Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Е. К. Белый

Математика не для ЕГЭ

Прогрессии

Учебное пособие для абитуриентов
и студентов первого курса

Петрозаводск
Издательство ПетрГУ
2016

УДК 512.1
ББК 22.14
Б439

Рецензенты:
С.С. Платонов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры геометрии и топологии ПетрГУ;
Н. А. Киль, учитель первой категории СОШ № 42;
Е. С. Лоцман, кандидат педагогических наук, директор СОШ № 42

Белый, Евгений Константинович.
Б439 Прогрессии : учебное пособие для абитуриентов и студентов первого курса / Е. К. Белый ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. бюджет. образоват. учреждение высш. образования Петрозавод. гос. ун-т. – Петрозаводск : Издательство ПетрГУ, 2016. – 132 с. – (Математика не для ЕГЭ).

ISBN 978-5-8021-2964-7

Учебное пособие ориентировано на широкий круг читателей: учащихся старших классов, абитуриентов, студентов, а также учителей математики средней школы.

ISBN 978-5-8021-2964-7

УДК 512.1
ББК 22.14

Содержание

Допустим, Ахиллес бежит в десять раз быстрее, чем черепаха, и находится позади нее на расстоянии в тысячу шагов. За то время, за которое Ахиллес пробежит это расстояние, черепаха в ту же сторону проползет сто шагов. Когда Ахиллес пробежит сто шагов, черепаха проползет еще десять шагов, и так далее. Процесс будет продолжаться до бесконечности, Ахиллес так никогда и не догонит черепаху.

Зенон Элейский

Предисловие

$\boxed{\Rightarrow 7}$ *Дорогой читатель!* В новой книге серии «Математика не для ЕГЭ» получили дальнейшее развитие принципы, заложенные в «Алгебраических уравнениях»: доступное изложение материала, плавный переход от программы средней школы к вузовской и развитая навигация.

Предлагаемая книга ориентирована на самостоятельную работу. В середине прошлого века эксперименты психологов-когнитологов ряда стран подтвердили тот факт, что наиболее эффективно обучение идет на границе «известного» и «неизвестного». Процесс приобретения новых знаний замедляется, если почти все непонятно или почти все понятно. Поэтому при обучении в группе в незавидном положении оказываются как те, кто безнадежно отстал, так и те, кто ушел далеко вперед. Навыки *самостоятельной работы с книгой дают человеку возможность самому выбирать маршруты в бескрайнем океане знаний, делают его менее зависимым от среды обучения.*

Книга посвящена арифметическим и геометрическим прогрессиям: первые две главы собственно прогрессиям, а третья – их приложениям в финансовых вычислениях. Не каждый школьник может ответить на вопрос: зачем столько времени надо уделять прогрессиям? Тем не менее с этими замечательными последовательностями нам приходится сталкиваться довольно часто. Так, взбегая по лестнице, вы, если, конечно, не имеете обыкновения перепрыгивать через ступеньки, поднимаетесь с каждым шагом на постоянную величину по закону арифметической прогрессии. В записи числа веса его разрядов образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 10, *т. е.* $\{1,\ 10,\ 100,\ 1000\ldots\}$. *Термин «прогрессия» происходит от латинского progressio, что значит движение, рост. Прогрессии интересовали людей с тех пор, как возникли первые цивилизации. Еще в клинописных текстах Древнего Вавилона, относящихся ко II тысячелетию до н. э., были обнаружены задачи на финансовые вычисления, решение которых предполагает умение обращаться с такими последовательностями, например: «За какое время удвоится денежная сумма, ссуженная под 20 годовых процентов?». Другая задача зафиксирована на найденном в Египте папирусе (XVII–XVIII вв. до н. э.):*

«Тебе сказано: раздели 10 мер хлеба на 10 человек, если разность между каждым человеком и следующим составит $\frac{1}{8}$ *меры». В Древней Греции III в. н. э. формула суммы первых* n *членов арифметической прогрессии была известна Архимеду и Диофанту, а в Индии V в. н. э. астроному и математику Ариабхате. В средневековой Европе формула впервые появилась в «Книге абака» Леонардо Фибоначчи (XII в.). И по сей день* ***на арифметических и геометрических прогрессиях строится вся классическая теория финансовых вычислений****. А согласитесь, трудно найти сферу деятельности, в которой знакомство с основами финансовых вычислений было бы лишним. Надеемся, нам удалось убедить сомневающихся в том, что изучение прогрессий отнюдь не праздное занятие. Тогда в путь!*

Автор благодарит всех, кого заинтересовала первая книга «Алгебраические уравнения», кто высказал свои замечания и пожелания, а также коллектив школы № 42 и директора НОУ «Орбита» Г. А. Крылову за поддержку во время работы над книгой. Как и прежде, замечания и пожелания вы можете направлять по адресу: **belyi@petrsu.ru**.

Евгений Белый

Февраль 2016

Глава 1. Арифметические прогрессии

§ 1.1. Основные понятия

$\boxed{4 \Leftrightarrow 12}$ **Арифметическая прогрессия** – это последовательность вещественных чисел, каждый член которой, начиная со второго, получается из предыдущего путем прибавления к нему некоторой фиксированной величины d: если первый член прогрессии равен a_1, то для натуральных $n > 1$ справедливо равенство $a_n = a_{n-1} + d$. Формулу, выражающую n-й член последовательности через один или несколько предыдущих, называют **рекуррентной** (от лат. *recurrentis* – возвращающийся). По индукции из заданной выше рекуррентной формулы получим формулу n-го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + (n-1)d$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, и запишем прогрессию в виде

$$a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ a_1 + 3d\ \ \ldots\ .$$

Величину d называют **разностью прогрессии**, или **шагом прогрессии**. Арифметическая прогрессия при $d > 0$ строго монотонно возрастает, при $d < 0$ строго монотонно убывает, при $d = 0$ **стационарна**. Так, ряд натуральных чисел $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ – прогрессия с первым членом и разностью, равными 1. Для любого члена арифметической прогрессии, начиная со второго, выполняется равенство

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Leftrightarrow 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}. \quad \text{Действительно,}$$

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_1 + (n-2)d + a_1 + nd}{2} =$$
$$= \frac{2a_1 + 2(n-1)d}{2} = a_1 + (n-1)d = a_n.$$

И наоборот, если z – **среднее арифметическое** x и y, т. е. $z = \dfrac{x+y}{2}$, то числа x, z и y образуют арифметическую прогрессию. Если нет причин поступить иначе, мы и дальше будем обозначать буквой a с индексом члены арифметической прогрессии, а сумму n первых ее членов S_n:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Знак суммы $\sum$ *ввел в XVIII веке Леонард Эйлер. В дальнейшем мы встретим знак* $\prod$*, которым в XIX веке Карл Гаусс стал обозначать произведение множества индексированных переменных:* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$

Найдем формулу для S_n. Для этого запишем сумму n первых членов прогрессии в порядке возрастания индексов, а ниже ту же сумму в порядке убывания индексов и сложим величины, попавшие в один столбец:

$$\begin{array}{rcccccccccc} S_n = & a_1 & + & a_2 & + & \ldots & + & a_{n-1} & + & a_n \\ S_n = & a_n & + & a_{n-1} & + & \ldots & + & a_2 & + & a_1 \\ \hline 2S_n = & a_1 + a_n & + & a_2 + a_{n-1} & + & \ldots & & & & \end{array}$$

В первой строке каждое слагаемое больше предыдущего на величину d. Во второй, наоборот, каждое следующее слагаемое меньше предыдущего на d. Таким образом, суммы элементов соответствующих столбцов не меняются и всегда равны $a_1 + a_n$. Поскольку у нас n столбцов, $2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Rightarrow S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.
Из равенства $a_n = a_1 + (n-1)d$ следует:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Иногда под арифметической прогрессией подразумевают конечное число ее первых членов. Используют даже термин «конечная арифметическая прогрессия». Обычно такое «вольнодумство» не приводит к недоразумениям. Часто при определении арифметической прогрессии полагают $d \neq 0$, т. е. исключают случай стационарной прогрессии. Последнее непринципиально, но в некоторых случаях может вынудить нас делать лишние оговорки, например, в приведенном ниже утверждении о сумме двух арифметических прогрессий.

Определим **сумму двух последовательностей** $\{a_n^{(1)}\}$ и $\{a_n^{(2)}\}$ как последовательность $\{a_n\}$, для членов которой

имеет место равенство $a_n = a_n^{(1)} + a_n^{(2)}$. **Произведение последовательности** $\{a_n^{(1)}\}$ **на число** определим как последовательность произведений соответствующих ее членов на это число. **Линейной комбинацией двух последовательностей** $\{a_n^{(1)}\}$ и $\{a_n^{(2)}\}$ назовем последовательность $\{a_n\} = \alpha\{a_n^{(1)}\} + \beta\{a_n^{(2)}\}$, для членов которой имеет место равенство $a_n = \alpha a_n^{(1)} + \beta a_n^{(2)}$, где α и β – константы. Тогда:
1) сумма двух арифметических прогрессий $\{a_n^{(1)}\}$ и $\{a_n^{(2)}\}$ – арифметическая прогрессия

$$\{a_n\} = \{a_n^{(1)}\} + \{a_n^{(2)}\} = \{a_n^{(1)} + a_n^{(2)}\}, \text{ где } n = 1, 2, \ldots,$$

у которой $a_1 = a_1^{(1)} + a_1^{(2)}$, а $d = d^{(1)} + d^{(2)}$;
2) произведение арифметической прогрессии $\{a_n^{(1)}\}$ на число α – арифметическая прогрессия

$$\{a_n\} = \alpha \cdot \{a_n^{(1)}\} = \{\alpha \cdot a_n^{(1)}\}, \text{ где } n = 1, 2, \ldots,$$

у которой $a_1 = \alpha a_1^{(1)}$, а $d = \alpha d^{(1)}$;
3) любая линейная комбинация двух арифметических прогрессий $\{a_n^{(1)}\}$ и $\{a_n^{(2)}\}$ – арифметическая прогрессия

$$\{a_n\} = \{\alpha \cdot a_n^{(1)} + \beta \cdot a_n^{(2)}\}, \text{где } n = 1, 2, 3, \ldots, \alpha \text{ и } \beta \text{ – константы.}$$

Заметим, сумма n первых членов линейной комбинации двух арифметических прогрессий будет линейной комбинацией сумм прогрессий:

$$a_k = \alpha \cdot a_k^{(1)} + \beta \cdot a_k^{(2)} \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k^{(1)} + \beta \sum_{k=1}^{n} a_k^{(2)}.$$

Определим две прогрессии $\{\epsilon_n\}$ и $\{\zeta_n\}$:

$$\begin{cases} \{\epsilon_n\} = \{1, 1, 1, 1, \ldots\} \\ \{\zeta_n\} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\} \end{cases}, \text{ где } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Первая прогрессия стационарная, вторая – последовательность неотрицательных целых чисел. Тогда арифметическую прогрессию $\{a_n\}$ с первым членом a_1 и разностью d можно представить как $\{a_n\} = a_1\{\epsilon_n\} + d\{\zeta_n\}$.

Рассматривают также **арифметические прогрессии второго порядка** – последовательности чисел, разности которых образуют обычную арифметическую прогрессию (прогрессию первого порядка); **арифметические прогрессии третьего порядка** – последовательности чисел, разности которых образуют арифметическую прогрессию второго порядка и т. д. **Арифметической прогрессией n-го порядка**, где $n > 1$, называют последовательность чисел, разности которых образуют прогрессию порядка $n - 1$. Такие прогрессии иногда называют **арифметическими рядами**. Их рассматривали еще в школе Пифагора. Чтобы получить k-й член прогрессии порядка $n+1$, достаточно найти сумму k первых членов прогрессии порядка n.

Ниже в таблице представлены прогрессии, порожденные натуральным рядом чисел:

Арифметическая прогрессия									Порядок
1	2	3	4	5	6	7	8	…	1-й
1	3	6	10	15	21	28	36	…	2-й
1	4	10	20	35	56	84	120	…	3-й
1	5	15	35	70	126	210	330	…	4-й
1	6	21	56	126	252	462	792	…	5-й
1	7	28	84	210	462	924	1716	…	6-й

Любой прогрессии порядка n соответствует многочлен $P_n(x) = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$, такой, что k-й член прогрессии равен $P_n(k)$. В частности, для прогрессии первого порядка многочлен имеет вид

$P_1(x) = dx + (a_1 - d) \;\Rightarrow\; P_1(1) = a_1,\; P_1(2) = a_1 + d, \ldots\,;$

второго порядка –

$P_2(x) = \dfrac{d}{2}x^2 + \left(a_1 - \dfrac{d}{2}\right)x \;\Rightarrow\; P_2(1) = a_1,\; P_2(2) = 2a_1 + d, \ldots.$

§ 1.2. Фигурные числа

$\boxed{7 \Leftrightarrow 14}$ С незапамятных времен люди, оперируя с числами, выстраивали на земле замысловатые фигуры из камешков. С какой целью? Ответить на этот вопрос непросто. Наблюдали ли вы, как ласково раскладывает кошка на пороге хозяйского дома свои ночные трофеи? Она не только аккуратно уложит мышек в ряд, но и отсортирует их по размеру. А как паук плетет такие идеально симметричные узоры? Снова загадка. Однако вернемся к числам. Пифагорийцы считали, что фигурные числа скрывают тайны мироздания. К ним проявляли интерес Эратосфен, Гипсикл, Диофант Александрийский и другие математики античности. В средние века фигурные числа занимали Пачоли, Кардано, Фибоначчи и др., а в Новое время – Ферма, Коши и Эйлера. Мы же ограничимся только одним классом фигурных чисел – **многоугольными** (рис. 1).

Любая арифметическая прогрессия с $a_n = 1 + (n-1)d$,

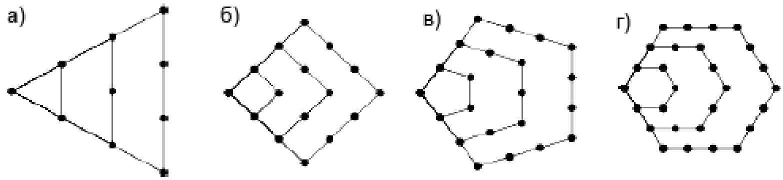

Рис. 1. Фигурные числа: а) треугольные, б) квадратные, в) пятиугольные, г) шестиугольные

где $n = 1, 2, \ldots$, а d – целое число, порождает прогрессию второго порядка – последовательность $(d+2)$-угольных чисел. Если количество углов многоугольника обозначить m, то исходную прогрессию можно задать формулой $a_n = 1 + (n-1)(m-2)$, а соответствующую прогрессию 2-го порядка – $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{[2 + (n-1)(m-2)]n}{2}$. Ниже в таблице представлены числа, соответствующие $m = 3, 4, 5, 6$.

Фигура	Числа	S_n
Треугольник	1, 3, 6, 10, 15, ...	$\dfrac{n(n+1)}{2}$
Четырехугольник	1, 4, 9, 16, 25, ...	n^2
Пятиугольник	1, 5, 12, 22, 35, ...	$\dfrac{n(3n-1)}{2}$
Шестиугольник	1, 6, 15, 28, 48, ...	$n(2n-1)$

§ 1.3. Примеры

$\boxed{12 \Leftrightarrow 32}$ Арифметическую прогрессию однозначно определяют значения a_1 и d.

$\boxed{\Omega 95}$ **Пример 1.** Дана прогрессия $1.2,\ 1.5,\ 1.8\ldots$. Найти a_5.

Решение. Разность прогрессии $d = 1.5 - 1.2 = 0.3$. Пятый член $a_5 = a_1 + 4d = 1.2 + 4 \cdot 0.3 = 2.4$.

Ответ: 2.4.

Зная любые два члена прогрессии, можно найти a_1 и d.

$\boxed{\Omega 95}$ **Пример 2.** Пусть $a_{10} = 10,\ a_{14} = 2$. Найти a_1 и d.

Решение:

$$\begin{cases} a_{10} = 10 \\ a_{14} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 9d = 10 \\ a_1 + 13d = 2 \end{cases} \Rightarrow 4d = -8 \Rightarrow d = -2.$$

Тогда $a_1 - 18 = 10 \Rightarrow a_1 = 28$.

Ответ: $a_1 = 28,\ d = -2$.

Пример 3. Седьмой член арифметической прогрессии равен 1 и равен $a_4 - a_2$. Найти a_1 и d. $\boxed{\Omega 95}$

Решение:

$$\begin{cases} a_7 = 1 \\ a_7 = a_4 - a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 6d = 1 \\ a_1 + 3d - (a_1 + d) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 6d = 1 \\ 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow\ d = \frac{1}{2},\ a_1 = -2.$$

Ответ: $d = \dfrac{1}{2},\quad a_1 = -2$.

Пример 4. Последовательность задана формулой $a_n = -2 + 3n$. Является ли эта последовательность арифметической прогрессией? $\boxed{\Omega 95}$

Решение. Для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ выполняется условие $a_{n+1} = -2 + 3(n+1) = -2 + 3n + 3 = a_n + 3,$ т. е. $a_{n+1} = a_n + 3$.

Ответ: последовательность является арифметической прогрессией с разностью $d = 3$.

Пример 5. Последовательность задана формулой $a_n = -2 + 3n^2$. Является ли эта последовательность арифметической прогрессией? $\boxed{\Omega 95}$

Решение. Для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ выполняется условие $a_{n+1} = -2 + 3(n+1)^2 = -2 + 3n^2 + 6n + 3 = a_n + 6n + 3$, т. е.

$a_{n+1} = a_n + 6n + 3$. Таким образом, $a_2 = a_1 + 9$, $a_3 = a_2 + 15$.
Ответ: поскольку $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$, последовательность не является арифметической прогрессией.

$\boxed{\Omega 96}$ **Пример 6.** Даны величины $a_1 = \lg 2$, $a_2 = \lg(3^x - 3)$, $a_3 = \lg(3^x + 9)$. При каких x числа a_1, a_2, a_3, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию?

Решение. Воспользуемся известным отношением между тремя соседними членами арифметической прогрессии:

$$2a_2 = a_1 + a_3 \Rightarrow \ 2 \cdot \lg(3^x - 3) = \lg 2 + \lg(3^x + 9) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lg(3^x - 3)^2 = \lg[2(3^x + 9)] \Rightarrow 3^{2x} - 6 \cdot 3^x + 9 = 2 \cdot 3^x + 18 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0. \quad \text{Пусть } 3^x = t.$$

Уравнение $t^2 - 8t - 9 = 0$ имеет решения: $t_1 = -1$ и $t_2 = 9$.

1) Уравнение $3^x = -1$ не имеет решения;

2) $3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$.

Ответ: при $x = 2$.

$\boxed{\Omega 96}$ **Пример 7.** $a_1 = 2$, $a_{10} = 20$. Найти сумму первых десяти членов арифметической прогрессии.

Решение: $S_{10} = \dfrac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \dfrac{2 + 20}{2} \cdot 10 = 110$.

Ответ: 110.

Справка о чинах в казачьих войсках. Приказной соответствует ефрейтору в современной армии, урядник – сержанту, вахмистр – ротному старшине, подхорунжий – прапорщику, хорунжий – лейтенанту, а сотенный есаул

– капитану, командиру роты. Еще одно замечание: сейчас вознаграждение в 1 руб. может показаться смехотворным, но когда-то за 1 руб. можно было купить корову, а за 2 руб. вполне приличную избу.

Пример 8. Казачья сотня отличилась в бою, и атаман решил наградить одного рядового казака, одного приказного, одного урядника, вахмистра, одного подхорунжия, одного хорунжия и сотенного есаула. Рядовому дал 1 руб., и далее каждому следующему чину – на 2 руб. больше предыдущего. Какова общая сумма вознаграждения? $\boxed{\Omega 96}$

Решение. Всего перечислено 7 чинов. Вознаграждение рядового казака $a_1 = 1$, далее от чина к чину оно увеличивается на величину $d = 2$, т. е. по закону арифметической прогрессии. Таким образом,

$$S_7 = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = \frac{2 + 6 \cdot 2}{2} \cdot 7 = 49.$$

Ответ: 49 руб.

Пример 9. Изменим условия примера № 8. Атаман решил наградить всю сотню и выдать рядовым казакам по 1 руб., приказным по 3, урядникам по 5, вахмистру 7, подхорунжиям по 9, хорунжиям по 11 и сотенному есаулу 13 рублей. Всего в сотне было 90 рядовых казаков, 20 приказных, 12 урядников, 1 вахмистр, 3 подхорунжия, 2 хорунжия и 1 есаул. Найти общую сумму вознаграждения. $\boxed{\Omega 96}$

Решение. Награды по-прежнему образуют арифметическую прогрессию $\{a_k\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$. Но теперь формула суммы n членов прогрессии нам не поможет. Каждый чин представлен группой казаков. Численность группы в статистике называют **весом группы**. Вес k-й группы обозначим m_k. Тогда веса групп в порядке возрастания чинов образуют последовательность $\{m_k\} = \{90, 20, 12, 1, 3, 2, 1\}$. Осталось найти **взвешенную сумму** членов прогрессии:

$$m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_7a_7 = \sum_{k=1}^{7} m_ka_k =$$

$$= 90 \cdot 1 + 20 \cdot 3 + 12 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 11 + 1 \cdot 13 = 279.$$

Ответ: 279 руб.

Ω97 **Пример 10.** Пусть $a_1 = 4$, $a_n = -20$, $d = -2$. Найти сумму n первых членов прогрессии.

Решение: $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow n = \dfrac{a_n - a_1}{d} + 1 = 13.$

$$S_{13} = \frac{a_1 + a_{13}}{2} \cdot 13 = \frac{4 - 20}{2} \cdot 13 = -104.$$

Ответ: -104.

Следующий пример связан с проектированием лестницы. *Плоскость ступени лестницы называют **проступью**, а длину проступи в направлении подъема **шагом лестницы**. Обозначим **высоту ступени**, т. е. расстояние по вертикали между двумя соседними проступями, буквой d, а шаг лестницы – s (рис. 2). Архитекторы XVII века уста-*

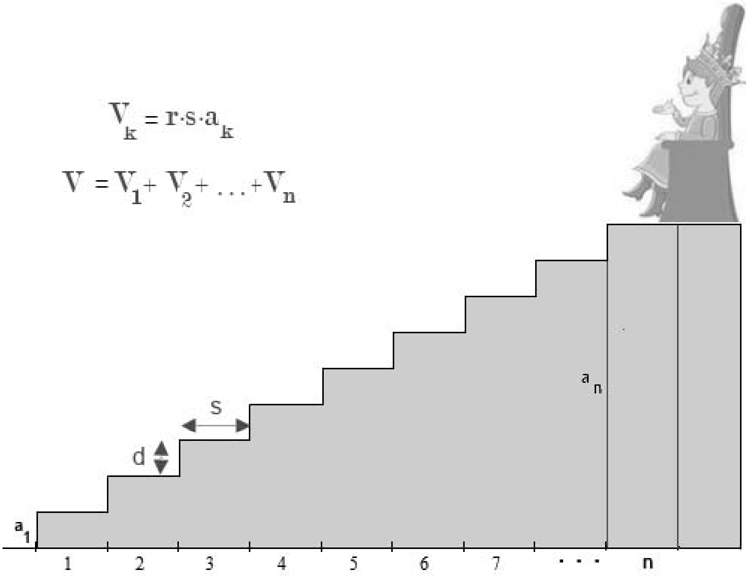

Рис. 2. Лестница, ведущая к трону

новили оптимальные отношения между шагом лестницы и высотой ступени:

$$\begin{cases} s + d = 45 \text{ (\textit{формула безопасности лестницы})}; \\ s - d = 12 \text{ (\textit{формула удобства лестницы})}. \end{cases}$$

За триста с лишним лет появилось много новых нормативов. Но если вы замерите параметры ступеней лестничного пролета в своем доме, то убедитесь, что с тех пор мало что изменилось. Выходит, параметры d и s не такие уж произвольные. Введем еще один параметр – ***ширину***

лестницы, *т. е. длину проступи в направлении, перпендикулярном плоскости (см. рис. 2).*

$\Omega 97$ **Пример 11.** Царь повелел установить трон на возвышенном месте и подвести к нему мраморную лестницу с заданными параметрами: n – количество ступеней, d – высота ступени, s – шаг лестницы, r – ширина. Какой объем мрамора потребуется для строительства лестницы?

Решение. Высота первой ступени $a_1 = d$, на нее потребуется мрамора $V_1 = d \cdot s \cdot r$. Высота следующей ступени от земли $a_2 = 2d$, на нее потребуется мрамора $V_2 = 2d \cdot s \cdot r$. Продолжая рассуждать по индукции, заметим, что под k-й ступенью должен располагаться мраморный блок объемом $V_k = a_k \cdot s \cdot r$, где $a_k = kd$. Таким образом, высоты ступеней от основания лестницы образуют арифметическую прогрессию. Суммарный объем всех мраморных блоков
$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n = (a_1 + \ldots + a_n) \cdot s \cdot r = \dfrac{n(n+1)}{2} \cdot d \cdot r \cdot s.$

Ответ: $V = \dfrac{n(n+1)}{2} \cdot d \cdot r \cdot s.$

$\Omega 97$ **Пример 12.** Пусть $a_1 = 1.2,\ a_4 = 1.8$. Найти S_6.

Решение: $\begin{cases} a_1 = 1.2 \\ a_1 + 3d = 1.8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1.2 \\ d = 0.2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_6 = \frac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = \frac{2.4 + 1}{2} \cdot 6 = 10.2.$$

Ответ: 10.2.

Пример 13. Вычислить $7.5 + 9.8 + 12.1 + \ldots + 53.5$. $\boxed{\Omega 97}$

Решение: $a_1 = 7.5,\ a_n = 53.5,\ d = 9.8 - 7,5 = 2.3$.
$a_n = a_1 + (n-1)d \ \Rightarrow\ n = \dfrac{a_n - a_1}{d} + 1 = \dfrac{53.5 - 7.5}{2.3} + 1 = 21.$

$$S_{21} = \frac{a_1 + a_{21}}{2} \cdot 21 = \frac{7.5 + 53.5}{2} \cdot 21 = 640.5.$$

Ответ: 640.5.

Пример 14. $a_4 = \dfrac{5}{14}$. Найти сумму первых семи членов арифметической прогрессии. $\boxed{\Omega 98}$

Решение: $a_4 = \frac{5}{14} \Rightarrow\ a_1 + 3d = \frac{5}{14} \Rightarrow$
$\Rightarrow \qquad S_7 = \frac{2a_1+6d}{2} \cdot 7 = (a_1 + 3d) \cdot 7 = \frac{5}{14} \cdot 7 = 2.5.$

Ответ: 2.5.

Пример 15. Сумма четвертого и шестого членов арифметической прогрессии равна 14. Найти сумму первых девяти членов этой прогрессии. $\boxed{\Omega 95}$

Решение: $a_4 + a_6 = 14 \Rightarrow\ a_1 + 3d + a_1 + 5d = 14 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2a_1 + 8d = 14 \Rightarrow S_9 = \dfrac{2a_1 + 8d}{2} \cdot 9 = \dfrac{14}{2} \cdot 9 = 63.$

Ответ: 63.

Пример 16. Требуется разделить 10 мер хлеба на 10 человек так, чтобы разность между каждым человеком и следующим составила $\dfrac{1}{8}$ меры. $\boxed{\Omega 98}$

Решение. У нас десять членов прогрессии с шагом $d = \frac{1}{8}$.

$$S0_{10} = 10 \Rightarrow \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 10 \Rightarrow \frac{2a_1 + 9d}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 9d = 2 \Rightarrow 2a_1 + \frac{9}{8} = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{7}{16}.$$

Ответ: требование задачи будет выполнено, если первый человек получит $\frac{7}{16}$ меры хлеба, а каждый следующий на $\frac{1}{8}$ меры больше предыдущего.

$\boxed{\Omega 98}$ **Пример 17.** Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии равна 30. Найти третий ее член.

Решение:

$$S_5 = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = 30 \Rightarrow (a_1 + 2d) \cdot 5 = 30 \Rightarrow a_1 + 2d = a_3 = 6.$$

Ответ: 6.

Если из арифметической прогрессии убрать первые n членов и последовательно перенумеровать остальные, мы получим арифметическую прогрессию с той же разностью, первым членом которой будет $(n+1)$-й член исходной.

$\boxed{\Omega 98}$ **Пример 18.** Пусть $a_{17} = 5$, а $a_{25} = 35$. Найти сумму членов прогрессии с семнадцатого по двадцать пятый.

Решение. Отбросим первые 16 членов, и задача сведется к нахождению суммы девяти первых членов прогрессии, первый член которой равен 5, а девятый 35.

$$S_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = \frac{5 + 35}{2} \cdot 9 = 180.$$

Ответ: 180.

Очевидно, сумма членов арифметической прогрессии с n-го по m-й, т. е. $S_{[n,m]}$, где $m > n$, равна $S_m - S_{n-1}$.

Пример 19. Найти сумму членов арифметической прогрессии с двенадцатого по девятнадцатый, если первый член равен 3, а двадцатый 41. $\boxed{\Omega 98}$

Решение: $a_{20} = a_1 + 19d \Rightarrow 3 + 19d = 41 \Rightarrow d = 2$.

$$S_{19} = \frac{2a_1 + 18d}{2} \cdot 19 = \frac{6 + 36}{2} \cdot 19 = 399.$$
$$S_{11} = \frac{2a_1 + 10d}{2} \cdot 11 = \frac{6 + 20}{2} \cdot 11 = 143, \;\; S_{19} - S_{11} = 256.$$

Ответ: 256.

Пример 20. Отношение суммы первых 13 членов арифметической прогрессии $S_{[1,13]}$ к сумме последних 13 членов $S_{[n-12,n]}$ равно $\dfrac{1}{2}$, а отношение суммы всех членов без первых трех $S_{[4,n]}$ к сумме всех членов без последних трех $S_{[1,n-3]}$ равно $\dfrac{4}{3}$. Определить число членов прогрессии. $\boxed{\Omega 98}$

Решение:

$$\begin{cases} \frac{S_{[1,13]}}{S_{[n-12,n]}} = \frac{1}{2} \\ \frac{S_{[4,n]}}{S_{[1,n-3]}} = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a_1 + a_{13}}{a_{n-12} + a_n} = \frac{1}{2} \\ \frac{a_4 + a_n}{a_1 + a_{n-3}} = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2a_1 + 12d}{2a_1 + 2(n-7)d} = \frac{1}{2} \\ \frac{2a_1 + (n+2)d}{2a_1 + (n-4)d} = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{d} = n - 19 \\ \frac{a_1}{d} = \frac{22-n}{2}. \end{cases} \quad \Rightarrow n - 19 = \frac{22-n}{2} \Rightarrow \quad n = 20.$$

Ответ: 20.

$\boxed{\Omega 99}$ **Пример 21.** Найти арифметическую прогрессию, в которой сумма первых n членов равна n^2 для любого n.

Решение: $S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = n^2 \ \Rightarrow d = \dfrac{2(n - a_1)}{n-1}$.
В последнем равенстве d будет константой только в случае $a_1 = 1$. Тогда $d = 2$ и $a_n = 1 + (n-1)2 = 2n - 1$. Иначе говоря, последовательность состоит из нечетных натуральных чисел $\{1, 3, 5, 7 \ldots\}$.

Ответ: $a_1 = 1$ и $d = 2$.

$\boxed{\Omega 99}$ **Пример 22.** Могут ли числа 1, $\sqrt{3}$ и 3 быть членами одной арифметической прогрессии?

Решение. Условия задачи не требуют, чтобы члены прогрессии были расположены подряд. Пусть $a_m = 1$, $a_n = \sqrt{3}$ и $a_p = 3$, где $m < n < p$. $a_n = a_1 + (n-1)d,\ a_m = a_1 + (m-1)d \Rightarrow$
$\Rightarrow a_m - a_n = (m-n)d$, т. е. разность любых двух членов равна произведению разности их номеров на разность прогрессии.

$$\text{Тогда } \begin{cases} a_n - a_m = (n-m)d = \sqrt{3} - 1 \\ a_p - a_n = (p-n)d = 3 - \sqrt{3} = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{a_p - a_n}{a_n - a_m} = \frac{p-n}{n-m} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}.$$

Поскольку $\sqrt{3}$ – иррациональное число, а $\frac{p-n}{n-m}$ – рациональное, они ни при каких m, n, p не будут равны.

Ответ: числа 1, $\sqrt{3}$ и 3 не могут быть членами одной арифметической прогрессии.

Пример 23. При каком условии числа a, b и c могут быть членами арифметической прогрессии? $\boxed{\Omega 99}$

Решение. Пусть $a = a_m$, $b = a_n$ и $c = a_p$. Тогда

$$\begin{cases} a = a_1 + d(m-1) \\ b = a_1 + d(n-1) \\ c = a_1 + d(p-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = d(m-n) \\ b - c = d(n-p) \end{cases} \Rightarrow \frac{a-b}{b-c} = \frac{m-k}{n-p}.$$

1. Если $\dfrac{a-b}{b-c}$ – иррациональное число, то числа a, b и c не могут быть членами арифметической прогрессии.

2. Если $\dfrac{a-b}{b-c} = \dfrac{s}{t}$, где s и t – целые числа, то a, b и c являются членами арифметической прогрессии:

$$\begin{cases} a = a_m = a_1 + d(m-1); \\ b = a_{m+s} = a_1 + d(m+s-1); \\ c = a_{m+s+t} = a_1 + d(m+s+t-1), \end{cases}$$

где a_1 – произвольная константа, $d = \frac{a-a_1}{m-1}$.

Ответ: числа a, b и c – члены арифметической прогрессии тогда и только тогда, когда $\dfrac{a-b}{b-c}$ – рациональное число.

Ω99 **Пример 24.** Найти четырехзначное число, первые три цифры которого образуют невозрастающую арифметическую прогрессию, если известно, что оно делится на 225.

Решение. Поскольку $225 = 25 \cdot 9$, число должно делиться на 25 и на 9. На 25 делятся все четырехзначные числа вида $**00$, $**25$ и $**75$. Представим все возможные варианты в зависимости от значения разности прогрессии d в следующей таблице:

d	$**00$	$**25$	$**75$
0	0000	2225	7775
1	2100	4325	9875
2	4200	6425	–
3	6300	8525	–
4	8400	–	–

Случай $d = 0$ – стационарная прогрессия. Число 0000 не является четырехзначным. Из остальных перечисленных в таблице чисел только одно делится на 9 – это 6 300.

Ответ: 6 300.

Ω99 **Пример 25.** Могут ли цифры трехзначного *простого* числа образовать прогрессию с положительной разностью?

Решение. Допустим, могут. Пусть пусть x – первая цифра, тогда $x + d$ – вторая, $x + 2d$ – третья. Сумма цифр числа равна $3x + 3d$. Поскольку сумма цифр делится на 3, на 3 делится и все число, а значит, оно не будет простым.

Ответ: цифры трехзначного простого числа не могут образовать арифметическую прогрессию.

Пример 26. Могут ли цифры четырехзначного *простого* числа образовать арифметическую прогрессию с положительной разностью? $\boxed{\Omega 99}$

Решение. Допустим, могут. Пусть x – первая цифра, $x+d$ – вторая, $x+2d$ – третья, $x+3d$ – четвертая. Сумма цифр числа равна $4x+6d=2(2x+3d)$. Сразу исключим случаи, когда x делится на 3, так как тогда и все число делится на 3. Поскольку $x+3d$ – цифра, $x+3d \leq 9$. Если $d>3$, то число $x+3d$ не будет десятичной цифрой, $d=3 \Rightarrow x=0$, и в таком случае число уже не будет четырехзначным. Остаются $d=0$, $d=1$ и $d=2$.

1) $d=0$. Прогрессия стационарна, число состоит из четырех одинаковых цифр и делится на соответствующую цифру. Простое число может делиться только на 1. Но число, состоящее из одних единиц, $1\,111=11\cdot 101$. Значит, $d\neq 0$.

2) $d=1$. Тогда надо искать число среди 1 234, 2 345, 3 456, 4 567, 5 678 и 6 789. Удалим четные числа, делящееся на 5 число 2 345 и делящееся на 3 число 6 789. Остается 4 567, которое действительно является простым. Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить делимость числа 4 567 на простые числа от 2 до 67, поскольку $68^2>4\,567$.

3) $d=2 \Rightarrow x\leq 3$. Случаи $x=0$ и $x=3$ мы исключили выше, а при $x=2$ получим четное число. Остается составное

число $1\ 357 = 23 \cdot 59$.

Ответ: единственное четырехзначное простое число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию, – 4 567.

$\boxed{\Omega 100}$ **Пример 27.** Можно ли в арифметической прогрессии между каждыми двумя последовательными членами вставить по k чисел так, чтобы и новая последовательность была арифметической прогрессией?

Решение. Надо взять прогрессию с тем же первым членом a_1 и разностью $\dfrac{d}{k+1}$. Например, если в исходной последовательности $a_1 = 6$, $d = 4$ и требуется между каждыми соседними членами вставить по 3 числа, то в новой последовательности должна быть разность $\frac{d}{4} = 1$ (рис. 3).

Ответ: можно.

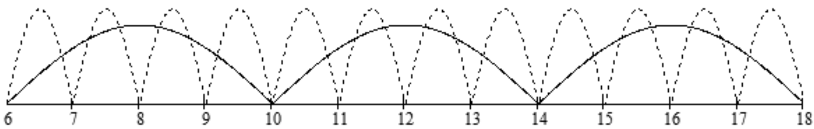

Рис. 3. Сплошная линия – исходная прогрессия, пунктирная – новая

Еще одно замечание: последовательность членов арифметической прогрессии с номерами $n,\ n+k,\ n+2k,\ n+3k, \ldots$, где n и k – натуральные числа, также является арифметической прогрессией с первым членом a_n и разностью $k \cdot d$. Так, если в исходной прогрессии с первым членом $a_1 = 5$ и разностью $d = 3$ взять члены с номерами $3,\ 7,\ 11, \ldots$, мы получим прогрессию с первым членом 11 и разностью $4d = 12$.

Интересно, что номера выбранных членов исходной прогрессии также образуют арифметическую прогрессию.

Далее рассмотрим задачу, предлагавшуюся на вступительном экзамене в Высшую школу бизнеса МГУ в 2004 г., которая, на первый взгляд, может показаться очень непростой. Однако, если вы не боитесь громоздких выражений, окажется, что для ее решения достаточно рассмотренного нами выше набора «стандартных средств».

Пример 28. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $25x^5+25(a-1)x^3-4(a-7)x=0$ имеет ровно пять различных вещественных корней, образующих арифметическую прогрессию. $\boxed{\Omega 100}$

Решение. Вынесем за скобки общий множитель x:
$x\left(25x^4+25(a-1)x^2-4(a-7)\right)=0$ и найдем корни биквадратного трехчлена в скобках. Для этого введем замену переменной $x^2=t:\quad 25t^2+25(a-1)t-4(a-7)=0;$

$$D=25^2(a-1)^2+4\cdot 25\cdot 4(a-7)=25(25a^2-34a-87);$$

$$D>0\Rightarrow a\in\left(-\infty;\frac{17-4\sqrt{154}}{25}\right)\cup\left(\frac{17+4\sqrt{154}}{25};+\infty\right).$$

На определенной ранее области значений a уравнение имеет два корня: $t_{1,2}=\dfrac{-5(a-1)\pm\sqrt{25a^2-34a-87}}{10}$. Поскольку $t=x^2$, исходное уравнение будет иметь пять различных вещественных корней только тогда, когда $t_{1,2}>0$.

В таком случае $-5(a-1) = 5(1-a) > 0$, т. е. должно выполняться условие $a < 1$. При этом автоматически выполнится условие $5(1-a) > \sqrt{25a^2 - 34a - 87}$. Действительно, возведя левую и правую части неравенства в квадрат, после простых преобразований мы придем к неравенству $a < 7$, что справедливо, если $a < 1$. Теперь область значений a сузилась до $a \in \left(-\infty; \dfrac{17 - 4\sqrt{154}}{25}\right) \cup \left(\dfrac{17 + 4\sqrt{154}}{25}; 1\right)$. В этой области исходное уравнение имеет пять вещественных корней. Расположим их в порядке возрастания:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{5(1-a)+r}{10}};\ x_2 = -\sqrt{\frac{5(1-a)-r}{10}};\ x_3 = 0;$$
$$x_4 = \sqrt{\frac{5(1-a)-r}{10}};\ x_5 = \sqrt{\frac{5(1-a)+r}{10}},$$
$$\text{где } r = \sqrt{25a^2 - 34a - 87}.$$

Они образуют арифметическую прогрессию (с. 8), если

$$2x_4 = x_3 + x_5 \ \Rightarrow\ 2\sqrt{\frac{5(1-a)-r}{10}} = \sqrt{\frac{5(1-a)+r}{10}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ 4\frac{5(1-a)-r}{10} = \frac{5(1-a)+r}{10} \ \Rightarrow\ 3 - 3a = r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ 3 - 3a = \sqrt{25a^2 - 34a - 87} \ \Rightarrow\ a^2 - a - 6 = 0.$$

Последнее уравнение имеет решения: $a_1 = -2$ и $a_2 = 3$. Однако второе не входит в установленную нами область значений a. При $a = -2$ упорядоченное множество корней примет вид $\left\{-\frac{2\sqrt{15}}{5}, -\frac{\sqrt{15}}{5}, 0, \frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{2\sqrt{15}}{5}\right\}$ и образует арифметическую прогрессию с первым членом $\left(-\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)$ и разностью $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Ответ: при $a = -2$.

Пример 29. Доказать, что для членов любой арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ справедливо равенство $\boxed{\Omega 101}$

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$

Доказательство. Для любого $k = 1, 2, \ldots n$

$$\frac{1}{a_ka_{k+1}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) \Rightarrow \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_na_{n+1}} =$$
$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$

Равенство доказано.

Глава 2. Геометрические прогрессии

§ 2.1. Основные понятия

$\boxed{12 \Leftrightarrow 36}$ **Геометрическая прогрессия** – это последовательность вещественных чисел, каждый член которой, начиная со второго, получается из предыдущего путем умножения его на некоторый фиксированный множитель $q \neq 0$: если первый член прогрессии равен b_1, то для натуральных $n > 1$ имеет место равенство $b_n = b_{n-1}q$. Отсюда $b_2 = b_1 q,\ b_3 = b_1 q^2, \ldots,\ b_n = b_1 q^{n-1}, \ldots$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$. Если все $b_n > 0$, логарифмы членов геометрической прогрессии образуют арифметическую прогрессию:

$$b_n = b_1 q^{n-1} \ \Rightarrow\ \ln b_n = \ln b_1 + (n-1)\ln q.$$

Первый член арифметической прогрессии $a_1 = \ln b_1$, а разность $d = \ln q$. Аналогично, если $\{a_n\}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots,$ – арифметическая прогрессия, то последовательность $\{e^{a_n}\}$ – геометрическая прогрессия

$$a_n = a_1 + (n-1)d \ \Rightarrow\ e^{a_n} = e^{a_1}(e^d)^{n-1}.$$

На соответствии между арифметическими и геометрическими прогрессиями основан принцип работы ***логарифмической линейки*** *– простейшего механического* *аналогового вычислительного устройства, которое успело послужить не одному поколению инженеров.*

Иногда под геометрической прогрессией подразумевают конечное число последовательных ее членов. Величину q называют **знаменателем геометрической прогрессии**. При $q = 1$ прогрессия стационарна, при $q > 0$ строго монотонна, а при $q < 0$ немонотонна. Прогрессию полностью определяют значения b_1 и q. Для любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, имеет место равенство $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$. Действительно,

$$\sqrt{b_{n-1}b_{n+1}} = \sqrt{b_1q^{n-2}b_1q^n} = \sqrt{b_1^2q^{2(n-1)}} = b_1q^{n-1} = b_n.$$

И наоборот, если z – **среднее геометрическое** x и y, т. е. $z = \sqrt{x \cdot y}$, то числа x, z и y образуют геометрическую прогрессию. Если нет причин поступать иначе, мы и далее будем обозначать члены геометрической прогрессии буквой b с соответствующим индексом. Сумму n первых ее членов обозначим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.

Найдем сумму n первых членов геометрической прогрессии

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}.$$

Для этого умножим левую и правую части последнего равенства на знаменатель прогрессии q:

$$S_nq = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^{n-1} + b_1q^n,$$

вычтем полученное равенство из исходного:

$$S_n - S_n q = b_1 - b_1 q^n \;\Rightarrow\; S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q} = b_1 \frac{q^n-1}{q-1}.$$

Если знаменатель геометрической прогрессии по модулю меньше 1, т. е. $|q| < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = b_1 \frac{1}{1-q} = S.$$

Таким образом, при $|q| < 1$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, который называют **суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии**: $S = b_1 \dfrac{1}{1-q}$.

Например, пусть дан прямоугольный равнобедренный треугольник площадью $S = 2$ (рис. 4).

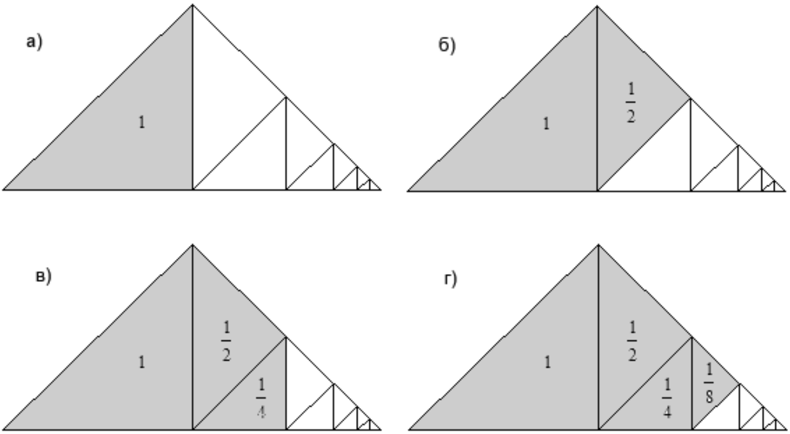

Рис. 4. Площадь заштрихованной области стремится к 2

1. Опустим перпендикуляр из вершины прямого угла на гипотенузу. Перпендикуляр разобьет треугольник на два прямоугольных равнобедренных треугольника площадью 1. Заштрихуем тот, что слева. Площадь заштрихованной области $S_1 = 1$ (рис. 4а).
2. Из вершины прямого угла незаштрихованного треугольника снова опустим перпендикуляр на гипотенузу. Перпендикуляр разобьет треугольник на два треугольника площадью $\frac{1}{2}$. Заштрихуем тот, что выше. Теперь площадь заштрихованной области $S_2 = 1 + \frac{1}{2}$(рис. 4б).
3. Продолжая дальше делить треугольник, на третьем шаге получим заштрихованную область $S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ (рис. 4в).

На n-м шаге площадь заштрихованной области будет

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Поскольку площадь всего большого треугольника $S = 2$, мы можем сделать величину S_n сколь угодно близкой к 2, но никогда не достигнем этого предела.

Пусть даны две геометрические прогрессии $\{b_n\}$ и $\{B_n\}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ с первыми членами b_1, B_1 и знаменателями q, Q соответственно. Выделим три операции над геометрическими прогрессиями, результатом выполнения которых являются геометрические прогрессии:

1. Последовательность, составленная из произведений

членов прогрессии $\{b_n\}$ на константу α, – геометрическая прогрессия со знаменателем q и первым членом αb_1.

2. Последовательнось, составленная из членов $\{b_n\}$, возведенных в степень α, где α – константа, – геометрическая прогрессия со знаменателем q^α и первым членом b_1^α.

3. Последовательность, составленная из произведений соответствующих членов прогрессий $\{b_n\}$ и $\{B_n\}$, – геометрическая прогрессия с первым членом b_1B_1 и знаменателем qQ.

Произведение первых n членов геометрической прогрессии $\{b_k\}$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$, находится из равенства

$$b_1b_2b_3\ldots b_n = \prod_{k=1}^{n} b_k = b_1^n \prod_{k=1}^{n} q^{k-1} = b_1^n q^{1+2+\ldots+n-1} = b_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

§ 2.2. Примеры

$\boxed{32 \Leftrightarrow 55}$

$\boxed{\Omega 102}$ **Пример 30.** Дана прогрессия $\{3,\ 6,\ 12,\ \ldots\}$. Найти b_5.

Решение. Прежде всего убедимся в том, что речь действительно идет о геометрической прогрессии:

$$q = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = 2. \text{ Тогда } b_5 = b_1q^4 = 3 \cdot 2^4 = 48.$$

Ответ: 48.

$\boxed{\Omega 102}$ **Пример 31.** Является ли последовательность $\{5,\ 10,\ 19,\ \ldots\}$ геометрической прогрессией?

Решение: $\dfrac{10}{5} \neq \dfrac{19}{10}$.
Ответ: не является.

Пример 32. Задача из российской рукописи XVII столетия: «Было 40 градов, а во всяком граде по 40 улиц, а во всякой улице по 40 домов, а во всяком доме по 40 столпов, а во всяком столпе по 40 колец, а у всякого кольца по 40 коней, а у всякого коня по 40 человек, а у всякого человека по 40 плетей; ино много-ли поразнь всего будет?» [2, с. 22]. $\boxed{\Omega 102}$

Решение. Количество градов $b_1 = 40$, в каждом граде 40 улиц, т. е. всего $b_2 = b_1 \cdot 40 = 1\ 600$. На каждой улице 40 домов, т. е. всего $b_3 = b_2 \cdot 40 = 64\ 000$ и т. д.

Ответ представим в виде таблицы:

Член прогрессии	Сущность	Количество
b_1	грады	40
b_2	улицы	1 600
b_3	дома	64 000
b_4	столпы	2 560 000
b_5	кольца	102 400 000
b_6	кони	4 096 000 000
b_7	люди	163 840 000 000
b_8	плети	6 553 600 000 000

Результат впечатляет! Народу в этих 40 городах более 163 миллиардов, а количество плетей выражается числом

6 триллионов 553 миллиарда 600 миллионов.

$\boxed{\Omega 102}$ **Пример 33.** Четвертый член геометрической прогрессии равен 3, а восьмой 48. Найти первый член и знаменатель.

Решение:

$$\begin{cases} b_3 = 3 \\ b_7 = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 q^3 = 3 \\ b_1 q^7 = 48 \end{cases} \Rightarrow \ q^4 = \frac{48}{3} = 16 \Rightarrow q = \pm 2.$$

1) $q = -2 \ \Rightarrow \ b_1(-8) = 3 \ \Rightarrow \ b_1 = -\frac{3}{8}$;
2) $q = 2 \ \Rightarrow \ b_1 8 = 3 \ \Rightarrow \ b_1 = \frac{3}{8}$.

Ответ: условиям задачи удовлетворяют две последовательности, заданные первым членом и знаменателем:

$$\begin{cases} b_1 = -\frac{3}{8} \\ q = -2 \end{cases} \quad u \quad \begin{cases} b_1 = \frac{3}{8} \\ q = 2 \end{cases}$$

$\boxed{\Omega 102}$ **Пример 34.** Найти четыре числа, образующие геометрическую прогрессию, если сумма первого и третьего равна 35, а сумма второго и четвертого – (-70).

Решение:

$$\begin{cases} b_1 + b_3 = 35 \\ b_2 + b_4 = -70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 + b_1 q^2 = 35 \\ b_1 q + b_1 q^3 = -70 \end{cases}$$

$q(b_1 + b_1 q^2) = -70 \Rightarrow \quad q \cdot 35 = -70 \ \Rightarrow \ q = -2.$
$b_1 + b_1 q^2 = 35 \ \Rightarrow \ b_1(1 + q^2) = 35 \Rightarrow b_1 5 = 35 \Rightarrow b_1 = 7.$

$b_2 = b_1 q = -14,\ b_3 = b_2 q = 28,\ b_4 = b_3 q = -56.$

Ответ: $\{7,\ -14,\ 28,\ -56\}$.

Пример 35. Является ли геометрической прогрессией последовательность, заданная формулой $b_n = 2 \cdot 3^{n+1} + 3^n$? $\boxed{\Omega 103}$

Решение. Для $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2 \cdot 3^{n+2} + 3^{n+1}}{2 \cdot 3^{n+1} + 3^n} = \frac{2 \cdot 9 + 3}{2 \cdot 3 + 1} = 3.$$

Ответ: является прогрессией со знаменателем $q = 3$.

Пример 36. Является ли геометрической прогрессией последовательность, заданная формулой $b_n = 2 + 3^{n-1}$? $\boxed{\Omega 103}$

Решение:

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{5}{2} \neq \frac{b_3}{b_2} = \frac{11}{5}.$$

Ответ: не является.

Пример 37. Числа a_1, a_2 и a_3 образуют арифметическую прогрессию, а числа $a_1 - 1$, $a_2 + 1$ и $a_3 + 15$ – геометрическую. Найти a_1 и d, если $a_1 + a_2 + a_3 = 24$. $\boxed{\Omega 103}$

Решение:

$$\begin{cases} 3a_1 + 3d = 24 \\ (a_1 + d + 1)^2 = (a_1 - 1)(a_1 + 2d + 15) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + d = 8 \\ d^2 + 4d + 16 - 12a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1 = 8 - d \\ d^2 + 16d - 80 = 0 \end{cases}$$

Ответ:

$$1) \begin{cases} a_1 = 28 \\ d = -20 \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \begin{cases} a_1 = 4 \\ d = 4 \end{cases}$$

$\boxed{\Omega 95}$ **Пример 38.** Сумма трех положительных чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 15. Если ко второму из них прибавить 1, к третьему 5, а первое оставить без изменения, получится геометрическая прогрессия. Найти три исходных числа.

Решение:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 15 \\ \frac{a_2+1}{a_1} = \frac{a_3+5}{a_2+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a_1 + 3d = 15 \\ \frac{a_1+d+1}{a_1} = \frac{a_1+2d+5}{a_1+d+1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 5 - d \\ d^2 + 2d - 3a_1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 5 - d \\ d^2 + 5d - 14 = 0 \end{cases}$$

Корни квадратного трехчлена $d_1 = -7$ и $d_2 = 2$.

1) $d = -7 \;\Rightarrow\; a_1 = 12$:

арифметическая прогрессия $a_1 = 12, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = -2;$

геометрическая прогрессия $b_1 = 12, \quad b_2 = 6, \quad b_3 = 3;$

2) $d = 2 \;\Rightarrow\; a_1 = 3$:

арифметическая прогрессия $a_1 = 3 \quad a_2 = 5 \quad a_3 = 7;$

геометрическая прогрессия $b_1 = 3 \quad b_2 = 6 \quad b_3 = 12.$

Ответ: 1) $\{12,\ 5,\ -2\}$ и 2) $\{3,\ 5,\ 7\}$.

$\boxed{\Omega 104}$ **Пример 39.** Шахматы появились примерно 3 тыс. лет назад в Индии. Согласно одной из легенд, царю настолько понравилась новая игра, что он немедленно вызвал к себе изобретателя и спросил, какую награду он хочет получить. Изобретатель попросил за первую клетку одно пшеничное зерно, за вторую – два, за третью – четыре и далее за каждую следующую клетку вдвое больше, чем за предыдущую. Столь ничтожная просьба разгневала царя. Он прогнал изобретателя и приказал казначею отсчитать затребованное количество зерен. За обедом между прочим царь поинтересовался, выполнен ли его приказ. Казначей ответил, что нет, поскольку награда слишком велика. Царь и слушать не хотел столь нелепых оправданий. Награда должна быть выплачена! Придворные математики трудились всю ночь, и к утру казначей вновь предстал перед царем, чтобы сообщить, что для выплаты вознаграждения не хватит зерен, хранящихся во всех амбарах царя, в житницах всего государства и даже всей Земли. Что это за число?

Решение. Поскольку шахматная доска разбита на 64 клетки, за последнюю клетку изобретатель должен получить 2^{63} зерна, а общее количество зерен составит:

$$S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} = \sum_{k=1}^{64} 2^{k-1} =$$

$$= \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Ответ: 18 446 744 073 709 551 615, т. е. 18 квинтиллионов 446 квадриллионов 744 триллиона 73 миллиарда 709 миллионов 551 тысяча 615 зерен.

Если считать вес одного зерна равным 0.065 *г, доска со всеми зернами весила бы около 1.2 триллиона тонн. Интересно, что в санскрите (древний индо-арийский язык) были слова для именования чисел до* 10^{53}.

На с. 76 мы рассмотрим пример геометрической прогрессии со знаменателем, немного большим 1.

$\boxed{\Omega 104}$ **Пример 40.** В геометрической прогрессии первый член равен 486, знаменатель $\dfrac{1}{3}$. Найти сумму первых четырех членов прогрессии.

Решение: $S_4 = b_1 \dfrac{1 - q^n}{1 - q} = 486 \dfrac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^4}{1 - \frac{1}{3}} = 720.$

Ответ: 720.

$\boxed{\Omega 104}$ **Пример 41.** Знаменатель геометрической прогрессии $q = -2$, сумма первых пяти членов $S_5 = 5.5$. Найти пятый член прогрессии.

Решение:

$$S_5 = b_1 \frac{1 - q^5}{1 - q} = b_1 \frac{33}{3} = b_1 11 \Rightarrow b_1 11 = 5.5 \Rightarrow b_1 = 0.5.$$

$$\text{Тогда} \quad b_5 = b_1 q^4 = 0.5 \cdot 16 = 8.$$

Ответ: 8.

Изменим условия двух задач из первой главы (с. 17).

$\boxed{\Omega 104}$ **Пример 42.** Казачья сотня отличилась в бою, и атаман решил наградить одного рядового, одного приказного, одного урядника, вахмистра, одного подхорунжия, одного хорунжия и сотенного есаула. Рядовому казаку был выдан 1 руб. и далее каждому следующему чину в два раза больше предыдущего. Какова общая сумма вознаграждения?

Решение. Всего перечислено 7 чинов. Вознаграждение рядового казака $b_1 = 1$, далее от чина к чину вознаграждение удваивается, т. е. $q = 2$. Таким образом, $S_7 = \dfrac{1-2^7}{1-2} = 127$.

Ответ: 127 руб.

Пример 43. Какова общая сумма вознаграждения, если атаман наградит всю сотню казаков и выдаст рядовым по 1 руб., приказным по 2 руб., урядникам по 4 руб., вахмистру 8 руб., подхорунжиям по 16 руб., хорунжиям по 32 руб. и сотенному есаулу 64 руб.? Пусть в сотне 90 рядовых казаков, 20 приказных, 12 урядников, 1 вахмистр, 3 подхорунжия, 2 хорунжия и 1 сотенный есаул. $\boxed{\Omega 104}$

Решение. Награды по возрастанию чинов образуют геометрическую прогрессию $\{b_k\} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$. Каждый чин представлен группой казаков. Вес k-й группы, как и в аналогичной задаче из первой главы, обозначим m_k. Тогда веса групп в порядке возрастания чинов образуют последовательность $\{m_k\} = \{90, 20, 12, 1, 3, 2, 1\}$. Взвешенная сумма членов прогрессии:

$$m_1b_1 + m_2b_2 + \ldots + m_7b_7 = \sum_{k=1}^{7} m_kb_k =$$

$$= 90 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 12 \cdot 4 + 1 \cdot 8 + 3 \cdot 16 + 2 \cdot 32 + 1 \cdot 64 = 362.$$

Ответ: 362 руб.

$\Omega 104$ **Пример 44.** При каких x величины $\sqrt{x-5}$, $\sqrt[4]{10x+4}$ и $\sqrt{x+2}$ образуют геометрическую прогрессию?

Решение. Область допустимых значений $x \geq 5$.

$$\sqrt{10x+4} = \sqrt{x-5}\sqrt{x+2} \Rightarrow 10x+4 = x^2 - 3x - 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 13x - 14 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \text{ и } x_2 = 14.$$

В область допустимых значений входит только $x = 14$.

Ответ: при $x = 14$.

$\Omega 105$ **Пример 45.** В возрастающей геометрической прогрессии сумма первого и последнего членов равна 66, произведение второго и предпоследнего 128, а сумма всех членов 126. Найти количество членов прогрессии.

Решение:

$$\begin{cases} b_1 + b_n = 66 \\ b_2 b_{n-1} = 128 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 + b_n = 66 \\ b_1 b_n = 128 \end{cases}, \text{ так как } b_2 b_{n-1} = b_1 b_n.$$

По теореме Виета b_1 и b_n являются корнями квадратного трехчлена $z^2 - 66z + 128$. Его корни $z_1 = 2$ и $z_2 = 64$. Поскольку по условию задачи прогрессия возрастающая, рассмотрим только случай, когда $b_1 = 2$, $b_n = 64$.

$$b_1 + b_n = 66 \Rightarrow\ b_1(1 + q^{n-1}) = 66 \Rightarrow\ q^{n-1} = 32 \Rightarrow\ q^n = 32q.$$

$$S_n = b_1\frac{1 - q^n}{1 - q} = 126 \Rightarrow\ \frac{1 - 32q}{1 - q} = 63 \Rightarrow\ q = 2.$$

$$q^{n-1} = 32 \Rightarrow\ 2^{n-1} = 32 \Rightarrow\ n = 6.$$

Ответ: 6.

Пример 46. Какие 3 числа надо поставить между 1 и 256, чтобы все 5 чисел составили геометрическую прогрессию? $\boxed{\Omega 105}$

Решение: $\begin{cases} b_1 = 1; \\ b_5 = 256 \Rightarrow\ q^4 = 256 \Rightarrow\ q = \pm 4. \end{cases}$

1) $q = -4\ \ \Rightarrow\ \{1, -4, 16, -64, 256\}$;

2) $q = 4\ \ \Rightarrow\ \{1, 4, 16, 64, 256\}$.

Ответ: $-4, 16, -64$ или $4, 16, 64$.

Теперь рассмотрим задачу из экономической теории.

Пример 47. Пусть в распоряжении коммерческого банка имеется 1 млн руб. Вопрос: на какую сумму банк может выдать кредиты за короткий срок? Под «коротким сроком» мы понимаем время, за которое ни один из клиентов не успеет вернуть долг. Для простоты допустим, что в нашем городе работает только один коммерческий банк. $\boxed{\Omega 105}$

Решение. Разумеется, вначале банк выдаст кредиты на 1 млн руб. Зададимся вопросом: зачем человек берет деньги в долг? Конечно, только для того, чтобы тут же с ними расстаться. Деньги в долг на хранение не берут. В таком случае

после того как деньги будут потрачены, например на приобретение какого-то товара, они снова окажутся на чьем-то счету в коммерческом банке. Миллион возвращается в банк, но банк не может снова одолжить кому-нибудь весь миллион, поскольку существует **обязательный резерв**, величину которого устанавливает Центральный банк. В нашей стране он составляет 20 % = 0.2. Таким образом, 0.2 млн зарезервированы и банк выдаст новые кредиты только из оставшихся 0.8 млн. Эти деньги также вернутся в банк, и он сможет выдать лишь $0.8 \cdot 0.8 = (0.8)^2$. Продолжая процесс далее, мы придем к бесконечной сумме:
$1 + 0.8 + (0.8)^2 + (0.8)^3 + \ldots = \dfrac{1}{1-0.8} = 5.$

Ответ: 5 млн руб.

Однако следует признать, что выдать кредиты на сумму в 5 млн руб. банку не удастся, поскольку за конечное время деньги не успеют совершить бесконечное число оборотов. Но если за короткий срок деньги обернутся 20 раз, банк сможет выдать кредиты на 4 млн 954 тыс. руб. Итак, 5 – это предел, к которому можно подойти сколь угодно близко, но достичь который нельзя.

$\boxed{\Omega 105}$ **Пример 48.** Жук движется со скоростью 1 см/с по следующей траектории (рис. 5): сначала обходит квадрат со стороной в 1 см $A_1B_1C_1D_1$, затем по отрезку A_1A_2 переходит на квадрат с вдвое меньшей стороной $A_2B_2C_2D_2$, обходит его, по отрезку A_2A_3 переходит на следующий квадрат и так до бесконечности. Сторона каждого следующего квадрата вдвое меньше предыдущего. За какое время жук обойдет все квадраты?

Решение. Длина участка $A_1B_1C_1D_1A_1A_2$ равна $4+\frac{\sqrt{2}}{4}$.

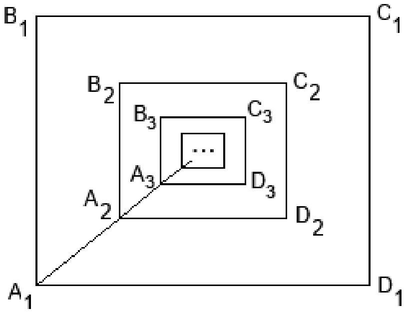

Рис. 5. Кривая $A_1B_1C_1D_1A_1A_2B_2C_2D_2A_2A_3\ldots$ совершает бесконечное число оборотов вокруг центра

Длина каждого следующего участка маршрута вдвое меньше предыдущего. Вынеся за скобки общий множитель $4+\frac{\sqrt{2}}{4}$, получим длину всего маршрута:

$$\left(4+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right)=8+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: жук обойдет все квадраты за $8+\frac{\sqrt{2}}{2}$ с (при этом он совершит бесконечное число оборотов вокруг точки пересечения диагоналей всех квадратов).

Пример 49. Вычислить: $432+72+12+2+\ldots$. $\boxed{\Omega 105}$

Решение. По виду последовательности можно заключить, что это бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{6}$. $S = 432\dfrac{1}{1-\frac{1}{6}} = 518.4$.

Ответ: 518.4.

Ω105 **Пример 50.** Найти сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если третий ее член $b_3 = 3$, а шестой $b_6 = \frac{1}{9}$.

Решение:

$$\frac{b_6}{b_3} = \frac{b_1 q^5}{b_1 q^2} = q^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow q = \frac{1}{3} \Rightarrow b_1\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 3 \Rightarrow b_1 = 27.$$

$$S = 27\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 40.5.$$

Ответ: 40.5.

Ω105 **Пример 51.** Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии $S_5 = 31$, а сумма всей прогрессии $S = 32$. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

Решение: $\begin{cases} S_5 = 31 \\ S = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1\frac{1-q^5}{1-q} = 31 \\ b_1\frac{1}{1-q} = 32 \end{cases}$

Разделим левую и правую части первого уравнения соответственно на левую и правую части второго:

$1-q^5 = \dfrac{31}{32} \Rightarrow\ q^5 = \dfrac{1}{32} \Rightarrow\ q = \dfrac{1}{2} \Rightarrow\ b_1\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 32\ \Rightarrow b_1 = 16.$

Ответ: $b_1 = 16$ и $q = \frac{1}{2}$.

Ω105 **Пример 52.** Найти $5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\ldots}}}}$.

Решение:

$$5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\ldots}}}} = 5\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{8}}5^{\frac{1}{16}}\ldots =$$
$$= 5^{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\cdots}\cdot 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}\cdots} = 5^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}} = 5\sqrt[3]{45}.$$

Ответ: $5\sqrt[3]{45}$.

Пример 53. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 9, а сумма квадратов ее членов 40.5. Найти первый член и знаменатель прогрессии. $\boxed{\Omega 105}$

Решение. Последовательность, составленная из квадратов членов геометрической прогрессии также будет геометрической прогрессией, первый член которой равен квадрату первого члена исходной, а знаменатель – квадрату знаменателя. Поэтому равенства для их сумм будут иметь вид

$$\begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = 9 \\ \frac{b_1^2}{1-q^2} = 40.5 \end{cases} \quad\Rightarrow \begin{cases} \frac{b_1^2}{(1-q)^2} = 81 \\ \frac{2b_1^2}{1-q^2} = 81 \end{cases}$$

Разделим левую и правую части второго уравнения соответственно на левую и правую части первого:

$$\frac{2b_1^2(1-q)^2}{b_1^2(1-q)(1+q)} = 1 \Rightarrow \frac{2(1-q)}{1+q} = 1 \Rightarrow 2-2q = 1+q \Rightarrow q = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{b_1}{1-\frac{1}{3}} = 9 \;\Rightarrow\; b_1 = 6.$$

Ответ: $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$.

$\boxed{\Omega 105}$ **Пример 54.** Можно ли в геометрической прогрессии между каждыми двумя последовательными членами вставить по k чисел так, чтобы новая последовательность также была геометрической прогрессией?

Решение. Надо взять прогрессию с тем же первым членом b_1 и знаменателем, равным $\sqrt[k+1]{q}$.

Ответ: можно.

Например, если в исходной прогрессии $b_1 = 3$, $q = 16$ и требуется между каждыми соседними членами вставить по 3 числа, то в новой прогрессии следует положить знаменатель $\sqrt[4]{16} = 2$. Также последовательность членов прогрессии с номерами $n,\ n+k,\ n+2k, n+3k, \ldots$, где n и k – натуральные числа, является геометрической прогрессией с первым членом $b_n = b_1 q^{n-1}$ и знаменателем q^k. Интересно, что номера выбранных членов исходной прогрессии образуют арифметическую прогрессию. Так, если в прогрессии $3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1\ 536, 3\ 072, 12\ 288, 24\ 576, \ldots$ с первым членом $b_1 = 3$ и знаменателем $q = 2$ взять члены с номерами $2,\ 6,\ 10, \ldots$, мы получим прогрессию с первым членом 6 и знаменателем $q^4 = 16$: $6,\ 96, 1\ 536,\ \ldots$.

$\boxed{\Omega 104}$ **Пример 55.** Найти сумму: $7 + 77 + 777 + \ldots + \overbrace{77\ldots7}^{n}$.

Решение:

$7 + 77 + 777 + \ldots + \overbrace{77\ldots7}^{n} = \frac{7}{9}(9 + 99 + 999 + \ldots + \overbrace{99\ldots9}^{n}) =$

$$= \frac{7}{9}(10 + 100 + 1000 + \ldots + 1\overbrace{00\ldots0}^{n} - n) =$$

$$= \frac{7}{9}(1 + 10 + 100 + 1000 + \ldots + 1\overbrace{00\ldots0}^{n} - (n+1)) =$$

$$= \frac{7}{9}\left(\frac{10^{n+1}-1}{9} - (n+1)\right). \text{ При } n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

сумма принимает значения $7, 84, 861, 8\ 638\ldots$.

Ответ: $7+77+777+\ldots+\overbrace{77\ldots7}^{n} = \frac{7}{9}\left(\frac{10^{n+1}-1}{9} - (n+1)\right)$.

Пример 56. При каких условиях три положительных числа α, β и γ могут быть членами геометрической прогрессии? $\boxed{\Omega 106}$

Решение. Пусть $\alpha = b_1q^m$, $\beta = b_1q^n$ и $\gamma = b_1q^p$.

$$\begin{cases} \frac{\beta}{\gamma} = q^{n-m} \\ \frac{\gamma}{\beta} = q^{p-n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ln(\beta) - ln(\gamma) = ln(q)(n-m) \\ ln(\gamma) - ln(\beta) = ln(q)(p-n) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{ln(\beta) - ln(\gamma)}{ln(\gamma) - ln(\beta)} = \frac{n-m}{p-n}.$$

Ответ: α, β и γ могут быть членами геометрической прогрессии тогда и только тогда, когда $\frac{ln(\beta) - ln(\gamma)}{ln(\gamma) - ln(\beta)}$ – рациональное число.

Последняя задача аналогична, предложенной на с. 25. Ее решение очевидно, если вспомнить, что логарифмы членов геометрической прогрессии образуют арифметическую прогрессию (с. 32). Если числа α, β и γ являются членами некоторой геометрической прогрессии, то найдется еще бесконечное множество прогрессий, членами которых эти числа являются (пример на с. 42).

$\boxed{\Omega 107}$ **Пример 57.** Члены прогрессии $\{b_i^{(3)}\}$ – произведения соответствующих членов бесконечно убывающих геометрических прогрессий $\{b_i^{(1)}\}$ и $\{b_i^{(2)}\}$, где $i = 1, 2, 3, \ldots$. Известно, что суммы прогрессий $S^{(1)} = 2$ и $S^{(3)} = \frac{6}{7}$ и $b_1^{(1)} = b_1^{(2)} = 1$. Найти $S^{(2)}$.

Решение: $b_1^{(3)} = b_1^{(1)} b_1^{(2)} = 1$. Как следует из теории (с. 35), знаменатель третьей прогрессии должен равняться произведению знаменателей первых двух:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-q_1} = 2 \;\Rightarrow\; q_1 = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{1-q_1q_2} = \dfrac{6}{7} \;\Rightarrow\; q_1q_2 = -\dfrac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow q_2 = -\frac{1}{3} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; S^{(2)} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $S^{(2)} = \dfrac{3}{4}$.

$\boxed{\Omega 107}$ **Пример 58.** Найти два различных корня уравнения $x^2 - 6px + q = 0$, если известно, что p, x_1, x_2 и q образуют геометрическую прогрессию.

Решение. Поскольку $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$,

$$\begin{cases} x_1^2 = px_2 \\ x_2^2 = x_1 q \end{cases} \Rightarrow (x_1x_2)^2 = x_1x_2pq \Rightarrow x_1x_2 = pq.$$

Но по теореме Виета $x_1x_2 = q$, следовательно, $p = 1$ и уравнение принимает вид $x^2 - 6x + q = 0$. Тогда при $p = 1$ окажется, что один из корней равен квадрату другого. Но сумма корней равна 6. Такие числа t и t^2 можно получить из уравнения $t^2 + t = 6 \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0$.

1) $t = -3 \;\Rightarrow\; t^2 = 9$. Числа $\{1, -3, 9, -27\}$;

2) $t = 2 \;\Rightarrow\; t^2 = 4$. Числа $\{1, 2, 4, 8\}$.

Ответ: 1) -3 и 9; 2) 2 и 4.

Пример 59. Доказать, что для переменных x, y и z выполняется равенство $(x^2 + y^2)(y^2 + z^2) = (xy + yz)^2$ тогда и только тогда, когда x, y и z образуют геометрическую прогрессию. $\boxed{\Omega 107}$

Доказательство. Раскрыв скобки, после несложных преобразований придем к равенству $y^2 = xz$. Последнее равенство равносильно утверждению о том, что x, y и z образуют геометрическую прогрессию. **Утверждение доказано.**

Пример 60. Найти трехзначное число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию. Если из этого числа вычесть 792, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Если из цифры, выражающей $\boxed{\Omega 107}$

число сотен, вычесть 4, остальные цифры образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Переберем все трехзначные числа, образующие возрастающие геометрические прогрессии. Для этого будем рассматривать первые цифры, начиная с единицы, а знаменатель прогрессии – начиная с двух. Стационарную прогрессию сразу исключим, поскольку для нее не выполняется одно из условий задачи. Непосредственный перебор показывает, что таких чисел всего три: 123, 139 и 248. Каждому числу соответствует число, цифры которого образуют убывающую геометрическую прогрессию: 321, 931 и 842. Вычесть число 792 мы можем только из последних двух. Второе условие выполняется лишь для числа 931.

Ответ: 931.

$\boxed{\Omega 107}$ **Пример 61.** Пусть $\{b_k\}$ – геометрическая прогрессия. Найти произведение ее первых n членов, если известны

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = S \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} = \sigma.$$

Решение. Произведение первых n членов прогрессии

$$b_1 b_2 b_3 \ldots b_n = \prod_{k=1}^{n} b_k = b_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad \text{(см. с. 36)}.$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} b^k = S \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{b^k} = \sigma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = S \\ \dfrac{1}{b_1} \dfrac{1 - \frac{1}{q^n}}{1 - \frac{1}{q}} = \sigma \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, получим:

$$\frac{S}{\sigma} = b_1^2 q^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{S}{\sigma}\right)^{\frac{n}{2}} = b_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = \prod_{k=1}^{n} b_k.$$

Ответ: $\prod\limits_{k=1}^{n} b_k = \left(\dfrac{S}{\sigma}\right)^{\frac{n}{2}}$.

§ 2.3. Арифметико-геометрические прогрессии

$\boxed{36 \Leftrightarrow 65}$ Последовательность $\{c_n\}$, первый член которой выбирается произвольно, а каждый следующий получается из предыдущего по формуле

$$c_{n+1} = d + c_n q, \text{ где } n = 1, 2, 3, \ldots, \ d \text{ и } q \text{ – константы},$$

называют **арифметико-геометрической прогрессией**. Такое определение корректно, поскольку при $q = 1$ из прогрессии $\{c_n\}$ мы получаем арифметическую, а при $d = 0$ – геометрическую прогрессию. Как и раньше, буквой d будем обозначать разность прогрессии, а q – знаменатель. Прогрессию однозначно определяют три параметра: c_1, d и q.

Пример 62. Является ли последовательность $\boxed{\Omega 107}$

$3, 11, 27, 59, 123, \ldots$ арифметико-геометрической прогрессией? Если да, найдите значения d и q.

Решение. Для арифметико-геометрической прогрессии должны выполняться условия:

$$\begin{cases} c_2 = d + c_1 q \\ c_3 = d + c_2 q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d + 3q = 11 \\ d + 11q = 27 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8q = 16 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow d + 6 = 11 \Rightarrow d = 5.$$

Условие $c_{n+1} = d + c_n q$ выполняется и для $n = 3, 4, 5$.

Ответ: $d = 5$, $q = 2$.

$\boxed{\Omega 107}$ **Пример 63.** Является ли последовательность $4, 18, 60, 185, \ldots$ арифметико-геометрической прогрессией?

Решение. Запишем условия:

$$\begin{cases} c_2 = d + c_1 q \\ c_3 = d + c_2 q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d + 4q = 18 \\ d + 18q = 60 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14q = 42 \Rightarrow q = 3 \Rightarrow d + 12 = 18 \Rightarrow d = 6.$$

Однако $c_4 \neq d + c_3 q$, т. е. $185 \neq 6 + 60 \cdot 3$.

Ответ: не является.

Найдем формулы для n-го члена и суммы первых n членов арифметико-геометрической прогрессии. Для этого к обеим частям равенства $c_{n+1} = d + c_n q$ прибавим $\frac{d}{q-1}$:

$$c_{n+1}+\frac{d}{q-1}=d+c_nq+\frac{d}{q-1}=c_nq+\frac{dq}{q-1}=q\left(c_n+\frac{d}{q-1}\right).$$

Таким образом, $\quad c_{n+1}+\dfrac{d}{q-1}=q\left(c_n+\dfrac{d}{q-1}\right).$

Введем обозначение $\quad u_n=c_n+\dfrac{d}{q-1}$. Тогда $u_{n+1}=q\cdot u_n$, где $n=1,2,3,\dots$, последовательность $\{u_n\}$ является геометрической прогрессией и $u_n=u_1q^{n-1}$.

$$u_n=u_1q^{n-1}\ \Rightarrow\ c_n+\frac{d}{q-1}=\left(c_1+\frac{d}{q-1}\right)q^{n-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_n=\left(c_1+\frac{d}{q-1}\right)q^{n-1}-\frac{d}{q-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n=\sum_{k=1}^{n}c_k=\left(c_1+\frac{d}{q-1}\right)\frac{q^n-1}{q-1}-\frac{nd}{q-1}.$$

Мы вывели две формулы:

$$\begin{cases} c_n=\left(c_1+\frac{d}{q-1}\right)q^{n-1}-\frac{d}{q-1};\\ S_n=\left(c_1+\frac{d}{q-1}\right)\frac{q^n-1}{q-1}-\frac{nd}{q-1}.\end{cases} \qquad (1)$$

Пример 64. Найти седьмой член прогрессии, первый член которой равен 5, разность $d=3$ и знаменателеь $q=2$. $\boxed{\Omega 108}$

Решение. Применим первую из формул (1):

$$c_7 = \left(5 + \frac{3}{2-1}\right)2^6 - \frac{3}{2-1} = 509.$$

Ответ: 509.

$\boxed{\Omega 108}$ **Пример 65.** Найти сумму первых пяти членов прогрессии, первый член которой равен 5, $d = 3$ и $q = 6$.

Решение. Применим вторую из формул (1):

$$S_5 = \left(5 + \frac{3}{2-1}\right)\frac{2^5 - 1}{2-1} - \frac{3 \cdot 5}{2-1} = 233.$$

Ответ: 233.

Параметры d и q арифметико-геометрической прогрессии можно выразить из равенств:

$$\begin{cases} c_n = c_{n-1}q + d \\ c_{n+1} = c_n q + d \end{cases} \Rightarrow q = \frac{c_{n+1} - c_n}{c_n - c_{n-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{n+1} = c_n\frac{c_{n+1} - c_n}{c_n - c_{n-1}} + d \;\Rightarrow\; d = \frac{c_n^2 - c_{n+1}c_{n-1}}{c_n - c_{n-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = \dfrac{c_n^2 - c_{n+1}c_{n-1}}{c_n - c_{n-1}} \\ q = \dfrac{c_{n+1} - c_n}{c_n - c_{n-1}} \end{cases} \tag{2}$$

Два важных замечания: при $d = c_1(1-q)$ прогрессия стационарна, т. е. $c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = \dfrac{d}{1-q}$; при $|q| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \left(c_1 + \frac{d}{q-1}\right) q^{n-1} - \frac{d}{q-1} = \frac{d}{1-q}.$$

Пример 66. Дана трапеция ABB_1A_1, у которой $|AB|= c$ и $|A_1B_1|= c_1$. Пусть A_2 – точка пересечения диагонали AB_1 со средней линией трапеции C_2D_2, B_2 – точка пересечения диагонали BA_1 со средней линией трапеции. Основание трапеции ABB_2A_2 равно $|A_2B_2|= c_2$ (рис. 6а). В трапеции ABB_2A_2 также найдем точки пересечения средней линии с диагоналями AB_2 и BA_2: соответственно A_3 и B_3. Основание трапеции ABB_3A_3 равно $|A_3B_3|= c_3$ (рис. 6б). Продолжив этот процесс, получим последовательность c_n, где $n = 1, 2, 3, \ldots$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$, т. е. предел последовательности верхних оснований трапеций. $\boxed{\Omega 108}$

Решение. Положим $c_1 < c$. Так как C_2D_2 – средняя ли-

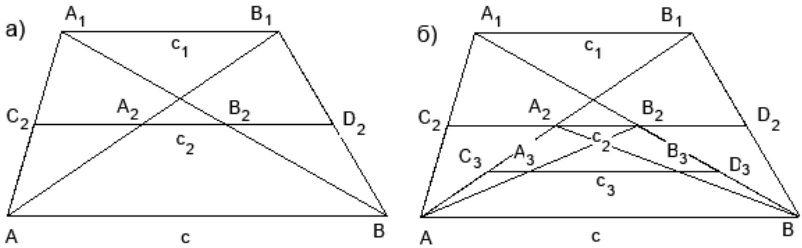

Рис. 6. Последовательность трапеций

ния трапеции, C_2B_2 – средняя линия треугольника AA_1B, а C_2A_2 – средняя линия треугольника AA_1B_1, следовательно, $|C_2B_2|= \frac{1}{2}c$ и $|C_2A_2|= \frac{1}{2}c_1$. $|A_2B_2|= |C_2B_2|-|C_2A_2|$.

Аналогично для трапеций ABB_2A_2, ABB_3A_3 и т. д. Последовательность

$$\begin{cases} c_2 = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}c_1; \\ c_3 = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}c_2; \\ c_4 = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}c_3; \\ \quad \ldots \end{cases} \tag{3}$$

определяется первым членом c_1 и **рекурентным** отношением $c_{n+1} = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}c_n$. Таким образом, последовательность $\{c_n\}$ является арифметико-геометрической прогрессией с первым членом c_1, разностью $d = \frac{1}{2}c$ и знаменателем $(-\frac{1}{2})$. Применив формулу n-го члена (1), получим:

$$c_n = \left(c_1 - \frac{c}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{c}{3}.$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \left(c_1 - \frac{c}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{c}{3} = \frac{c}{3}.$$

До сих пор мы исходили из предположения $c_1 < c$. А если окажется $c_1 > c$? Тогда изменится только первое из равенств (3): $c_2 = \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}c$. На каждом следующем шаге будет иметь место отношение $c_n < c$, т. е. верхнее основание трапеции будет меньше нижнего. Если нижнее основание втрое больше верхнего, т. е. $c = 3c_1$, то $c_n = \frac{c}{3} = c_1$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Ответ: $\dfrac{c}{3}$.

Следующий пример покажет, как формальное применение инструмента может привести к нелепому результату.

Пример 67. Дан остроугольный треугольник $A_1B_1C_1$, вписанный в некоторую окружность (рис. 7). Из вершины $\boxed{\Omega 108}$

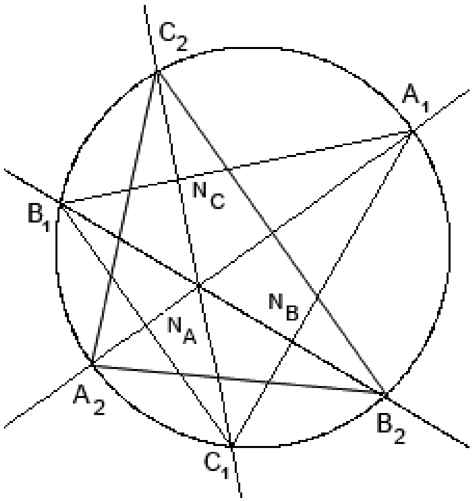

Рис. 7. Последовательность треугольников

угла A_1 опустим высоту на противоположную сторону и обозначим точку пересечения с окружностью продолжения высоты как A_2. Аналогично точки пересечений с окружностью продолжений высот, опущенных из точек B_1 и C_1, обозначим как B_2 и C_2. Таким образом, получим новый треугольник $A_2B_2C_2$. Как видно на рис. 7, он тоже остроугольный, т. е. все его углы острые. Рассмотрим $\angle A_2 = \angle C_2A_2A_1 + \angle A_1A_2B_2$. Поскольку углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны, $\angle C_2A_2A_1 = \angle C_2C_1A_1$ и $\angle A_1A_2B_2 = \angle A_1B_1B_2$. Основания высот отмечены буквами N_A, N_B и N_C. $\angle C_2C_1A_1$ – острый угол прямоугольного треугольника $C_1N_CA_1$, другой острый угол которого $\angle A_1$. Следовательно, $\angle C_2A_2A_1 = \angle C_2C_1A_1 = \frac{\pi}{2} - \angle A_1$. Аналогично $\angle A_1B_1B_2$ – острый угол прямоугольного треугольника $B_1N_BA_1$, другой острый угол которого $\angle A_1$, и $\angle A_1A_2B_2 = \angle A_1B_1B_2 = \dfrac{\pi}{2} - \angle A_1$. Следовательно, $\angle A_2 = \pi - 2\angle A_1$. Точно такое же равенство имеет место и для $\angle B_2$ и $\angle C_2$. Вернемся к рис. 7. Если повторить все указанные выше построения для треугольника $A_2B_2C_2$, то придем к треугольнику $A_3B_3C_3$. Причем

$$\begin{cases} \angle A_2 = \pi - 2\angle A_1 \\ \angle B_2 = \pi - 2\angle B_1 \\ \angle C_2 = \pi - 2\angle C_1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \angle A_3 = \pi - 2\angle A_2 \\ \angle B_3 = \pi - 2\angle B_2 \\ \angle C_3 = \pi - 2\angle C_2 \end{cases}$$

Можно подумать, что мы имеем дело с арифметико-геометрической прогрессией, разность которой $d = \pi$, а знаменатель $q = -2$. Тогда углы любого треугольника из последовательности находятся по первой из формул (1) на с. 57:

$$\begin{cases} \angle A_n = \left(\angle A_1 - \dfrac{\pi}{3}\right)(-2)^{n-1} + \dfrac{\pi}{3}; \\ \angle B_n = \left(\angle B_1 - \dfrac{\pi}{3}\right)(-2)^{n-1} + \dfrac{\pi}{3}; \\ \angle C_n = \left(\angle C_1 - \dfrac{\pi}{3}\right)(-2)^{n-1} + \dfrac{\pi}{3}. \end{cases} \tag{4}$$

Так ли это?

Решение. Если все углы исходного треугольника $A_1B_1C_1$

равны $\frac{\pi}{3}$, т. е. треугольник правильный, в последовательности $A_nB_nC_n$ будут бесконечно чередоваться два правильных треугольника, при наложении образующих «звезду Давида» (гексаграмму). Если же хотя бы один угол окажется отличным от $\frac{\pi}{3}$, то соответствующее выражение в круглых скобках перед $(-2)^{n-1}$ в равенствах (4) будет отлично от нуля и его произведение на $(-2)^{n-1}$ будет принимать сколь угодно большие по модулю поочередно положительные и отрицательные значения. Но все приведенные в формулировке задачи рассуждения справедливы только для остроугольного треугольника. А кто сказал, что для некоторого n треугольник $A_nB_nC_n$ не окажется тупоугольным? Например, если углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны соответственно 50^o, 60^o и 70^o, то углы треугольника $A_2B_2C_2$ – 80^o, 60^o и 40^o, а углы $A_3B_3C_3$ – 20^o, 60^o и 100^o. Здесь $\angle C_3$ тупой.

Ответ: на некотором этапе вычислений по первой из формул (1) треугольник $A_nB_nC_n$ перестанет быть остроугольным и равенства (4) не будут выполняться.

Пример 68. Углы шестиугольника образуют арифметико-геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 2$. Найти все углы шестиугольника, если наибольший угол равен 160^o. $\boxed{\Omega 108}$

Решение. Поскольку сумма углов шестиугольника равна

$(6-2)\cdot 180^o = 720^o$, из формул (1) на с. 57 следует:

$$\begin{cases} c_6 = 160 \\ S_6 = 720 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (c_1+d)32 - d = 160 \\ (c_1+d)63 - 6d = 720 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 32c_1 + 31d = 160 \\ 63c_1 + 57d = 720 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{4400}{43} \\ d = -\frac{5600}{43} \end{cases}$$

При известных значениях c_1, q и d значения углов c_2, c_3, c_4, c_5 можно найти непосредственно по формуле

$$c_n = \left(c_1 + \frac{d}{q-1}\right) q^{n-1} - \frac{d}{q-1},$$

где $n = 2, 3, 4, 5$, или через реккурентное отношение $c_n = c_{n-1}q + d$.

Ответ:

$$\left\{\frac{4\ 400^o}{43}, \frac{4\ 480^o}{43}, \frac{4\ 640^o}{43}, \frac{4\ 960^o}{43}, \frac{5\ 600^o}{43}, 160^o\right\}.$$

Задачи на применение арифметико-геометрических прогрессий в финансовых вычислениях вы найдете на с. 94.

Глава 3. Финансовые вычисления

В этой главе речь пойдет об одной из важнейших областей приложения теории прогрессий, историческое название которой финансовые вычисления. Но сначала мы должны познакомиться с некоторыми основными понятиями финансовой математики. Кредитор, предоставляя кому-либо во временное пользование деньги или другую собственность, на некоторое время лишается возможности использовать эти активы в личных интересах. К тому же средства труда подвержены износу, а деньги обесцениваются по причине инфляции. Наконец, кредит всегда связан с риском несвоевременного возврата и даже невозврата. Поэтому услуги кредитора нуждаются в вознаграждении в виде процентов. Пусть P – первоначальная сумма долга, тогда в конце срока сделки кредитор должен получить некоторую сумму $S = P + R$, где R – проценты. Ниже мы рассмотрим методы начисления процентов.

§ 3.1. Простые проценты

$\boxed{36 \Leftrightarrow 65}$ Как определить размер причитающегося кредитору вознаграждения? Если прокат одной лодки на лодочной станции стоит 100 руб. в час, то большинство сочтет справедливой плату в размере 200 руб. за 2 часа пользования одной лодкой, а также 200 руб. за 1 час проката 2 лодок.

Тогда есть смысл величину вознаграждения сделать пропорциональной величине предоставленного актива и времени, на которое этот актив предоставлен:

$$R = r \cdot P \cdot t. \tag{5}$$

Здесь P – величина актива, t – время, на которое он предоставлен, а коэффициент r – **процентная ставка**. Такой способ определения вознаграждения называют **простыми процентами**. Простые проценты обычно применяются в краткосрочных сделках на срок до года. Тем не менее время в финансовых вычислениях принято измерять в годах и под процентной ставкой, как правило, понимают **годовую процентную ставку**. Первый и последний дни сделки считают за один день. Поэтому при расчетах мы можем просто отбросить первый или последний день. Интервал времени между датой начала сделки и датой окончания разбивают на три части, соответствующие первому неполному месяцу, следующим полным месяцам, последнему неполному месяцу. **Количество дней сделки** находится как количество дней в первом неполном месяце + количество дней в полных месяцах + количество дней в последнем неполном месяце. Время сделки t определяется как отношение количества дней сделки к количеству дней в году. На первый взгляд, все просто, но дело в том, что существуют разные представления о количестве дней в месяце и в году. В финансовых вычислениях часто оперируют понятиями **коммерческий месяц**, который состоит ровно из 30 дней, и **коммерческий год**, который состоит ровно из 360 дней, т. е. из 12 коммерческих месяцев. Здесь уместно вспомнить, что угол в 1^o определяется как центральный угол, опирающийся на $\frac{1}{360}$ длины окружности. Такой способ измерения углов заимствован из древних календарей, в которых год изображали как окружность, разбитую на сектора. Каждому сектору соответствовал один день. У древних египтян год состоял из 12 месяцев по 30 дней, а в конце к ним добавляли недостающие 5 дней. В финансовых вычислениях сложились три способа определения времени сделки:

I. Точные проценты с точным числом дней ссуды (365/365). Время – отношение календарного количестива дней к календарному году. Применяется банками Великобритании, США и др.

II. Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (365/360). Время – отношение календарного количества дней к коммерческому году. Применяется во Франции, Бельгии, Швейцарии и др.

III. Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (360/360). При расчете количества дней полные месяцы считаются коммерческими. Год – коммерческий. Применяется в Германии, Швеции, Дании и др.

$\boxed{\Omega 108}$ **Пример 69.** Кредит выдан 21 апреля 2016 г. на срок до 12 ноября 2016 г. Определить время сделки.

Решение. Рассмотрим все три способа.

1. Точные проценты с точным числом дней ссуды. Количество дней $n = 9 + \overbrace{31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31}^{\text{полные месяцы}} + 12 = 205 \Rightarrow$ $\Rightarrow t = \frac{n}{365} = \frac{205}{365} = 0.562.$

2. Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды. $n = 9 + \overbrace{31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31}^{\text{полные месяцы}} + 12 = 205 \Rightarrow$ $\Rightarrow t = \frac{n}{360} = \frac{205}{360} = 0.569.$

3. Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды. Количество дней $n = 9 + \overbrace{6 \cdot 30}^{\text{полные месяцы}} + 12 = 201 \Rightarrow$ $\Rightarrow t = \frac{n}{360} = \frac{201}{360} = 0.558.$

Ответ: 1) $t = 0.562$; 2) $t = 0.569$; 3) $t = 0.558$.

Итак, если сумма P предоставлена на время t, в конце срока кредитор (формула (5) на с. 66) должен получить сумму

$$S = P + R = P + rPt = P(1 + rt). \qquad (6)$$

Величину $1 + rt$ будем называть множителем наращения. Долг под простые проценты за равные промежутки времени Δt возрастает на одну и ту же величину $Pr\Delta t$, т. е. растет по закону арифметической прогрессии. Теперь усложним условия задачи.

$\boxed{\Omega 109}$ **Пример 70.** 21 апреля 2016 г. в кредит под 20 % годовых выдано 100 тыс. руб. на срок до 12 ноября 2016 г. Какую сумму должен получить кредитор 12 ноября?

Решение. Мы знаем, что результат зависит от способа определения времени сделки. Исходя из определенных в предыдущем примере значений времени сделки, найдем по формуле (6) значения конечной суммы S:

1. (365/365).

$n = 205 \Rightarrow t = 0.562 \Rightarrow S = 100(1 + 0.2 \cdot 0.562) = 111\ 233.$

2. (365/360).

$n = 205 \Rightarrow t = 0.569 \Rightarrow S = 100(1 + 0.2 \cdot 0.569) = 111\ 389.$

3. (360/360).

$n = 201 \Rightarrow t = 0.558 \Rightarrow S = 100(1 + 0.2 \cdot 0.558) = 111\ 167.$

Ответ: 1) $S = 111\ 233$ (руб.); 2) $S = 111\ 389$ (руб.); 3) $S = 111\ 167$ (руб.).

Иногда, наоборот, требуется по известной конечной сумме определить исходную. В таком случае из (6) следует:

$$P = \frac{S}{(1 + rt)}. \tag{7}$$

Операцию, заданную равенством (7), называют **дисконтированием**, а величину $\dfrac{1}{(1+rt)}$ – **дисконтным множителем** (англ. *discount* – скидка).

Пример 71. Леша 3 марта 2017 г. получит 500 тыс. руб. за сданное в аренду помещение. Но 22 сентября 2016 г. ему срочно понадобились деньги. Какую сумму он может взять $\boxed{\Omega 109}$

в кредит под 18 % годовых, чтобы 3 марта полностью погасить долг? Время сделки определить по схеме 360/360.

Решение. Количество дней $n = 18 + 5 \cdot 30 + 3 = 171 \Rightarrow$

$$\Rightarrow t = \frac{171}{360} = 0.475 \Rightarrow P = \frac{S}{1+rt} =$$

$$= \frac{500}{1 + 0.18 \cdot 0.475} = 460.617.$$

Ответ: Леша может взять в кредит не более 460 617 руб.

В любой экономической деятельности приходится оперировать активами, относящимися к разным периодом времени. Но даже очень далекий от экономики человек обычно понимает, что «сегодняшняя» тысяча и «завтрашняя» тысяча – разные деньги. Процентная ставка через формулы $S = P(1+rt)$ и $P = \dfrac{S}{1+rt}$ задает соответствие между «сегодняшними» и «завтрашними» деньгами. В случае дисконтирования иногда удобней работать не с процентной, а с так называемой **дисконтной ставкой**, которую также называют **учетной**. Пусть S – конечная сумма, а P – соответствующая ей начальная сумма. Тогда

$$P = S - D = S - dSt = S(1 - dt), \tag{8}$$

где D – дисконт (скидка), d – дисконтная ставка, а $(1 - dt)$ – дисконтный множитель. Одну и ту же сделку можно осуществить, отталкиваясь как от процентной, так и от дисконтной ставки:

Формула	Операция	Ставка
$S = P(1 + rt)$	наращение	процентная
$P = \dfrac{S}{1 + rt}$	дисконтирование	процентная
$P = S(1 - dt)$	дисконтирование	дисконтная
$S = \dfrac{P}{1 - dt}$	наращение	дисконтная

Если в двух сделках совпадают значения P, S и t, будем говорить, что они **эквивалентны**. Пусть в одной из двух эквивалентных сделок мы использовали процентную ставку r, а в другой – дисконтную ставку d:

$$\begin{cases} S = P(1 + rt) \\ P = S(1 - dt) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = P(1 + rt) \\ S = \dfrac{P}{1 - dt} \end{cases} \Rightarrow 1 + rt = \frac{1}{1 - dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{d} - \frac{1}{r} = t \Rightarrow \quad \left(d = \frac{r}{1 + rt}\right) \& \left(r = \frac{d}{1 - dt}\right). \qquad (9)$$

Если выполнены условия (9), процентная и дисконтная ставки обеспечивают эквивалентные сделки и мы будем говорить, что процентная и дисконтная **ставки эквивалентны**: $d \sim r$. Как видно из формул (9), чтобы, зная процентную ставку, найти эквивалентную ей дисконтную, надо продисконтировать процентную ставку по этой же процентной ставке, а чтобы, зная диконтную ставку, найти эквивалентную ей процентную, надо нарастить дисконтную ставку по этой же дисконтной ставке. Заметим также, что отношение $d \sim r$ зависит от времени t. При стремлении t к нулю, d стремится к r, а при стремлении t к бесконечности – к нулю: $\lim\limits_{t\to 0} d = r$; $\lim\limits_{t\to +\infty} d = 0$.

$\boxed{\Omega 109}$ **Пример 72.** Найти учетную ставку, эквивалентную процентной 20 % годовых, если время сделки $t = 0.5$ года.

Решение: $r = 0.2 \Rightarrow d = \dfrac{0.2}{1 + 0.2 \cdot 0.5} = 0.182.$

Ответ: 18.2 %.

$\boxed{\Omega 109}$ **Пример 73.** Найти процентную ставку, эквивалентную дисконтной 18 % годовых, если время сделки $t = 0.3$ года.

Решение: $d = 0.18 \Rightarrow r = \dfrac{0.18}{1 - 0.18 \cdot 0.3} = 0.19.$

Ответ: 19 %.

Учетная (дисконтная) ставка используется при проведении операций с векселями. В этом случае время сделки обычно рассчитывается по схеме 360/360. **Вексель** – это долговая расписка. Тот, кто выписывает вексель, – **векселедатель**, а тот, кто получает, – **векселедержатель**. Иногда векселедержатель может передать вексель третьему лицу как средство платежа за товар или услугу. Тогда вексель выполняет функцию денег (разумеется, если партнер готов принять платеж в виде векселя).

$\boxed{\Omega 110}$ **Пример 74.** Леше не хватило 1 млн руб. на покупку оборудования, и продавец Гоша согласился принять от него вексель по учетной ставке 24 % годовых. Леша обязался заплатить предъявителю векселя некоторую сумму денег

5 июня 2016 г. Какая сумма должна быть проставлена на векселе, если вексель выписан 25 ноября 2015 г.? Векселедержателю 14 февраля 2016 г. понадобились деньги, и один коммерческий банк согласился принять вексель по учетной ставке 22 % годовых. Какую сумму получит на руки Леша?

Решение. Продолжительность «жизни» векселя

$$n = 5 + 6 \cdot 30 + 5 = 190 \text{ (дней)} \ \Rightarrow t = \frac{190}{360} = 0.528 \text{ (г.)}.$$

$$P = S(1 - dt) \Rightarrow S = \frac{P}{1 - dt} = 1\ 145.108 \text{ (тыс. руб.)}.$$

14 февраля 2016 г. до даты платежа оставалось

$$n = 15 + 3 \cdot 30 + 5 = 110 \text{ (дней)} \ \Rightarrow t = \frac{110}{360} = 0.306 \text{ (г.)}.$$

$$P_1 = 1\ 145.108(1 - 0.22 \cdot 0.306) = 1\ 068.019 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Ответ: векселедатель Леша должен выписать вексель на 1 млн 145 тыс. 108 руб. Векселедержатель Гоша 14 февраля 2016 г. сможет учесть в банке этот вексель и получить 1 млн 68 тыс. 19 руб.

В этой задаче мы сначала нарастили исходную сумму, затем дисконтировали конечную. Разумеется, опустив целый ряд нюансов. В частности, вексель примут только от надежного векселедателя.

Иначе может возникнуть такая схема: Леша банкрот, его друг Гоша тоже. Леша выписывает Гоше вексель на 1 млн, а Гоша точно такой же вексель Леше. Затем оба идут в разные коммерческие банки, где учитывают свои векселя.

Вечером два новоиспеченных миллионера совместно отмечают удачную сделку.

$\boxed{\Omega 110}$ **Пример 75.** За какое время удвоится сумма денег, ссуженная под 20 годовых процентов?

Решение: $P(1+rt) = 2P \Rightarrow 1 + rt = 2 \Rightarrow t = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{0.2} = 5.$

Ответ: за 5 лет.

$\boxed{\Omega 110}$ **Пример 76.** За какое время t_n сумма денег, ссуженная под r годовых процентов, возрастет в n раз?

Решение: $P(1+rt_n) = nP \Rightarrow 1 + rt_n = n \Rightarrow t_n = (n-1)\dfrac{1}{r}.$

Здесь $t_n = (n-1)\dfrac{1}{r}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots,$ – n-й член арифметической прогрессии с первым членом $t_1 = 0$ и разностью $\dfrac{1}{r}$.

Ответ: за $(n-1)\dfrac{1}{r}$ лет.

§ 3.2. Сложные проценты

$\boxed{65 \Leftrightarrow 83}$ А если бы кроме простых процентов никаких других не было? Тогда могла возникнуть следующая ситуация. Вы положили P рублей в банк под r годовых процентов. Сумма вклада каждый месяц увеличивается на величину $P\dfrac{r}{12}$, т. е. по закону арифметической прогрессии. Какое желание появится у вас через год? Конечно, желание снять деньги со счета и опять положить их на счет под те же проценты. В этом случае проценты будут начисляться с суммы $P_1 = P(1+r)$, т. е. вклад будет расти по закону

$P(1+r)(1+rt)$, и уже в первый месяц нового года прирост составит не $P\dfrac{r}{12}$, а $P(1+r)\dfrac{r}{12}$ руб. **Сложные проценты** позволяют избежать подобных ситуаций. Начисление по сложным процентам описывается формулой

$$S = P(1+r)^t, \tag{10}$$

где $(1+r)^t$ – множитель наращения. За год сумма вырастет до $P(1+r)$, за два года – до $P(1+r)^2$ и т. д. Таким образом, вклад растет по закону геометрической прогрессии, нумерацию членов которой удобней начинать не с единицы, а с нуля. Тогда моменту открытия счета $t = 0$ соответствует первый член прогрессии $P_0 = P$, годовой множитель наращения $(1+r)$ будет знаменателем прогрессии. Как видно на рис. 8, суммы, наращенные по простым и сложным процентам, совпадают при $t = 0$ и $t = 1$. При $t \in (0;1)$ сумма, наращенная по простым процентам, больше суммы, наращенной по сложным; при $t > 1$ наоборот. Поэтому банки предпочитают давать краткосрочные кредиты (до года) под простые проценты, а долгосрочные – под сложные.

Пример 77. Леша положил 10 000 руб. в сбербанк под 12 % годовых. Начисление процентов происходит 1 раз в год. Какая сумма будет на счету у Леши через 5 лет? $\boxed{\Omega 110}$

Решение. Через 5 лет на счету будет

$$S = 10\,000 \cdot (1+0.12)^5 = 17\,623.$$

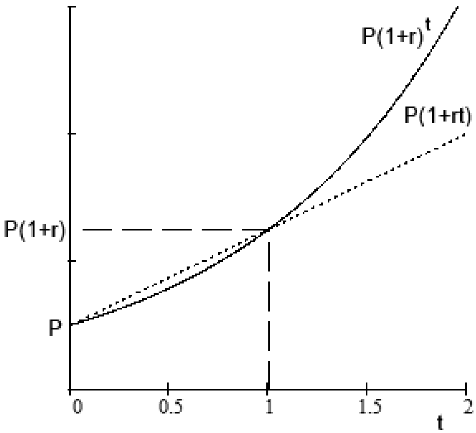

Рис. 8. Начисление по простым и сложным процентам

Ответ: 17 623 руб.

Ω111 **Пример 78.** Земля Манхэттена в настоящее время стоит около 100 млрд дол. «Белые люди»400 лет назад выкупили остров у индейцев за 24 дол. Под какие проценты индейцам надо было положить эти 24 дол. в банк, чтобы сегодня получить 100 млрд?

Решение:

$$24(1+r)^{400} = 10^{11} \Rightarrow r = \left(\frac{10^{11}}{24}\right)^{\frac{1}{400}} - 1 = 0.057.$$

Ответ: 5.7 %.

Задача об изобретателе шахмат (см. с. 40) продемонстрировала, как быстро растет n-й член геометрической прогрессии со знаменателем 2. Оказывается, не так уж медленно растет и n-й член прогрессии со знаменателем 1.057.

В последней задаче мы упростили ситуацию. На самом деле Манхэттен купил в 1626 г. губернатор голландской колонии Питер Минунт за зеркала, стеклянные бусы и другие безделушки общей стоимостью 24 дол.

Начисление по сложным процентам может производиться не только один, но и несколько раз в год: 4 раза (ежеквартально), 12 раз (ежемесячно), практикуют даже ежедневное начисление. Если начисление производится n раз в год, то ставка за период равна $\dfrac{r}{n}$ и формула расчета суммы, наращенной за время t, принимает вид

$$S = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}. \qquad (11)$$

Иначе говоря, значения накопленной суммы образуют геометрическую прогрессию $S_k = P\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{k}$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$ – период начисления, $S_0 = P$ – первый член и $\left(1+\frac{r}{n}\right)$ – знаменатель прогрессии. При одной и той же годовой процентной ставке наибольший рост даст схема, при которой начислений в году больше. Так, если мы положим 100 000 руб. под 12 % годовых, то через 1 год получим, в случае начисления процентов 1 раз в год, 112 000 руб., а в случае ежемесячного начисления – 112 683 руб. Еще заметней станет расхождение через 3 года: 140 493 руб. по первой схеме и 143 077 руб. по второй. Чтобы иметь возможность сравнить разные схемы начисления, введем и для сложных процентов понятие эквивалентных ставок. Пусть r_1 – ставка при начислении процентов 1 раз в год, а r_n – при начислении n раз в год. Будем говорить, что эти ставки эквивалентны, если в конце года обе схемы приведут к одинаковому результату в том смысле, что $r_n \sim r_1 \Rightarrow P(1+r_1) = P\left(1+\frac{r_n}{n}\right)^n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1 = \left(1+\dfrac{r_n}{n}\right)^n - 1; \\ r_n = n\left(\sqrt[n]{1+r_1} - 1\right). \end{cases} \tag{12}$$

$\boxed{\Omega 111}$ **Пример 79.** Гоша хочет открыть счет в банке. Ему предложили на выбор одну из двух схем: $r_2 = 12$ % годовых при начислении процентов 1 раз в полгода или $r_{12} = 11.8$ % годовых при начислении 1 раз в месяц. На каком варианте ему следует остановиться?

Решение:

$r_2 = 12\ \% \ \sim\ r_1 = \left(1+\dfrac{r_2}{2}\right)^2 - 1 = 0.1236 = 12.36\ \%;$

$r_{12} = 11.8\ \% \ \sim\ r_1 = \left(1+\dfrac{r_{12}}{12}\right)^{12} - 1 = 0.1246 = 12.46\ \%.$

Ответ: Гоше следует выбрать вторую схему: 11.8 % годовых при ежемесячном начислении процентов.

А что произойдет, если устремить количество начислений в году к бесконечности? Используя известный предел

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

где $e \approx 2.73$ – постоянная Эйлера, найдем

$$\lim_{n\to\infty} P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = P\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rt} = P\cdot e^{rt}.$$

Мы пришли к еще одному виду процентов – **непрерывным процентам**. Процентную ставку непрерывных процентов называют **силой роста**. Обозначим силу роста греческой буквой ρ. Таким образом, непрерывные проценты начисляются по формуле

$$S = P\cdot e^{\rho t}. \tag{13}$$

Непрерывные проценты часто применяют в математических моделях экономических процессов. Простые и сложные проценты в этом случае можно рассматривать как приближение непрерывных. Действительно,

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{e^{\alpha}-1}{\alpha} = 1 \Rightarrow$ при малых значениях α $e^{\alpha}-1 \approx \alpha$. Тогда:

1) при малых rt $S = P\,(1+e^{rt}-1) \approx P(1+rt)$;
2) при малых r $S = P\,[(1+e^{r}-1)]^{t} \approx P(1+r)^{t}$.

Если не оговорено противное, в дальнейшем, называя процентную ставку, будем подразумевать схему начисления по сложным процентам один раз в год. Для сложных процентов также определена операция дисконтирования, обратная наращению: $S = P(1+r)^t \Rightarrow P = \dfrac{S}{(1+r)^t}$.

$\boxed{\Omega 111}$ **Пример 80.** Гоша расчитывает через 3 года получить 300 000 руб. Какую сумму он может занять сегодня под 21 % годовых, чтобы через 3 года полностью погасить долг?

Решение:

$300\ 000 = P \cdot (1+0.21)^3 \Rightarrow\ P = \dfrac{300\ 000}{(1+0.21)^3} = 169\ 342.$

Ответ: 169 342 руб.

Операция дисконтирования также может проводиться с использованием дисконтной ставки, которая определяется из соотношения $\dfrac{1}{(1+r)^t} = (1-d)^t\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{d} - \dfrac{1}{r} = 1$. В этом случае дисконтная ставка d эквивалентна процентной r: $d \sim r$. В отличие от случая простых процентов, дисконтная ставка по сложным процентам, эквивалентная заданной процентной, не зависит от времени сделки:

$$d \sim r\ \Rightarrow \left(d = \frac{r}{1+r}\right) \& \left(r = \frac{d}{1-d}\right). \tag{14}$$

Когда начисление по процентной ставке r_n выполняется n раз в год, эквивалентные ставки d_n получаются из равенства

$$\frac{1}{\left(1+\frac{r_n}{n}\right)^{nt}} = \left(1 - \frac{d_n}{n}\right)^{nt}\ \Rightarrow\ \frac{1}{d_n} - \frac{1}{r_n} = \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(d_n = \frac{r_n}{1+r_n/n}\right) \& \left(r_n = \frac{d_n}{1-d_n/n}\right). \tag{15}$$

Чтобы получить эквивалентную дисконтную ставку, надо процентную продисконтировать по той же процентной ставке. Чтобы получить эквивалентную процентную ставку, надо дисконтную нарастить по той же дисконтной ставке. Составим таблицу, аналогичную приведенной на с. 71:

Формула	Операция	Ставка
$S = P(1+r)^t$	наращение	процентная
$P = \dfrac{S}{(1+r)^t}$	дисконтирование	процентная
$P = S(1-d)^t$	дисконтирование	дисконтная
$S = \dfrac{P}{(1-d)^t}$	наращение	дисконтная
$S = Pe^{\rho t}$	наращение	непрерывная
$S = Pe^{-\rho t}$	дисконтирование	непрерывная

Пример 81. Процентная ставка при двух начислениях в году $r_2 = 12\ \%$. Найти эквивалентную ей дисконтную ставку для случая четырех начислений в году d_4. $\boxed{\Omega 111}$

Решение. По формулам (12) на с. 78

$$r_1 = \left(1 + \frac{r_2}{2}\right)^2 - 1 = 0.1236,$$

$$r_4 = 4\left(\sqrt[4]{1 + r_1} - 1\right) = 0.1183.$$

Из (15) следует, что $d_4 = \dfrac{4 \cdot r_4}{4 + r_4} = \dfrac{4 \cdot 0.1183}{4 + 0.1183} = 0.1149.$

Ответ: 11.49 %.

Мы последовательно определили $r_2 \sim r_1 \sim r_4 \sim d_4$, но могли бы сразу выразить d_4 через r_2.

$\boxed{\Omega 112}$ **Пример 82.** Известна дисконтная ставка $d_{12} = 11$ % при 12 начислениях в году. Найти эквивалентную ей процентную ставку для случая четырех начислений в году r_4.

Решение:

$$\begin{cases} P = S\left(1 - \dfrac{d_{12}}{12}\right)^{12} \\ S = P\left(1 + \dfrac{r_4}{4}\right)^{4} \end{cases} \Rightarrow \left(1 + \frac{r_4}{4}\right)^4 = \frac{1}{\left(1 - \frac{d_{12}}{12}\right)^{12}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{r_4}{4} = \frac{1}{\left(1 - \frac{d_{12}}{12}\right)^3} \Rightarrow r_4 = 4\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{d_{12}}{12}\right)^3} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_4 = 4\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{0.11}{12}\right)^3} - 1\right) = 0.1120.$$

Ответ: 11.2 %.

Множество эквивалентных ставок **линейно упорядочено**:

$$d_1 < \ldots < d_n < \ldots < \rho < \ldots < r_n < \ldots < r_1.$$

Для непрерывных процентов дисконтная и процентная ставки совпадают и называются силой роста (ρ), при этом

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} d_n = \rho.$$

§ 3.3. Финансовые потоки

$\boxed{74 \Leftrightarrow 95}$ Финансово-банковские операции часто предполагают не только отдельные платежи, но и последовательности платежей, разделенных во времени. Каждый платеж характеризуется денежной суммой и временем. Однако, как правило, для человека «сегодняшний» рубль и «завтрашний» рубль не одно и то же. Поэтому возникает необходимость приведения всех платежей к некоторому заданному моменту времени. Мы ограничимся случаем, когда этот момент – начало сделки, базовый период. В таком случае **приведенное значение потока платежей** называют также **современной стоимостью потока**. Пусть платежи $\{K_1, K_2, \dots K_n\}$ произведены в моменты $\{t_1, t_2, \dots t_n\}$ и соответствие между «сегодняшними» и «завтрашними» деньгами определяется годовой процентной ставкой r. Тогда платеж K_i, произведенный в момент t_i, эквивалентен величине $\dfrac{K_i}{(1+r)^{t_i}}$ в начальный момент. «Завтрашние» деньги дешевле «сегодняшних». Коэффициентами приведения «будущих» денег к базовому периоду являются дисконтные множители, величины u^{t_i}, где $u = \dfrac{1}{1+r}$. **Приведенное значение потока платежей** равно сумме приведенных значений отдельных платежей:

$$P_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{(1+r)^{t_i}} = \sum_{i=1}^{n} u^{t_i} K_i. \tag{16}$$

$\boxed{\Omega 112}$ **Пример 83.** Леша попросил у Гоши взаймы 200 000 руб. У Гоши необходимая сумма находилась на счету в сбербанке под 9 % годовых. Леша обещал расплатиться в течение 5 лет по следующей схеме: 30 000 – руб. через 1 год, 50 000 – через 2 года, 10 000 – через 3 года и последние два года – по 30 000 руб. Следует ли Гоше согласиться на предложенную схему возврата долга?

Решение. Гоше предлагают обменять сумму, приносящую 9%-й годовой доход, на поток платежей:

$$\begin{cases} \{K_i\} = \{30\ 000, 50\ 000, 100\ 000, 30\ 000, 30\ 000\}; \\ \{t_i\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}. \end{cases}$$

$$P_0 = \sum_{t=1}^{5} \frac{K_t}{(1+r)^t} = 30u + 50u^2 + 100u^3 + 30u^4 + 30u^5 =$$

$$= 187.576, \text{ где } u = \frac{1}{1+r} = 0.9174.$$

Таким образом, $P_0 < 200$. Современная стоимость потока платежей меньше 200 тыс. руб., т. е. суммы, с которой Гоше предстояло бы расстаться.

Ответ: Гоша не должен соглашаться с предлагаемой схемой платежей.

$\boxed{\Omega 112}$ **Пример 84.** Леша попросил у Гоши взаймы 200 000 руб. У Гоши необходимая сумма находилась на счету в сбербанке под 9 % годовых. Леша обещал расплатиться в течение 5 лет по следующей схеме: 30 000 руб. – через 1 год, 70 000 – через 2 года, 100 000 – через 3 года, 30 000 – через 4 года и 40 000 руб. – через 5 лет. Следует ли Гоше согласиться на предложенную схему возврата долга?

Решение. Гоше предлагают обменять сумму, приносящую 9%-й годовой доход, на поток платежей:

$$\begin{cases} \{K_i\} = \{30\ 000, 70\ 000, 100\ 000, 30\ 000, 40\ 000\}; \\ \{t_i\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}. \end{cases}$$

$$P_0 = \sum_{t=1}^{5} \frac{K_t}{(1+r)^t} = 30u + 70u^2 + 100u^3 + 30u^4 + 40u^5 =$$

$= 210.909$, где $u = \dfrac{1}{1+r} = 0.9174$.

Таким образом, $P_0 > 200$. Современная стоимость потока платежей больше 200 тыс. руб.

Ответ: с точки зрения современной стоимости потока платежей сделка выгодна Гоше.

Далее рассмотрим поток фиксированных платежей. Для определенности пусть платежи производятся раз в год. Тогда $K_i = K$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и формула (16) принимает вид

$$P_0 = K \sum_{t=1}^{n} u^t = K(u + u^2 + u^3 + \ldots + u^n) = Ku\frac{1-u^n}{1-u}. \quad (17)$$

Пример 85. Леша хочет арендовать сроком на 6 лет помещение под офис, которое ему предложили за 300 000 руб. в год. Причем каждый платеж надо внести в конце года. Он решил оплатить аренду сразу за 6 лет. О какой сумме ему $\boxed{\Omega 113}$

следует договариваться, если обе стороны считают справедливой ставку $r = 12$ % годовых?

Решение:

$$r = 12\ \% = 0.12 \ \Rightarrow \ u = \frac{1}{1+r} = \frac{1}{1+0.12} = 0.8929.$$

Используя формулу (17), приведем поток платежей к моменту заключения договора аренды:

$$P_0 = Ku\frac{1-u^n}{1-u} = 300 \cdot u \cdot \frac{1-u^6}{1-u} = 1\ 233.422.$$

Ответ: Леше следует предложить 1 233 422 руб.

При выводе формул (16),(17) мы исходили из предположения, что платежи совершаются в конце некоторых периодов времени. Такие платежи называют **постнумерандо**. Но так бывает не всегда, и часто деньги требуют вперед. Соответствующие платежи называют **пренумерандо**. Для приведенного значения их потока нам придется внести небольшое изменение в формулу (17):

$$P_0 = K\sum_{t=0}^{n-1} u^t = K(1 + u + u^2 + \ldots + u^{n-1}) = K\frac{1-u^n}{1-u}. \quad (18)$$

$\boxed{\Omega 113}$ **Пример 86.** Леша хочет арендовать сроком на 6 лет помещение под офис, которое ему предложили за 300 000 руб. в год. Причем каждый платеж вносится в начале года.

Он решил оплатить аренду сразу за 6 лет. О какой сумме ему следует договариваться, если обе стороны считают справедливой ставку $r = 12$ % годовых?

Решение:

$r = 12\ \% = 0.12 \Rightarrow u = \dfrac{1}{1+r} = \dfrac{1}{1+0.12} = 0.8929.$

Используя формулу (18), приведем поток платежей к моменту заключения договора аренды:

$$P_0 = K\frac{1-u^n}{1-u} = 300 \cdot \frac{1-u^6}{1-u} = 1\ 381.433.$$

Ответ: Леше следует предложить 1 381 433 руб.

Если платежи могут продолжаться сколь угодно долго, полезно рассматривать бесконечные потоки. Заметим, что

$$1-u = 1-\frac{1}{1+r} = \frac{r}{1+r} \Rightarrow \frac{1}{1-u} = \frac{1+r}{r},\ \frac{u}{1-u} = \frac{1}{r}.$$

В формулах (17), (18) устремим количество платежей n к бесконечности. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} u^n = 0$ и

$$\text{для случая пренумерандо } P_0 = \frac{K(1+r)}{r} = \frac{K}{r} + K; \quad (19)$$

$$\text{для случая постнумерандо } P_0 = \frac{K}{r}. \quad (20)$$

Пример 87. Леше предложили арендовать помещение под офис за 300 000 руб. в год. Причем все платежи надо $\boxed{\Omega 113}$

вносить в конце года. Он хочет сразу выкупить помещение. О какой сумме ему следует договариваться, если обе стороны считают справедливой ставку $r = 12$ % годовых?

Решение. Поток бесконечный постнумерандо.

$$P_0 = \frac{K}{r} = \frac{300}{0.12} = 2\ 500.$$

Ответ: Леше следует предложить 2 500 000 руб.

$\boxed{\Omega 113}$ **Пример 88.** Леше предложили арендовать помещение под офис за 300 000 руб. в год. Причем все платежи надо вносить в начале года. Леша хочет сразу выкупить помещение. О какой сумме ему следует договариваться, если обе стороны считают справедливой процентную ставку $r = 12$ % годовых?

Решение: Поток бесконечный пренумерандо.

$$P_0 = \frac{K}{r} + K = \frac{300}{0.12} + 300 = 2\ 800.$$

Ответ: Леше следует предложить 2 800 000 руб.

Следующий пример финансового потока – инвестиционный процесс. **Инвестиционный процесс** предполагает затраты в начальный момент времени (отрицательный платеж), а затем поток доходов (положительные платежи): суммы $\{K_0, K_1, \ldots K_n\}$ относятся к моментам времени $\{t_0, t_1, \ldots t_n\}$, где $K_0 < 0$ и $K_i \geq 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Для инвестиционного процесса современная стоимость потока определяется так же, как и для потока платежей, по формуле (16), но нумерация начинается с нуля, с момента инвестиции:

$$P_0 = \sum_{i=0}^{n} \frac{K_i}{(1+r)^{t_i}} = \sum_{i=0}^{n} u^{t_i} K_i. \tag{21}$$

Однако значения P_0 не всегда достаточно для принятия правильного решения. Например, если задачу на с. 84 рассматривать как инвестиционный процесс, в начале которого Гоша инвестирует 200 000 руб., то возникает вопрос: 10 909 руб., которые заработал Гоша, – это много или мало? Другая проблема состоит в том, что, инвестировав деньги, Гоша на время теряет право распоряжаться ими. Пока деньги лежали на счету в сбербанке, Гоша в любой момент мог вложить их в более выгодное дело. Теперь нет! Значит, помимо дохода, важно знать, как скоро деньги вернутся к инвестору. Для этого существует такая характеристика инвестиционного процесса, как **период окупаемости**. Рассмотрим последовательность приведенных значений

$$S_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{K_i}{(1+r)^{t_i}}, \text{ где } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Если существует такое k, что $(S_{k-1} < 0)\&(S_k > 0)$, то за период окупаемости инвестиционного процесса принимается значение $T_o = t_k$. Рассмотрим функцию (рис. 9)

$$S(r) = \sum_{i=0}^{n} \frac{K_i}{(1+r)^{t_i}}. \tag{22}$$

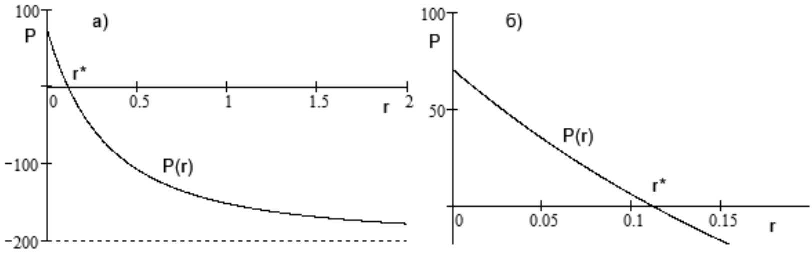

Рис. 9. Современное значение потока как функция r

Следующая важная характеристика потока – внутренняя доходность, которая позволяет выразить доходность инвестиционного процесса в годовых процентах и сравнить его, например, с доходностью ценных бумаг или вкладов в банках. **Внутренняя доходность инвестиционного процесса** находится как решение r^* уравнения $S(r) = 0$, т. е. как такое значение r, при котором для инвестора безразлично, вложить деньги в инвестиционный процесс или поместить их на счет в банке под r годовых процентов. Естественно возникает вопрос: всегда ли уравнение $S(r) = 0$ имеет решение? По смыслу задачи функция $S(r)$ определена на интервале от $[0; +\infty)$ и убывает на этом интервале, поскольку каждое слагаемое $\dfrac{K_i}{(1+r)^{t_i}}$ в формуле (22), где $i = 1, 2, \ldots,$ – убывающая функция. $S(0) = \sum\limits_{i=0}^{n} K_i > 0$, так как в противном случае инвестирование было бы лишено смысла. $\lim\limits_{r\to+\infty} S(r) = K_0 < 0$. Функция $S(r)$ является суммой непрерывных на интервале $[0; +\infty)$ функций и, значит, непрерывна. Таким образом, в области определения существует единственное решение уравнения $S(r) = 0$. Задачу также можно свести к решению уравнения

$$\sum_{i=0}^{n} K_i x^{t_i} = 0, \text{ где } x = \frac{1}{1+r} \in (0; 1].$$

В общем случае подобное уравнение мы будем решать численно, т. е. будем искать приближенное значение r^* с точностью до нужного количество знаков после точки.

Теперь сформулируем условия задачи на с. 84 в терминах инвестиционного процесса.

Пример 89. Гоша инвестировал 200 тыс. руб. в процесс, который даст 30 тыс. руб. дохода через 1 год, 70 тыс. – через 2 года, 100 тыс. – через 3 года, 30 тыс. – через 4 года и 40 тыс. руб. – через 5 лет. Найти современную стоимость, период окупаемости и внутреннюю доходность инвестиционного процесса. $\boxed{\Omega 114}$

Решение. Поток можно представить в виде

$$\begin{cases} \{K_i\} = \{-200, 30, 70, 100, 30, 40\}; \\ \{t_i\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}. \end{cases}$$

Последовательность современных стоимостей

$$\begin{aligned} \{S_i\} = \{&-200.000, -172.477, -113.559, \\ &-36.341, -15.088, 10.909\}, \text{ где } i = 1, 2, \ldots n. \end{aligned}$$

Таким образом, положительное значение S_i появляется только через 5 лет. Это и есть период окупаемости. Современная стоимость потока совпадает с последним членом последовательности $\{S_i\}$, т. е. с $S_5 = 10.909$ тыс. руб. Внутреннюю доходность можно получить только численно как решение r^* уравнения $S(r) = 0$. В соответствии с формулой (22),

$$-200 + \frac{30}{1+r} + \frac{70}{(1+r)^2} + \frac{100}{(1+r)^3} + \frac{30}{(1+r)^4} + \frac{40}{(1+r)^5} = 0.$$

График функции $S(r)$ для данного примера изображен на рис. 9 (с. 90). Значение r^* с точностью до 4 значащих цифр равно $0.1109 = 11.09$ %.

Ответ: современная стоимость инвестиционного процесса $S_5 = 10.909$ тыс. руб., период окупаемости $T_o = 5$ лет, внутренняя доходность $r^* = 11.09$ %.

В совокупности характеристики потока дают следующую картину: Гоша надолго теряет возможность пользоваться своими денежными активами и берет на себя риск. Решение зависит от ставок, предлагаемых банками.

А сейчас займемся реструктуризацией долга.

Пример 90. Леша должен заплатить 100 тыс. руб. в настоящее время и 500 тыс. руб. через 4 года. Но Леша хотел бы реструктурировать долг: выплатить его разом через 2 года (рис. 10). О какой сумме платежа через 2 года имеет смысл договариваться, если обе стороны считают справедливой процентную ставку $r = 11\ \%$ годовых? $\boxed{\Omega 114}$

Решение. В соответствии с условием задачи, 100 тыс. руб.

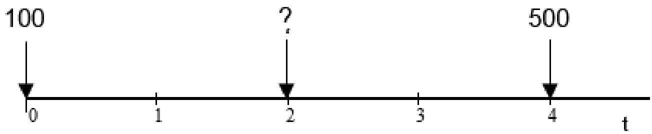

Рис. 10. Схема реструктуризации долга

следует нарастить на 2 года, а 500 тыс. дисконтировать на 2 года. $(1 + r) = 1.11$. Тогда сумма платежа через 2 года должна составить

$$100 \cdot (1 + r)^2 + \frac{500}{(1 + r)^2} = 529.021.$$

Ответ: поток платежей эквивалентен одному платежу на сумму 529 021 руб. через 2 года.

Ω114 **Пример 91.** Гоша положил 10 тыс. руб. на счет в сбербанке. В соответствии с договором ежемесячно в установленный день на текущую сумму счета начисляются проценты. Одновременно в этот же день на счет зачисляется дополнительно 10 тыс. руб. из Гошиной заработной платы. Какая сумма будет на счету через 2 года, если процентная ставка $r = 8\,\%$?

Решение. В течение первого месяца на счету находилась сумма $c_1 = 10$ тыс. руб. Начиная со второго месяца сумма изменяется по формуле $c_k = c_{k-1}q + d$, где $q = 1 + \dfrac{r}{12}$, $d = 10$ и $r = 0.08$. Таким образом, она растет по закону арифметико-геометрической прогрессии. Сумму через два года можно найти непосредственно через рекуррентные отношения для $k = 2, 3, \ldots, 24$, но мы поступим проще, применив первую из формул (1) на с. 57:

$$c_n = \left(c_1 + \frac{d}{q-1}\right) q^{n-1} - \frac{d}{q-1} = 259.332.$$

Ответ: 259 332 руб.

Задачи

$\boxed{83 \Leftrightarrow 116}$

1. Найти шестой член арифметической прогрессии $3.1,\ 3.3,\ 3.5, \dots$. $\boxed{\text{O116}}$

2. Найти пятый член арифметической прогрессии $-2, -1.8, -1.6, \dots$. $\boxed{\text{O116}}$

3. Найти a_1 и d, если известно, что

   (a) $a_5 = 8,\ a_7 = 12.$ $\boxed{\text{O116}}$

   (b) $a_6 = 12,\ a_{10} = 24.$

   (c) $a_{12} = 18,\ a_{20} = 2.$

   (d) $a_{14} = -20,\ a_{18} = 4.$

4. Пятый член арифметической прогрессии равен 2, а сумма четвертого и восьмого равна 6. Найти первый член и разность прогрессии. $\boxed{\text{O116}}$

5. Является ли арифметической прогрессией последовательность, заданная приведенной ниже формулой?

   (a) $a_n = 5 + 3(n + 1).$ $\boxed{\text{O116}}$

   (b) $a_n = n^2 + 2n + 1.$

(c) $a_n = 2n^2 - (n+1)^2 - (n-1)^2$.

(d) $a_n = 2n^2 - (n-1)^2$.

6. При каких x величины a_1, a_2, a_3, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию?

O116 (a) $a_1 = 5;\ a_2 = 3x;\ a_3 = x^2$.

(b) $a_1 = 4 \cdot 3^x;\ a_2 = 10 \cdot 3^x;\ a_3 = 2 \cdot 6^x$.

(c) $a_1 = \sqrt{x};\ a_2 = 5\sqrt[3]{x};\ a_3 = 21\sqrt[6]{x}$.

(d) $a_1 = \sqrt{x-1};\ a_2 = \sqrt{5x-1};\ a_3 = \sqrt{12x+1}$.

(e) $a_1 = \cos^2 x;\ a_2 = 4\sin 2x;\ a_3 = 15\sin^2 x$.

7. Первый член арифметической прогрессии равен 1,
O117 а шестой 21. Найти сумму пяти первых членов.

8. Рабочим, копающим колодец, обещано 30 руб. за первый метр и далее за каждый следующий метр на 20 руб. больше. Сколько получат рабочие за двенадцатимет-
O117 ровый колодец?

9. Рабочим, копающим колодец, обещано по 10 руб. за первый метр и далее за каждый следующий метр каж-
O117 дому на 15 руб. больше. Сколько получат рабочие за двенадцатиметровый колодец, если работу начали

2 рабочих, а затем после прохождения каждых трех метров в бригаду добавляли еще 2 человека?

10. Некто торгует лошадьми, и каждая имеет свою цену. Наихудшая стоит 4 золотых, наилучшая – 55 золотых, и цена от одной до другой лошади возрастает на 3 золотых. Сколько всего было лошадей? O117

11. Турист за первый час подъема взобрался на высоту 200 м, а за каждый следующий час – на 10 м меньше, чем за предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты 1 050 м? O117

12. Царь повелел установить трон на возвышенности и подвести к нему мраморную лестницу. Ступеней должно быть 10, шаг лестницы 29 см, высота ступени 16 см, а ширина лестницы 300 см. Какой объем мрамора потребуется для строительства лестницы? O117

13. Царь повелел установить трон на возвышенности и подвести к нему мраморную лестницу: шаг лестницы 29 см, высота ступени 16 см, а ширина лестницы 300 см. В запасе имелось 2.9232 м^3 мрамора. На сколько ступеней хватит мрамора? O117

14. Пусть $a_1 = 2,\ a_6 = 17$. Найти S_4. O117

15. Вычислить $8 + 11 + 14 + \ldots + 38$. O117

O117 16. Из равенства $1 + 4 + 7 + \ldots + x = 176$ найти x.

O117 17. Найти S_9, если $a_5 = 8$.

18. Найти сумму пятнадцати первых членов арифметиче-
O117 ской прогрессии, если $a_4 + a_5 + a_7 + a_{16} = 32$.

19. Найти сумму 120 первых членов арифметической прогрессии, если
O117 $a_{20} + a_{30} + a_{47} + a_{55} + a_{66} + a_{74} + a_{91} + a_{101} = 756$.

20. В отделе работают 5 служащих: секретарь, инженер, младший научный сотрудник, старший научный сотрудник и начальник отдела. На отдел выделили премию в размере 40 тыс. руб. и решили разделить ее так, чтобы каждый служащий, начиная со второго, получил на 3 тыс. больше предыдущего. Сколько
O117 в таком случае получит каждый?

21. Сумма первых девяти членов арифметической прогрес-
O117 сии равна 81. Найти пятый член прогрессии.

22. Найти сумму членов арифметической прогрессии с десятого по двадцатый, если первый член равен 2,
O117 а разность 5.

23. Отношение суммы членов арифметической прогрессии с пятого по двенадцатый к сумме первых восьми

равно 2, а разность первого члена и разности прогрессии равна 3. Найти первый член и разность прогрессии. $\boxed{\text{O117}}$

24. Доказать, что для любой арифметической прогрессии справедливо равенство $S_{15} = 3(S_{10} - S_5)$. $\boxed{\text{O118}}$

25. Пусть $a_1 = 1$ и d – целое четное число. При каких n имеет место равенство $S_n = n^3$? $\boxed{\text{O118}}$

26. Могут ли числа $\sqrt{3}$, $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$ и $5\sqrt{2} + \sqrt{3}$ быть членами арифметической прогрессии? $\boxed{\text{O118}}$

27. Могут ли числа $\sqrt{5}$, 10 и $10\sqrt{5}$ быть членами арифметической прогрессии? $\boxed{\text{O118}}$

28. Найти количество двузначных натуральных чисел, кратных 6. $\boxed{\text{O118}}$

29. Найти сумму всех положительных трехзначных натуральных чисел, делящихся на 13. $\boxed{\text{O118}}$

30. Найти сумму всех четных трехзначных натуральных чисел, кратных 3. $\boxed{\text{O118}}$

31. Найти сумму всех целых чисел, делящихся без остатка на 11 и удовлетворяющих условию $-44 < k \leq 165$. $\boxed{\text{O118}}$

32. Между первым и вторым членами арифметической прогрессии, разность которой равна 72, поместили 8 чисел так, чтобы все 10 чисел стали членами некоторой арифметической прогрессии. Чему равна разность этой прогрессии?

О118

33. Между первым и вторым членами арифметической прогрессии, разность которой равна 14, поместили 6 чисел так, чтобы все 8 чисел стали членами некоторой прогрессии. Чему равна разность этой прогрессии?

О118

34. Найти сумму общих членов арифметических прогрессий $\{7, 9, \ldots, 37\}$ и $\{8, 11, \ldots, 44\}$.

О118

35. Найти наибольшее значение суммы n членов арифметической прогрессии, первый член которой равен 12, а второй 9.

О118

36. Внутренние углы некоторого многоугольника, наименьший из которых 120^o, образуют арифметическую прогрессию с разностью 5^o. Сколько сторон может иметь этот многоугольник?

О118

37. Углы восьмиугольника образуют нестационарную арифметическую прогрессию. Какие значения может иметь наименьший угол?

О118

38. При каких a уравнение $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ имеет 4 вещественных корня, которые образуют арифметическую прогрессию? $\boxed{\text{O118}}$

39. При каких a корни уравнения $x^4 - 10x^2 + a = 0$ образуют арифметическую прогрессию? $\boxed{\text{O118}}$

40. Решить уравнение $\dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x-2}{x} + \dfrac{x-3}{x} + \ldots + \dfrac{1}{x} = 3$, где x – целое число. $\boxed{\text{O118}}$

41. В соревновании по волейболу участвовало n команд. Каждая команда играла со всеми остальными по одному разу. За каждую игру победившей команде начислялся 1 балл. По окончании соревнований оказалось, что набранные командами очки, расположенные по возрастанию, образуют арифметическую прогрессию. Найти первый член и разность этой прогрессии. $\boxed{\text{O118}}$

42. Первый член арифметической прогрессии $a_1 = 3$, последний $a_n = 39$, а разность $d = 4$.
Найти $\dfrac{1}{a_1a_2} + \dfrac{1}{a_2a_3} + \ldots + \dfrac{1}{a_{n-1}a_n}$. $\boxed{\text{O119}}$

43. Доказать, что величины $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{c+a}, \dfrac{1}{b+a}$ образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда величины a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию. $\boxed{\text{O119}}$

44. Найти знаменатель геометрической прогрессии:

O119 (a) $2, 6, 18, \ldots$.

(b) $3, 12, 48, \ldots$.

(c) $-2, 10, -50, \ldots$.

(d) $1, 7, 12, \ldots$.

45. Сумма второго и четвертого членов геометрической прогрессии равна 30, а их произведение 144. Найти
O119 первый член и знаменатель.

46. Произведение второго и седьмого членов геометрической прогрессии равно 2. Найти произведение первых
O119 восьми членов.

47. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии
O119 равна 351, а сумма следующих трех 13. Найти b_1 и q.

48. Найти 4 числа, образующих геометрическую прогрессию, если третье на 9 больше первого, а второе больше
O119 четвертого на 18.

49. В геометрической прогрессии $b_1 = 1280$, $b_4 = 160$. Начиная с какого номера члены прогрессии не превы-
O119 шают $\dfrac{5}{128}$?

50. Найти знаменатель и первый член геометрической прогрессии, произведение первых трех членов которой равно 1000, а сумма их квадратов 525. O119

51. Произведение трех последовательных членов геометрической прогрессии равно 1 728, а их сумма 63. Найти первый член и знаменатель прогрессии. O119

52. Является ли геометрической прогрессией последовательность, заданная приведенной ниже формулой? Если да, укажите первый член и знаменатель.

    (a) $b_n = 2 \cdot 5^n - 2 \cdot 5^{n-2}$. O119

    (b) $b_n = 2n + 7$.

    (c) $b_n = 4^{n+1} - 5 \cdot 4^n$.

    (d) $b_n = 7^{n+1} - 52 \cdot 7^n + 7$.

53. Даны арифметическая $\{a_n\}$ и нестационарная геометрическая $\{b_n\}$ прогрессии. Известно, что $a_2 + b_2 = -2$, $a_3 + b_3 = 1$ и $a_4 + b_4 = 4$. Найти разность арифметической прогрессии. O119

54. Числа b_1, b_2, b_3 образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Если из первого числа вычесть 4, то полученный набор чисел образует арифметическую про-

грессию: a_1, a_2, a_3. Причем $a_1 + a_2 + a_3 = 9$. Найти b_1
O119 и знаменатель прогрессии q.

55. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если от третьего отнять 4, то числа образуют арифметическую прогрессию. Если от второго и третьего членов полученной арифметической прогрессии отнять по 1, то снова получится геометрическая прогрессия. Найти
O120 b_1 и q исходной прогрессии.

56. Первый член геометрической прогрессии $b_1 = 2$, зна-
O120 менатель $q = 3$. Найти сумму первых десяти членов.

57. В геометрической прогрессии с четным числом положительных членов сумма всех ее членов в 3 раза больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Найти
O120 знаменатель прогрессии.

58. Бригада рабочих копала колодец глубиной 5 м. После каждого пройденного метра в бригаду добавляли одного рабочего и плату за следующий метр на каждого рабочего увеличивали в 3 раза. Сколько придется заплатить бригаде, если первый метр выкопал один ра-
O120 бочий и получил за него 100 руб.?

59. При каких k величины $2k - 1$, $2k + 1$, $9k$ и $k + 26$ являются четырьмя последовательными членами гео-
O120 метрической прогрессии?

60. При каких t числа 2, $t+3$ и $2t+22$ являются последовательными членами геометрической прогрессии? $\boxed{\text{O120}}$

61. Сумма первого и второго членов геометрической прогрессии равна 9, а сумма второго и третьего 18. Сумма первых n членов прогрессии 189. Найти n. $\boxed{\text{O120}}$

62. Вставьте два числа между 27 и 8 так, чтобы получилась геометрическая прогрессия. $\boxed{\text{O120}}$

63. Вставьте три числа между 2 и 18 так, чтобы получилась геометрическая прогрессия. $\boxed{\text{O120}}$

64. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если ее первый член равен 2, а знаменатель $\frac{1}{3}$. $\boxed{\text{O120}}$

65. Дан квадрат со стороной 128. Середины его сторон являются вершинами второго квадрата, а середины сторон второго – вершинами третьего и т. д. Найти сторону седьмого квадрата. $\boxed{\text{O120}}$

66. Наименьший угол четырехугольника равен 9^o. Причем его углы, расположенные в порядке возрастания, образуют геометрическую прогрессию. Найти знаменатель этой прогрессии. $\boxed{\text{O120}}$

67. Найти сумму первых трех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма всех ее
O120 членов равна 1 024, а сумма первых десяти 1 023.

68. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов 192. Най-
O120 ти первый член и знаменатель.

69. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если ее первый член равен 1, а каждый следующий, начиная со второго, в $\dfrac{13}{6}$ раза меньше сум-
O120 мы предыдущего и последующего.

70. Найти знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма которой равна 1.6, а второй
O120 член (-0.5).

71. Найти наименьшее число членов геометрической прогрессии $\{8, 7, \frac{49}{8} \ldots\}$, такое, чтобы их сумма отличалась
O120 от суммы всей прогрессии менее чем на 0.01.

72. Могут ли следующие числа быть членами (не обязательно последовательными) геометрической прогрессии:

O120 (a) $\frac{2}{3},\ \frac{2}{27},\ \frac{2}{2187}$;

(b) $2,\ \sqrt{3},\ 8$;

(c) $6,\ 48,\ 192$?

73. Первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии равен 1, а сумма кубов ее членов 27. Найти сумму членов прогрессии. O120

74. При каких значениях параметра a корни уравнений $x^2 - 5x + 4$ и $2x = a$, взятые в определенном порядке, образуют геометрическую прогрессию? O120

75. Доказать, что при любом значении параметра a корни уравнения $x^3 - 7ax^2 + 14a^2x - 8a^3 = 0$ образуют геометрическую прогрессию. O121

76. Найти все четырехзначные натуральные числа, цифры которых образуют нестационарную геометрическую прогрессию. O121

77. Первый член геометрической прогрессии равен 3, а знаменатель 2. Найти произведение первых шести членов прогрессии. O121

78. Образуют ли числа арифметико-геометрическую прогрессию? Если да, указать ее разность и знаменатель.

    (a) $3, 11, 27, 59, 123, \ldots;$ O121

    (b) $-2, 2, 7, 19, 43, \ldots;$

    (c) $-2, 1, 7, 19, 44, \ldots;$

(d) $-2, 10, -26, 82, -242, \ldots$.

79. Найти четвертый член арифметико-геометрической прогрессии, первый член которой $c_1 = 5$, разность $d = -2$ и знаменатель $q = -3$.

O121

80. Найти сумму первых шести членов прогрессии, первый член которой $c_1 = 3$, $d = 3$ и $q = 2$.

O121

81. Дан остроугольный треугольник $A_1B_1C_1$, вписаный в некоторую окружность. Касательные к окружности, проведенные в точках A_1, B_1, C_1, образуют треугольник A_2, B_2, C_2. Если около треугольника A_2, B_2, C_2 описать окружность, касательные к ней, проведенные в точках A_2, B_2, C_2, образуют треугольник A_3, B_3, C_3 и т. д. При этом считаем, что A_n принадлежит отрезку $B_{n+1}C_{n+1}$, B_n – отрезку $A_{n+1}C_{n+1}$ и C_n – отрезку $A_{n+1}B_{n+1}$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \angle A_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \angle B_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \angle C_n$.

O121

82. Углы восьмиугольника образуют арифметико-геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 2$. Найти все углы восьмиугольника, если наибольший угол равен 170^o.

O121

83. Определить время сделки по схемам 365/365, 365/360 и 360/360, если кредит выдан:

O121

(a) 12 марта 2016 г. до 1 сентября 2016 г.;

(b) 3 февраля 2016 г. до 5 мая 2016 г.;

(c) 25 декабря 2015 г. до 14 августа 2016 г.

84. Какую сумму получит кредитор в конце сделки, если время считать по схемам 365/365, 365/360 и 360/360, а выдано под 22 % годовых 100 тыс. руб. на время:

    (a) с 12 марта 2016 г. до 1 сентября 2016 г.; O121

    (b) с 3 февраля 2016 г. до 5 мая 2016 г.;

    (c) с 25 декабря 2015 г. до 14 августа 2016 г.?

85. 20 декабря 2016 г. Леша получит 300 тыс. руб. На какую сумму он может взять 5 мая 2016 г. кредит под 20 % годовых, чтобы 20 декабря 2016 г. полностью погасить долг (время считать по схеме 360/360)? O121

86. Найти эквивалентную учетную ставку, если процентная ставка:

    (a) $r = 17$ % и время сделки $t = 0.2$; O121

    (b) $r = 16$ % и время сделки $t = 0.8$;

    (c) $r = 18$ % и время сделки $t = 0.4$.

87. Найти эквивалентную процентную ставку, если учетная ставка:

O122 (a) $d = 13$ % и время сделки $t = 0.9$;

(b) $d = 12$ % и время сделки $t = 0.2$;

(c) $d = 16$ % и время сделки $t = 0.5$.

88. Леше не хватило 500 000 руб. для покупки оборудования, и продавец Гоша согласился принять от него вексель по учетной ставке 16 % годовых. Леша обязался заплатить предъявителю данного векселя некоторую сумму 12 декабря 2016 г. Какая сумма должна быть проставлена на векселе, если вексель выписан 15 февраля 2016 г.? 10 июля 2016 г. Гоше понадобились деньги, и один коммерческий банк согласился учесть вексель по учетной ставке 15 % годовых. Какую сумму
O122 получит на руки Гоша?

89. За какое время сумма денег, ссуженная под 25 простых
O122 годовых процентов, увеличится на 50 %?

90. Сумму P положили на счет в банке под r процентов годовых. Какая сумма будет на счету через t лет?

O122 (a) $P = 30\ 000$ руб., $r = 15$ % и $t = 3$;

(b) $P = 100\ 000$ руб., $r = 10$ % и $t = 5$;

(c) $P = 10\ 000$ руб., $r = 20$ % и $t = 7$.

91. Под какие проценты надо положить на счет в банке сумму P, чтобы через t лет получить сумму S:

    (a) $P = 10\ 000$ руб., $t = 5$ и $S = 20\ 000$ руб.; O122

    (b) $P = 1$ коп., $t = 200$ и $S = 1\ 000\ 000$ руб.;

    (c) $P = 50\ 000$ руб., $t = 10$ и $S = 250\ 000$ руб.?

92. В банке предложили на выбор одну из двух схем начисления сложных процентов. Какая из них даст наибольший доход к концу года, если:

    (a) $z_4 = 13$ % или $z_{12} = 12.5$ %; O122

    (b) $z_2 = 20$ % или $z_4 = 19.6$ %;

    (c) $z_3 = 25$ % или $z_{12} = 24.5$ %?

93. Какую сумму P можно занять сегодня под r годовых процентов, чтобы через t лет вернуть S руб., если:

    (a) $S = 100\ 000$, $r = 14$ % и $t = 3$; O123

    (b) $S = 200\ 000$, $r = 20$ % и $t = 5$;

    (c) $S = 15\ 000$, $r = 22$ % и $t = 2$.

94. Процентная ставка при n начислениях в году равна r_n годовых процентов. Найти эквивалентную ей дисконтную ставку d_m при m начислениях в год, если:

O123 (a) $r_4 = 16$ % и $m = 12$;

(b) $r_4 = 20$ % и $m = 2$;

(c) $r_{12} = 18$ % и $m = 4$.

95. Дисконтная ставка при n начислениях в году равна d_n годовых процентов. Найти эквивалентную ей процентную ставку r_m при m начислениях в год, если:

O123 (a) $d_4 = 13$ % и $m = 6$;

(b) $d_{12} = 20$ % и $m = 4$;

(c) $d_6 = 18$ % и $m = 4$.

96. Найти современную стоимость потока платежей, если поток характеризуется значениями:

O123

(a) $\begin{cases} \{K_i\} = \{10, 20, 30, 40, 50\} \\ \{t_i\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \end{cases}$ и $r = 12$ %;

(b) $\begin{cases} \{K_i\} = \{5, 5, 20, 20, 40\} \\ \{t_i\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \end{cases}$ и $r = 15$ %;

(c) $\begin{cases} \{K_i\} = \{3, 5, 10, 20, 40, 60\} \\ \{t_i\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \end{cases}$ и $r = 20$ %.

97. Найти современную стоимость потока постоянных платежей, если:

    (a) платежи постнумерандо 250 000 руб. в год, $r = 12$ % и $t = 5$ лет; O123

    (b) платежи пренумерандо 100 000 руб. в год, $r = 15$ % и $t = 4$ года;

    (c) платежи постнумерандо 500 000 руб. в год, $r = 10$ % и $t = 7$ лет;

    (d) платежи пренумерандо 400 000 руб. в год, $r = 18$ % и $t = 10$ лет.

98. Найти современную стоимость бесконечного потока постоянных платежей, если:

    (a) платежи постнумерандо 250 000 руб. в год, $r = 12$ %; O123

    (b) платежи пренумерандо 100 000 руб. в год, $r = 15$ %;

    (c) платежи постнумерандо 500 000 руб. в год, $r = 10$ %;

    (d) платежи пренумерандо 400 000 руб. в год, $r = 18$ %.

99. Найти современную стоимость, период окупаемости и внутреннюю доходность инвестиционного процесса:

O123

(a) $\begin{cases} \{K_i\} = \{-60, 10, 20, 30, 40, 50\} \\ \{t_i\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \end{cases}$ и $r = 12$ %;

(b) $\begin{cases} \{K_i\} = \{-40, 5, 5, 20, 20, 40\} \\ \{t_i\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \end{cases}$ и $r = 15$ %;

(c) $\begin{cases} \{K_i\} = \{-40, 3, 5, 10, 20, 40, 60\} \\ \{t_i\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \end{cases}$ и $r = 20$ %.

100. Заменить поток платежей $\{K_i\} = \{300, 400, 500\}$, $\{t_i\} = \{3, 6, 10\}$ одним платежом, приведенным к моменту $t^* = 8$, если обе стороны признают справедливой

O124 годовую ставку $r = 20$ %.

101. Гоша положил c_1 тыс. руб. на счет в сбербанке. В соответствии с договором ежемесячно в установленный день на текущее состояние счета начисляются проценты. Одновременно в этот же день на счет зачисляется дополнительно d тыс. руб. из Гошиной заработной платы. Какая сумма будет на счету через t лет при годовой процентной ставке r, если:

O124 (a) $c_1 = 20$, $d = 10$, $t = 6$ и $r = 10$ %;

(b) $c_1 = 30$, $d = 15$, $t = 3$ и $r = 6$ %;

(c) $c_1 = 5$, $d = 20$, $t = 4$ и $r = 8$ %;

(d) $c_1 = 5$, $d = 5$, $t = 2$ и $r = 4$ %?

102. Основные средства предприятия, т. е. средства труда, участвующие в производственном процессе, на начало первого года работы предприятия составляли $P_1 = 1\ 000$ тыс. руб. Коэффициент износа основных средств равен $r = 10$ %, т. е. за год эксплуатации начальная сумма P_t уменьшается до $0.9 \cdot P_t$. В конце каждого года в обновление основных средств предприятие вкладывало $d = 80$ тыс. руб. Как изменялась стоимость основных средств в течение 5 лет? O124

Ответы

95⇔125

№ – номер задачи,

З – номер страницы с заданием,

П – номер страницы с похожим примером,

Т – номер страницы соответствующего раздела теории.

№	Ответ	З	П	Т
1	4.1	95	14	7
2	-1.2	95	14	7
3a	$a_1 = 0,\ d = 2$	95	14	7
3b	$a_1 = -3,\ d = 3$	95	14	7
3c	$a_1 = 40,\ d = -2$	95	14	7
3d	$a_1 = -98,\ d = 6$	95	14	7
4	$a_1 = -2,\ d = 1$	95	15	7
5a	Прогрессия: $a_1 = 11,\ d = 3$	95	15	7
5b	Не является	95	15	7
5c	Прогрессия: $a_1 = -2,\ d = 0$	96	15	7
5d	Не является	96	15	7
6a	При $x = 1$ и $x = 5$	96	16	8
6b	При $x = 3$	96	16	8
6c	При $x = 729$, $x = 117\,649$, а также $x = 0$ (стационарная прогрессия)	96	16	8

№	Ответ	З	П	Т
6d	При $x = 2$ и $x = 10$	96	16	8
6e	При $\left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = arcctg(15) + \pi k, \end{array} \right.$ где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	96	16	8
7	45	96	16	9
8	1 680 руб.	96	17	9
9	6 900 руб.	96	17	9
10	18 лошадей	97	18	9
11	За 6 ч	97	18	9
12	6.264 м^3	97	20	9
13	6 ступеней	97	20	9
14	26	97	20	9
15	253	97	21	9
16	$x = 31$	98	21	9
17	72	98	21	9
18	120	98	21	9
19	11 340	98	21	9
20	$2, 5, 8, 11$ и 14	98	21	9
21	9	98	22	7
22	792	98	22	7
23	$a_1 = -3$ и $d = -6$	98	23	7

№	Ответ	З	П	Т
24	Для доказательства достаточно в исходном равенстве для $n = 5, 10, 15$ заменить S_n на $\frac{2a_1 + (n-1)d}{2}n$ и привести подобные	99	23	7
25	При $n = 1$ и, если $d \geq 4$, при $n = \frac{d}{2} - 1$	99	24	7
26	Например, первый, третий и шестой члены прогрессии с $a_1 = \sqrt{3}$ и $d = \sqrt{2}$	99	24	7
27	Не могут	99	24	7
28	15	99	26	7
29	37 674	99	26	7
30	82 350	99	26	7
31	1 254	99	26	7
32	8	100	28	7
33	2	100	28	7
34	156	100	28	7
35	30	100	16	7
36	9 или 16	100	21	7
37	Любое значение из интервала $(0^o; 135^o)$	100	21	7
38	При $a = -\frac{10}{3}$	100	29	7
39	При $a = \pm 3$	101	29	7
40	7	101	31	7
41	$a_1 = 0$ и $d = 1$	101	20	7

№	Ответ	З	П	Т
42	$\dfrac{1}{13}$	101	31	7
43	Используйте свойство: $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$	101	31	7
44a	3	102	36	32
44b	4	102	36	32
44c	-5	102	36	32
44d	Последовательность не является геометрической прогрессией	102	36	32
45	$b_1 = -3,\ q = -2;\ b_1 = 3,\ q = 2;$ $b_1 = -48,\ q = -\frac{1}{2};\ b_1 = 48,\ q = \frac{1}{2}$	102	38	32
46	16	102	38	32
47	$b_1 = 243,\ q = \frac{1}{3}$	102	38	32
48	$\{3, -6, 12, -24\}$	102	38	32
49	Начиная с номера 16	102	38	32
50	$b_1 = -20,\ q = -\frac{1}{2};\quad b_1 = -5,\ q = -2;$ $b_1 = 20,\ q = \frac{1}{2};\quad b_1 = 5,\ q = 2$	103	38	32
51	$b_1 = 48,\ q = \frac{1}{4};\quad b_1 = 3,\ q = 4$	103	38	32
52a	Да: $b_1 = \frac{48}{5},\ q = 5$	103	39	32
52b	Нет	103	39	32
52c	Да: $b_1 = -4,\ q = 4$	103	39	32
52d	Нет	103	39	32
53	Разность $d = 3$	103	39	33
54	$b_1 = 1,\quad q = 3$	103	39	33

№	Ответ	З	П	Т
55	$b_1 = 1, \quad q = 3$ и $b_1 = \frac{1}{9}, \quad q = 7$	104	39	33
56	59 048	104	40	33
57	$q = 2$	104	42	33
58	54 700 руб.	104	42	33
59	$k = 1$	104	44	33
60	$t = -7$ и $t = 5$	105	44	33
61	$n = 6$	105	44	33
62	$\{27, 18, 12, 8\}$	105	45	33
63	$\{2, \ \pm 2\sqrt{3}, \ 6, 6 \pm \sqrt{3}, \ 18\}$	105	45	33
64	3	105	45	34
65	16	105	46	33
66	3	105	46	33
67	896	105	48	34
68	$b_1 = 6, \quad q = -\frac{1}{2}$	106	48	34
69	3	106	48	34
70	$-\frac{1}{4}$	106	48	34
71	66	106	48	34
72a	Да	106	51	32
72b	Нет	106	51	32
72c	Да	106	51	32
73	$3\left(9 + 3\sqrt[3]{26} + \sqrt[3]{26^2}\right) \approx 79.992$	107	52	35
74	$\frac{1}{2}, \ \pm 4$ и 32	107	52	33

№	Ответ	З	П	Т
75	$x^3 - 7ax^2 + 14a^2x - 8a^3 =$ $= (x-a)(x-2a)(x-4a)$	107	53	33
76	1 248 и 8 421	107	53	32
77	23 887 872	107	54	36
78a	Да: $d = 5$; $q = 2$	107	55	55
78b	Нет	107	56	55
78c	Нет	107	56	55
78d	Да: $d = 4$; $q = -3$	108	55	55
79	-149	108	57	57
80	360	108	58	57
81	$\lim\limits_{n\to\infty} \angle A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \angle B_n = \lim\limits_{n\to\infty} \angle C_n = 60^o$	108	59	57
82	$\left\{\frac{95\ 170^o}{769}, \frac{95\ 450^o}{769}, \frac{96\ 010^o}{769}, \frac{97\ 130^o}{769},\right.$ $\left.\frac{99\ 370^o}{769}, \frac{103\ 850^o}{769}, \frac{112\ 810^o}{769}, 170\right\}$	108	63	57
83a	0.474, 0.481, 0.472	108	68	65
83b	0.252, 0.256, 0.253	109	68	65
83c	0.638, 0.647, 0.639	109	68	65
84a	110 427, 110 572, 110 389 (руб.)	109	68	65
84b	105 545, 105 622, 105 561 (руб.)	109	68	65
84c	114 044, 114 239, 114 056 (руб.)	109	68	65
85	266 535 руб.	109	69	65
86a	16.4 %	109	72	71

№	Ответ	З	П	Т
86b	14.2 %	109	72	71
86c	16.8 %	109	72	71
87a	14.7 %	110	72	71
87b	12.3 %	110	72	71
87c	17.4 %	110	72	71
88	На векселе следует указать сумму 575 742 руб., а банк 10 июля учтет вексель за 539 039 руб.	110	72	71
89	За 2 года	110	74	65
90a	45 626 руб.	110	75	74
90b	161 051 руб.	110	75	74
90c	35 832 руб.	110	75	74
91a	14.9 %	111	76	74
91b	9.6 %	111	76	74
91c	17.5 %	111	76	74
92a	$\begin{cases} r_4 = 13\ \% \sim r_1 = 13.6\ \% \\ r_{12} = 12.5\ \% \sim r_1 = 13.2\ \% \end{cases}$ – первая	111	78	74
92b	$\begin{cases} r_2 = 20\ \% \sim r_1 = 21\ \% \\ r_4 = 19.6\ \% \sim r_1 = 21.1\ \% \end{cases}$ – вторая	111	78	74
92c	$\begin{cases} r_3 = 25\ \% \sim r_1 = 27.1\ \% \\ r_{12} = 24.5\ \% \sim r_1 = 27.4\ \% \end{cases}$ – вторая	111	78	74

№	Ответ	З	П	Т
93a	67 497 руб.	111	80	74
93b	80 376 руб.	111	80	74
93c	10 078 руб.	111	80	74
94a	$d_{12} = 15.6$ %	112	81	74
94b	$d_2 = 18.6$ %	112	81	74
94c	$d_4 = 17.5$ %	112	81	74
95a	$r_6 = 13.4$ %	112	82	74
95b	$r_4 = 20.7$ %	112	82	74
95c	$r_4 = 18.7$ %	112	82	74
96a	100.018	112	84	83
96b	52.601	112	84	83
96c	57.573	112	84	83
97a	901 194 руб.	113	86	83
97b	328 323 руб.	113	85	83
97c	2 434 209 руб.	113	86	83
97d	2 121 209 руб.	113	85	83
98a	2 083 333 руб.	113	88	83
98b	766 667 руб.	113	87	83
98c	5 000 000 руб.	113	88	83
98d	2 622 222 руб.	113	87	83
99a	$P_0 = 40.018$, $T_o = 4$ года и $r^* = 30.4$ %	114	91	83
99b	$P_0 = 12.018$, $T_o = 5$ лет и $r^* = 23.9$ %	114	91	83

№	Ответ	З	П	Т
99c	$P_0 = 17.573$, $T_o = 6$ лет и $r^* = 30$ %	114	91	83
100	1 669.718	114	93	83
101a	999 139 руб.	114	94	55
101b	607 902 руб.	115	94	55
101c	1 106 500 руб.	115	94	55
101d	124 714 руб.	115	94	55
102	1 000, 980, 962, 945.8, 931.22 (тыс. руб.)	115	94	83

Биографические справки

$\boxed{116 \Leftrightarrow 128}$

1. Ариабхата (476–550) – выдающийся индийский астроном и математик. В дошедшем до нас его сочинении «Ариабхатия» изложены расчеты движения планет, лунных и солнечных затмений, с большой точностью указываются размеры Земли и Луны, излагается система счисления, таблица синусов, описывается процесс извлечения квадратного и кубического корней, решаются задачи, основанные на теореме Пифагора. Все результаты изложены чрезвычайно кратко в стихотворной форме.

2. Архимед (287–212 г. до н. э.) – древнегреческий математик, физик и инженер. Автор ряда открытий и изобретений: известного из школьного курса физики закона Архимеда, мощных метательных машин, поражавших римских воинов тяжелыми камнями при осаде Сиракуз.

3. Гипсикл Александрийский (190–120 гг. до н. э.) – древнегреческий математик и астроном, автор книги о многоугольных числах. Распространил в Греции вавилонскую традицию делить полный угол на 360^o.

4. Диофант Александрийский (III в. н. э.) – греческий математик, автор тринадцатикнижия «Арифметика», посвященного решению алгебраических уравнений, трактата «О многоугольных числах» и труда «Об измерении

поверхностей». В настоящее время термин «диофантовы уравнения» закрепился за алгебраическими уравнениями с целыми коэффициентами, решения которых ищут среди целых чисел.

5. Кардано Джероламо (1501–1576) – итальянский математик, инженер, философ, медик и астролог; закончил Падуанский университет. В свое время был известен как один из лучших врачей Европы. Его имя носит формула для нахождения корней кубического уравнения и карданный вал.

6. Паскаль Блез (1623–1662) – французский математик, механик, физик, философ и литератор. Все науки постигал самостоятельно. Внес значительный вклад в формирование математического анализа, теории вероятностей и проективной геометрии, создал первую механическую суммирующую машину.

7. Пачоли Лука (1445–1517) – итальянский математик, один из основоположников современной бухгалтерии. В Венеции посещал лекции знаменитого тогда математика Доменико Бригадино. Автор руководства по венецианской двойной бухгалтерии.

8. Ферма Пьер (1601–1665) – французский математик. Внес значительный вклад в математический анализ, теорию вероятностей и теорию чисел. Получил юридическое образование в Тулузе, а затем продолжил обучение в Бордо и Орлеане, что позволило ему сделать успешную карьеру

на государственной службе.

9. Фибоначчи Леонардо (1170–1250) – итальянский математик, известный также под именем Леонардо Пизанский, автор ряда математических трактатов. Математику изучал у арабских учителей в Алжире, где его отец часто бывал по торговым делам. Работы Фибоначчи способствовали распространению в Европе позиционной системы счисления. Большую известнось получила построенная им последовательность, впоследствии названная рядом Фибоначчи.

10. Эйлер Леонард (1707–1783) – швейцарский, немецкий и российский математик и механик, автор более 850 научных работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории числел, приближенным вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, воздухоплаванию, кораблестроению, кораблевождению, теории музыки, медицине и другим наукам. Академик Петербургской, Берлинской, Парижской и ряда других академий наук. Более 30 лет работал в России, внес значительный вклад в подготовку кадров для российской науки, образования, армии и промышленности.

11. Эратосфен Киренский (276–194 гг. до н. э.) – древнегреческий математик, астроном, географ, филолог и поэт. Возглавлял Александрийскую библиотеку.

Список литературы

125⇐

1. Баврин И. И. Старинные задачи: книга для учащихся / И. И. Баврин, Е. А. Фрибус. – Москва : Просвещение, 1994. – 128 с.

2. Белл Э. Т. Творцы математики: Предшественники современной математики / Э. Т. Белл. – Москва : Просвещение, 1979. – 256 с.

3. Бобынин В. В. Очерки исторіи развитія физико-математическихъ знаній въ России. XVII столетіе / В. В. Бобынин. – Москва, 1888. – 126 с.

4. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – Москва : Наука, 1986. – 544 с.

5. Ван дер Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции / Б. Л. Ван дер Варден. – Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 560 с.

6. Депман И. Я. История арифметики / И. Я. Депман. – Москва : Просвещение, 1965. – 416 с.

7. История математики с древнейших времен до начала XIX столения. Том первый / под ред. А. П. Юшкевича. – Москва : Наука, 1970. – 352 с.

8. История математики с древнейших времен до начала XIX столения. Том второй / под ред. А. П. Юшкевича. – Москва : Наука, 1970. – 300 с.

9. История математики с древнейших времен до начала XIX столения. Том третий / под ред. А. П. Юшкевича. – Москва : Наука, 1972. – 496 с.

10. Лебедев В. П. Некоторые задачи на прогрессии / В. П. Лебедев // Квант. – 1973. – № 4. – С. 57–60.

11. Литвиненко В. Н. Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия / В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. – Москва : Просвещение, 1991. – 352 с.

12. Панов В. Ф. Математика древняя и юная / В. Ф. Панов. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 648 с.

13. Полный сборник решений задач для поступающих в вузы. Группа В / под ред. М. И. Сканави. – Москва : Мир и образование, 2003. – 608 с.

14. Рыбников К. А. История математики. I / К. А. Рыбников. – Москва : Изд-во МГУ, 1960. – 192 с.

15. Рыбников К. А. История математики. II / К. А. Рыбников. – Москва : Изд-во МГУ, 1963. – 336 с.

16. Система тренировочных задач и упражнений по математике / А. Я. Симонов [и др.] – Москва : Просвещение, 1991. – 540 с.

17. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики / Д. Я. Стройк. – Москва : Наука, 1969. – 328 с.

18. Суконник Я. Н. Арифметико-геометрическая прогрессия / Я. Н. Суконник // Квант. – 1975. – № 1. – С. 36–39.

19. Четыркин Е. М. Финансовая математика / Е. М. Четыркин. – Москва: Дело, 2004. – 400 с.

Учебное издание

Белый Евгений Константинович

Математика не для ЕГЭ

Прогрессии

Учебное пособие для абитуриентов
и студентов первого курса

Редактор *Е. Е. Порывакина*
Компьютерная верстка *Е. К. Белого*
Оформление обложки *Е. Ю. Тихоновой*

Подписано в печать 20.06.16. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 4.0. Тираж 200 экз. Изд. № 75

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Отпечатано в типографии Издательства ПетрГУ
185910, г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33