Особенности решения задания 18 высокого уровня сложности ЕГЭ по математике

УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ

ГИМНАЗИИ ИМ. Ф.К. САЛМАНОВА

БОЧКАРЕВА О.А.

Задание 18

уравнение, система уравнений или неравенство с параметром или несколькими параметрами.

оценивается в 4 первичных балла ЕГЭ

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением/включением точек	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток множества значений a, возможно, с включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию ...	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

НАВЫКИ:

решение уравнений и неравенств: линейных квадратных, высших степеней, рациональных;

теорема Виета для многочленов произвольной степени;

исследование количества корней квадратных уравнений;

исследование расположения корней квадратного трехчлена;

равносильные преобразования в уравнениях и неравенствах с: радикалами, модулями, логарифмическими функциями, показательными функциями;

равносильные преобразования в тригонометрии.

графики простейших функций, свойства монотонных и непрерывных функций;

преобразование графиков (сдвиг, гомотетия, модули, симметрии);

уравнения множеств точек в системе координат;

построение областей, удовлетворяющих неравенствам;

построение графиков с помощью производной, поиск области значений.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ:

- Графический.
- Аналитический.

ОСНОВНЫЕ ШАГИ РЕШЕНИЯ:

- Анализ условия задачи и определение влияния параметра на решение.
- Нахождение области допустимых значений параметра.
- Исследование всех возможных случаев.

ВАЖНО!

- Следить за логикой и последовательностью решения.
- Тщательно обосновывать все выводы.
- Аккуратно оформлять каждый этап решения.

СОВЕТЫ ПО РЕШЕНИЮ:

- Если в задаче с параметром можно сделать замену переменной — сделайте замену.
- Если задачу с параметром можно решить графически — решите графически.

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД

1) с помощью преобразований определить для уравнений и неравенств какие линии или области они задают в системе координат.

2) построить рисунок и **описать**, какие линии изображены на рисунке.

Например:

«Графиком функции f(x) является парабола с ветвями вверх и вершиной в точке M(1;1), а графиком функции g(x) является прямая y=x+a, сдвинутая по вертикали вверх или вниз в зависимости от значения параметра a».

3) провести анализ рисунка и **показать** связь рисунка с условием задачи.

Например:

«Исходное уравнение имеет единственное решение, если прямая y=x+a пересекает график функции f(x) ровно один раз в заданной области. Это происходит, только если она проходит выше точки A и ниже точки B или через точку B».

4) оформить данную связь в виде уравнения, неравенства или числового выражения.

5) выполнить необходимые преобразования и вычисления.

6) записать ответ.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} |x+2y+1| \le 11 \\ x^2+y^2-2 = a(2x-a+1)+4a(y-a) \end{cases}$ имеет единственное решение.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x+2y+1| \leq 11 \\ x^2+y^2-2=a(2x-a+1)+4a(y-a) \end{cases}$$ имеет единственное решение.

---

1) с помощью преобразований определить для уравнений и неравенств какие линии или области они задают в системе координат.

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} -11 \leq x+2y+1 \leq 11 \\ (x^2-2ax+a^2)+(y^2-4ay+4a^2)=a+2 \end{cases}$$

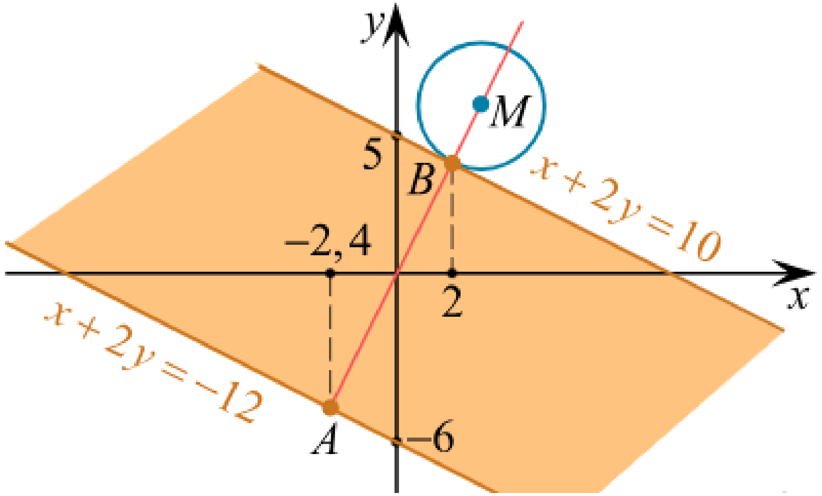
$$\begin{cases} -12 \leq x+2y \leq 10 \\ (x-a)^2+(y-2a)^2=a+2 \end{cases}$$

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x+2y+1| \le 11 \\ x^2+y^2-2=a(2x-a+1)+4a(y-a) \end{cases}$$ имеет единственное решение.

2) построить рисунок и описать, какие линии изображены на рисунке.

Неравенство $-12 \le x+2y \le 10$ задаёт на плоскости полосу, границы которой пара параллельных прямых $y=-0{,}5x-6$ и $y=-0{,}5x+5$.



Так как левая часть уравнения $(x-a)^2+(y-2a)^2=a+2$

неотрицательна при любых значениях переменных, то:

при $a<-2$ уравнение не имеет решений;

при $a=-2$ уравнение имеет единственное решение и задает на плоскости точку с координатами (-2; -4);

при $a>-2$ уравнение задает на плоскости окружности с радиусом $\sqrt{a+2}$ и центром $(a;2a)$; центры окружностей лежат на прямой $y=2x$.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x+2y+1| \le 11 \\ x^2+y^2-2 = a(2x-a+1)+4a(y-a) \end{cases}$$

имеет единственное решение.

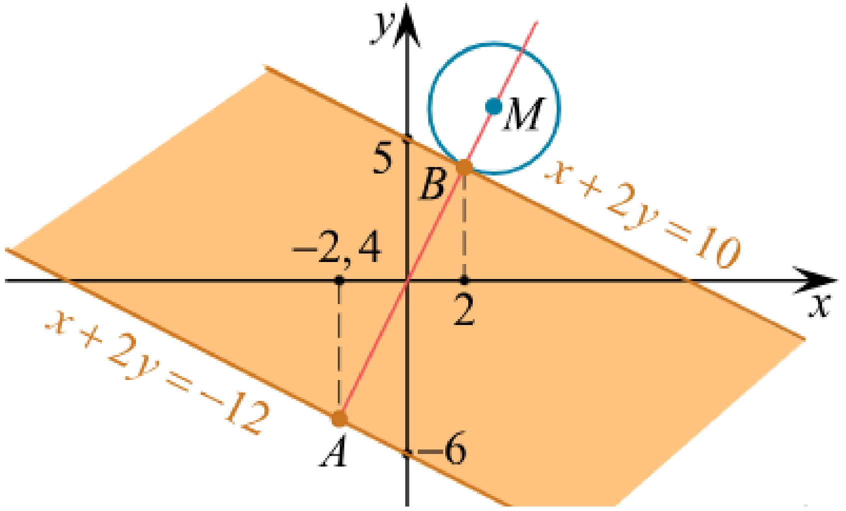
---

3) провести анализ рисунка и показать связь рисунка с условием задачи.

При $a=-2$ система имеет единственное решение если координаты точки (-2; -4) удовлетворяют неравенству $|x+2y+1| \le 11$:

$|-2+2\cdot(-4)+1| \le 11$

$9 \le 11$ – верное числовое неравенство. Значит, $a=-2$ решение.



При $a>-2$ система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность внешним образом касается полосы.

Линия центров $y=2x$ пересекается с прямой $y=-0{,}5x-6$ в точке А с абсциссой -2,4, то есть касание внешним образом в данном случае будет происходить при $a<-2{,}4$, что невозможно.

Линия центров $y=2x$ пересекается с прямой $y=-0{,}5x+5$ в точке В(2;4), то есть касание внешним образом в данном случае будет происходить при $a>2$. Кроме того, так как угловые коэффициенты данных прямых удовлетворяют условию перпендикулярности прямых, то радиус окружности равен расстоянию от центра окружности до точки В.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x+2y+1| \leq 11 \\ x^2+y^2-2=a(2x-a+1)+4a(y-a) \end{cases}$$ имеет единственное решение.

4) оформить данную связь в виде уравнения, неравенства или числового выражения.
5) выполнить необходимые преобразования и вычисления.
6) записать ответ.

Значит, $(2-a)^2+(4-2a)^2=a+2$

$5a^2-21a+18=0$

$a=3>2$

$a=1{,}2$ - не удовлетворяет условию $a>2$.

Ответ: -2; 3

НАВЫКИ:

Раскрывать модуль

Видеть, что уравнение задает окружность

Выделять полный квадрат

Решать квадратное уравнение

Проводить отбор корней, согласно условиям

Строить область, задающуюся двойным неравенством или системой неравенств

Определять вырождающиеся случаи окружности

Определять центр и радиус окружности

Видеть линию центров окружности

Определять условия касания окружности и полосы

Отбрасывать случаи, неудовлетворяющие условиям

Определять координаты точки пересечения прямых

Определять перпендикулярность прямых по угловым коэффициентам

Применять условие перпендикулярности касательной и радиуса окружности

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД

1) если необходимо, с помощью преобразований упростить уравнение, неравенство или систему, определить область допустимых значений переменных

2) учитывая условие задачи установить ограничения для параметра

3) оформить данные ограничения в виде уравнения, неравенства или системы.

4) выполнить необходимые преобразования и вычисления.

5) записать ответ.

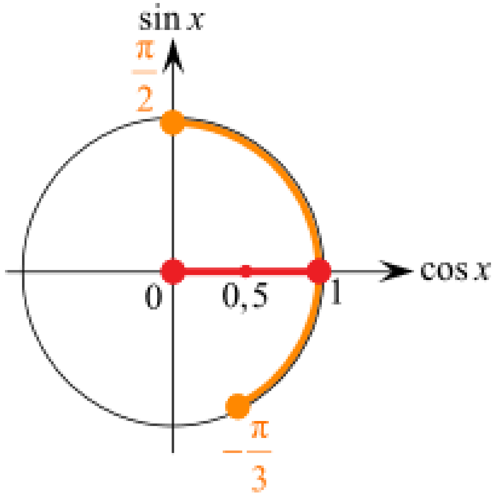
Найдите все значения a, при каждом из которых множество решений неравенства $\frac{a-(a^2-2a-3)cosx+4}{sin^2x+a^2+1} < 1$ содержит отрезок $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$.

Найдите все значения a, при каждом из которых множество решений неравенства $\frac{a-(a^2-2a-3)cosx+4}{sin^2x+a^2+1} < 1$ содержит отрезок $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$.

1) если необходимо, с помощью преобразований упростить уравнение, неравенство или систему, определить область допустимых значений переменных

$sin^2x + a^2 + 1 > 0$ при любых значениях переменных, значит исходное неравенство равносильно неравенству

$a - (a^2 - 2a - 3)cosx + 4 < sin^2x + a^2 + 1.$



Заметим следующее: чтобы множество решений неравенства содержало отрезок $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$ нужно, чтобы $0 \le cosx \le 1.$

Замена: $\cos x = t, sin^2x = 1 - t^2, t \in [0;1]$

$a - (a^2 - 2a - 3)t + 4 < 1 - t^2 + a^2 + 1$

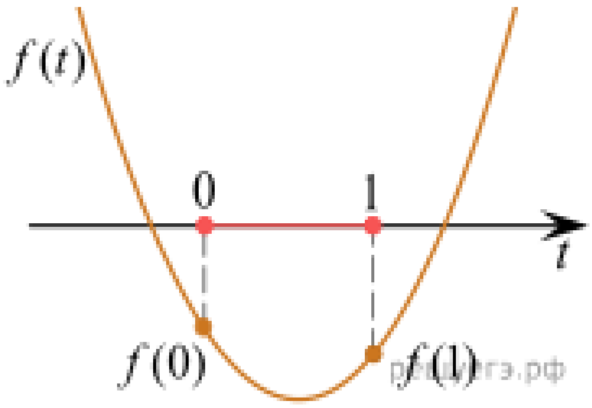
$t^2 - (a^2 - 2a - 3)t - a^2 + a + 2 < 0\,, t \in [0;1]$

Найдите все значения a, при каждом из которых множество решений неравенства $\frac{a-(a^2-2a-3)cosx+4}{sin^2x+a^2+1} < 1$ содержит отрезок $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$.

2) учитывая условие задачи установить ограничения для параметра

Рассмотрим функцию $f(t) = t^2 - (a^2 - 2a - 3)t - a^2 + a + 2$ – квадратичная. Графиком данной функции является парабола, ветви которой направлены вверх.

Чтобы неравенство выполнялось на отрезке $t \in [0; 1]$ необходимо и достаточно чтобы $f(0) < 0$ и $f(1) < 0$.



Найдите все значения a, при каждом из которых множество решений неравенства $\frac{a-(a^2-2a-3)cosx+4}{sin^2x+a^2+1} < 1$ содержит отрезок $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3) оформить данные ограничения в виде уравнения, неравенства или системы.
4) выполнить необходимые преобразования и вычисления.
5) записать ответ.

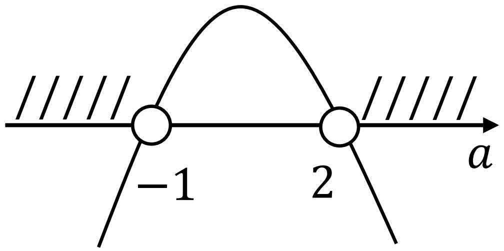
Значит,

$$\begin{cases} -a^2 + a + 2 < 0 \\ -2a^2 + 3a + 6 < 0 \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы:

$$-a^2 + a + 2 < 0$$

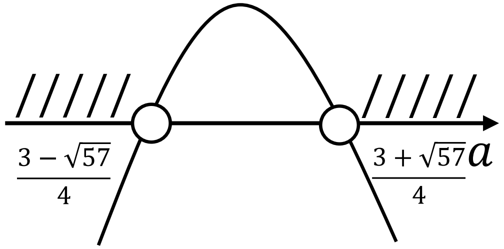
Рассмотрим функцию: $f(a) = -a^2 + a + 2$ – квадратичная.
График – парабола, ветви которой направлены вниз.
Нули функции $a = \{-1; 2\}$



Решим второе неравенство системы:

$$-2a^2 + 3a + 6 < 0$$

Рассмотрим функцию: $f(a) = -2a^2 + 3a + 6$– квадратичная.
График – парабола, ветви которой направлены вниз.
Нули функции $a = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{4}$



Найдите все значения a, при каждом из которых множество решений неравенства $\frac{a-(a^2-2a-3)cosx+4}{sin^2x+a^2+1} < 1$ содержит отрезок $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3) оформить данные ограничения в виде уравнения, неравенства или системы.

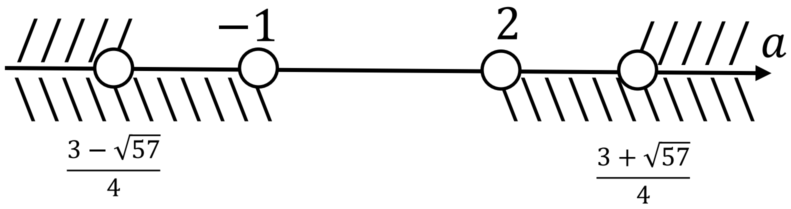
4) выполнить необходимые преобразования и вычисления.

5) записать ответ.

Для нахождения решения системы оценим границы числовых промежутков:

$$7 < \sqrt{57} < 8 \Rightarrow \frac{3+\sqrt{57}}{4} > 2; \frac{3-\sqrt{57}}{4} < -1$$

Поэтому:



$$a \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{57}}{4}; +\infty\right)$$

Ответ: $a \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{57}}{4}; +\infty\right)$

НАВЫКИ:

Видеть особенности дробно-рациональных выражений, выполнять аргументированные равносильные преобразования

Видеть ограничения тригонометрических функций и уметь работать с тригонометрическим кругом

Выполнять замену переменной.

Исследовать квадратичную функцию, учитывая условия задачи.

Решать систему квадратных неравенств

Выполнять оценку выражений