightarrow a^2+2a(28-a)+(28-a)^2=2a(28-a)+27^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a+(28-a))^2=2a(28-a)+27^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 28^2=2a(28-a)+27^2 \Leftrightarrow a(28-a)=\frac{28^2-27^2}{2}=27{,}5.$$

Значит, искомая площадь равна 27,5.

Ответ: 27,5

Дополнительные построения

- Перпендикуляр из точки к прямой, содержащей сторону фигуры
- Прямая, параллельная одной стороне фигуры или диагонали фигуры и проходящая через вершину фигуры
- Продление отрезка за данную точку на длину, равную длине отрезка
- Построение вспомогательной окружности
- Проведение в окружности вспомогательных радиусов, хорд

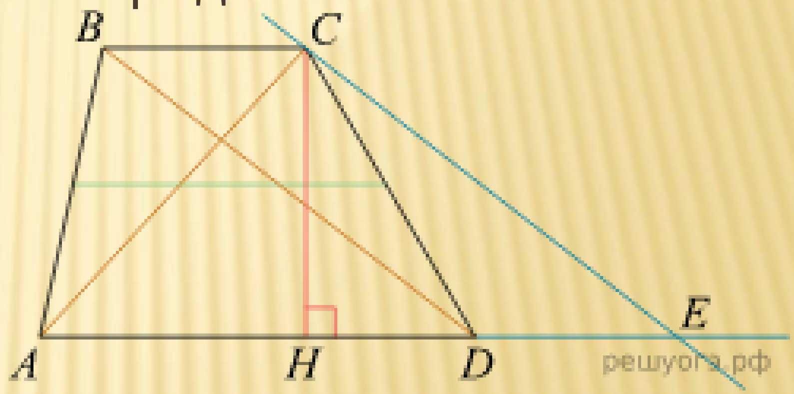
Задача 3

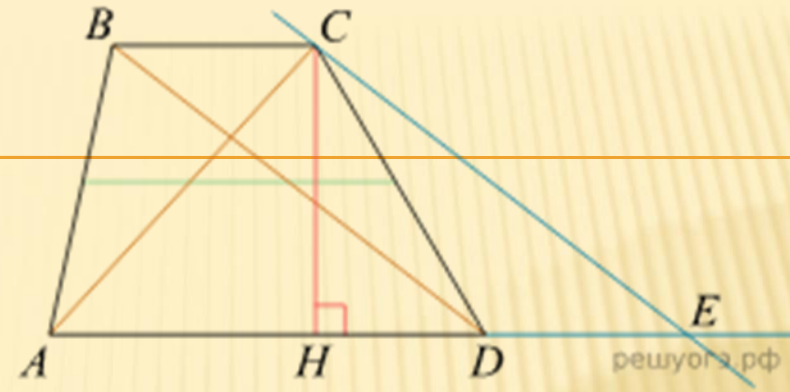
НАЙДИТЕ ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ, ДИАГОНАЛИ КОТОРОЙ РАВНЫ 15 И 7, А СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ РАВНА 10.

Решение:

Пусть AC=7, BD=15, m=10 — длина средней линии. Проведём прямую *CE*, параллельную BD. Рассмотрим четырёхугольник BCED: BCIIDE, BDIICE следовательно, *BCED* — параллелограмм, откуда DE=BC, BD=CE=15. Рассмотрим треугольник *ACE*, AE=AD+DE=AD+BE=

2m=20.





- Пусть *p* — полупериметр треугольника. Найдём площадь треугольника *ACE* по формуле Герона:

$$S_{ACE} = \sqrt{p(p - AC)(p - CE)(p - AE)} = \sqrt{21 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 1} = 42$$

- Площади треугольников *ABC* и *CDE* равны, так как соответственно равны их основания *BC* и *DE* и высоты проведённые к этим основаниям. Тогда

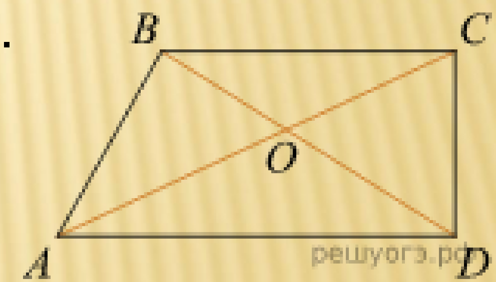
$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = S_{CDE} + S_{ACD} = S_{ACE} = 42$$

Ответ: 42

Задача 4

ДИАГОНАЛИ *AC* И *BD* ТРАПЕЦИИ *ABCD* ПЕРЕСЕКАЮТСЯ В ТОЧКЕ O. ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКОВ *AOD* И *BOC* РАВНЫ СООТВЕТСТВЕННО 16 СМ² И 9 СМ² . НАЙДИТЕ ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ.

Решение.



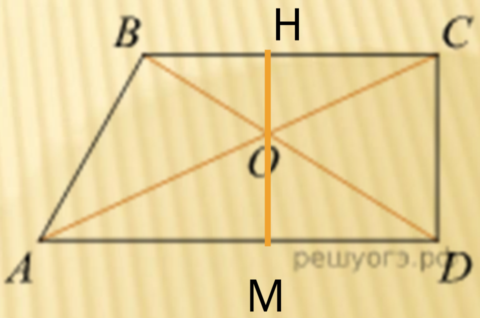
По условию S∆AOD не равна S∆BOC, поэтому AD и BC являются не боковыми сторонами, а основаниями трапеции. Тогда треугольники AOD и BOC подобны по двум углам, а отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия k= $\frac{4}{3} = \frac{OA}{OC}$. Поскольку треугольники ABO и CBO имеют общую высоту, проведённую из вершины B, отношение их площадей равно отношению их оснований, т. е. $\frac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta CBO}} = \frac{AO}{OC} = \frac{4}{3}$ Значит, $S_{\Delta ABO} = \frac{4}{3} S_{\Delta CBO} = \frac{4}{3} \cdot 9 = 12$

Площади треугольников ABD и ACD равны, так как эти треугольники имеют общее основание AD и их высоты, проведённые к этому основанию, равны как высоты трапеции, следовательно, $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta ABD} - S_{\Delta AOD} = S_{\Delta ACD} - S_{\Delta AOD} = S_{\Delta COD}$

Поэтому и S∆COD=12; SABCD=9 +16 +12 + 12=49 см^2 .

Ответ: 49 см^2 .

Метод введения вспомогательной переменной



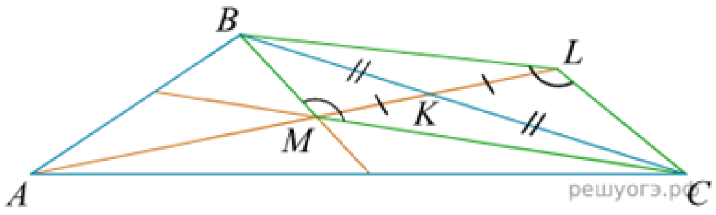
- Проведем MH перпендикулярно основаниям трапеции, через точку пересечения диагоналей
- Пусть AD=a, BC=b, OM=c, OH=d, тогда
- 0,5ac=16, 0,5bd=9. Так как треугольники AOD и BOC подобны по двум углам, а отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия k= 4/3, то b=3/4a, d=3/4c
- Площадь трапеции ABCD=0,5(a+b)(c+d)=
- =0,5ac+0,5ad+0,5bc+0,5bd=
- 16+0,5*3/4*ac+0,5*3/4*ac+9=16+12+12+9=49 см^2
- Ответ: 49 см^2 .

Задача 5

МЕДИАНЫ ТРЕУГОЛЬНИКА *ABC* ПЕРЕСЕКАЮТСЯ В ТОЧКЕ *M*. НАЙДИТЕ ДЛИНУ МЕДИАНЫ, ПРОВЕДЁННОЙ К СТОРОНЕ *BC*, ЕСЛИ УГОЛ *BAC* РАВЕН 47°, УГОЛ *BMC* РАВЕН 133°, *BC*=4√3.

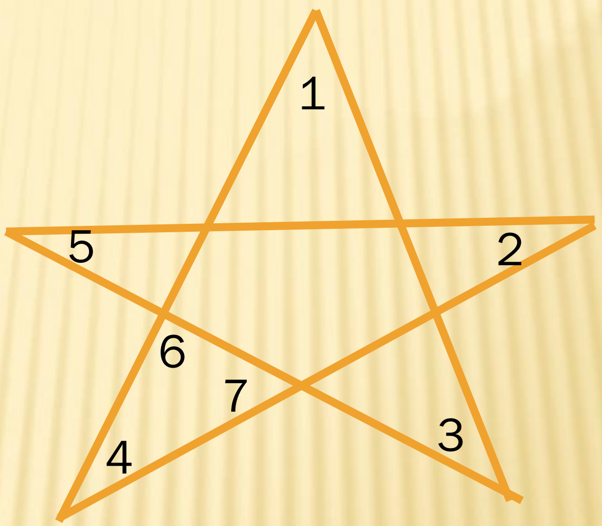
Решение.

Обозначим середину стороны BC за K. Продлим MK на свою длину за точку K до точки L. Четырёхугольник $BLCM$ — параллелограмм, потому что $MK = KL$ и $BK = KC$. Значит, $\angle BLC = \angle BMC = 133°$, поэтому четырёхугольник $ABLC$ — вписанный. Тогда $AK \cdot KL = BK \cdot KC$; $\frac{AK^2}{3} = \frac{BC^2}{4}$; $AK = 6$.



Ответ: 6.

Чему равна сумма углов пятиконечной звезды



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!