

Функции. Задачи с параметром

ГИА-2020

Савельева И.В., учитель математики МБОУ гимназии
им. Ф.К. Салманова.

Демоверсия 2020

23

Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях с прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Разложим числитель дроби на множители:

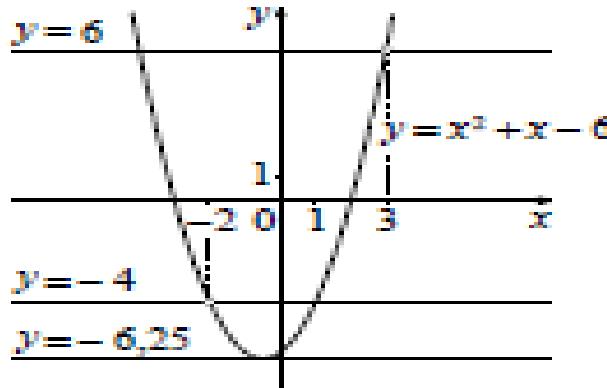
$$x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 4)(x^2 - 9) = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3).$$

При $x \neq -2$ и $x \neq 3$ функция принимает вид: $y = x^2 + x - 6$;

её график — парабола, из которой выколоты точки $(-2; -4)$ и $(3; 6)$.

Прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку либо тогда, когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых выколотая. Вершина параболы имеет координаты $(-0,5; -6,25)$.

Поэтому $c = -6,25$, $c = -4$ или $c = 6$.



Ответ: $c = -6,25$; $c = -4$; $c = 6$.

Баллы	Содержание критерия
2	График построен верно, верно найдены исходные значения параметра
1	График построен верно, но исходные значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

Решу ЕГЭ

1

Задание 23 № 49

Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях параметра c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Пусть $t = x^2$, тогда числитель принимает вид $t^2 - 13t + 36$. По теореме, обратной теореме Виета, сумма корней уравнения $t^2 - 13t + 36 = 0$ равна 13, а их произведение — 36. Тем самым, это числа 4 и 9. Тогда по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, получаем: $t^2 - 13t + 36 = (t - 4)(t - 9)$. Возвращаясь к исходной переменной, имеем:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 4)(x^2 - 9) = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3).$$

Сократим дробь: при $x \neq -2$ и $x \neq 3$ функция принимает вид:

$$y = (x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6,$$

её график — парабола с выколотыми точками $(-2; -4)$ и $(3; 6)$.

Выделим полный квадрат:

$$y = x^2 + x - 6 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}.$$

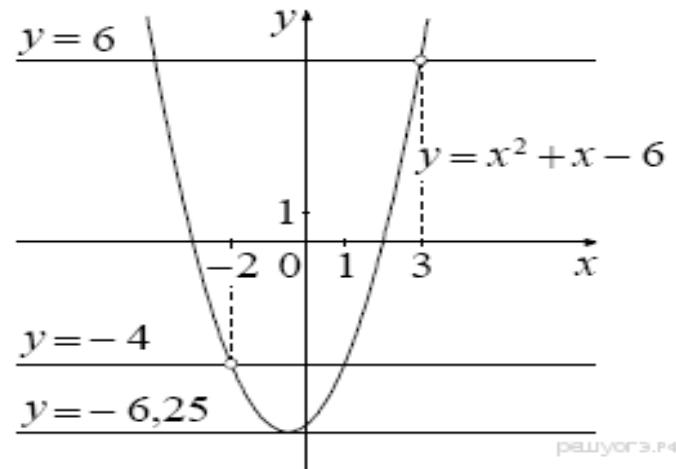
Следовательно, искомая парабола получается сдвигом графика функции $y = x^2$ на $(-0,5; -6,25)$ — см. рис.

Прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку либо тогда, когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых — выколотая. Вершина параболы имеет координаты $(-0,5; -6,25)$, ординаты выколотых точек суть $y(-2) = 4 - 2 - 6 = -4$ и $y(3) = 9 + 3 - 6 = 6$. Поэтому $c = -6,25$, $c = -4$ или $c = 6$.

Ответ: $c = -6,25$, $c = -4$ или $c = 6$.

Источник: Демонстрационная версия ГИА—2013 по математике.

Раздел кодификатора ФИПИ: [Построение параболы](#)



Задача №23.

Функции и их свойства. Графики функций

- Параболы
- Гиперболы
- Кусочно-непрерывные функции
- Разные задачи

Задание 23 № 340933

Постройте график функции $y = 3 - \frac{x+5}{x^2+5x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Решение.

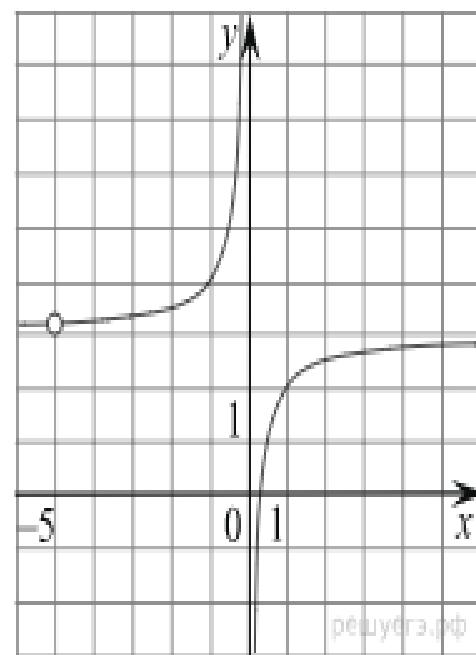
Преобразуем выражение:

$$3 - \frac{x+5}{x^2+5x} = 3 - \frac{x+5}{x(x+5)} = 3 - \frac{1}{x}, \text{ при условии, что } x \neq -5.$$

График данной функции получается из графика функции $y = \frac{1}{x}$ сдвигом на $(0; 3)$ и отражением через ось Ox . (см. рис.)

Прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки при $m = 3$ и $m = \frac{16}{5}$.

Ответ: $3; \frac{16}{5}$.



2

Задание 23 № 311559

Постройте график функции $y = \frac{x-2}{(\sqrt{x^2-2x})^2}$ и найдите все значение k , при которых прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

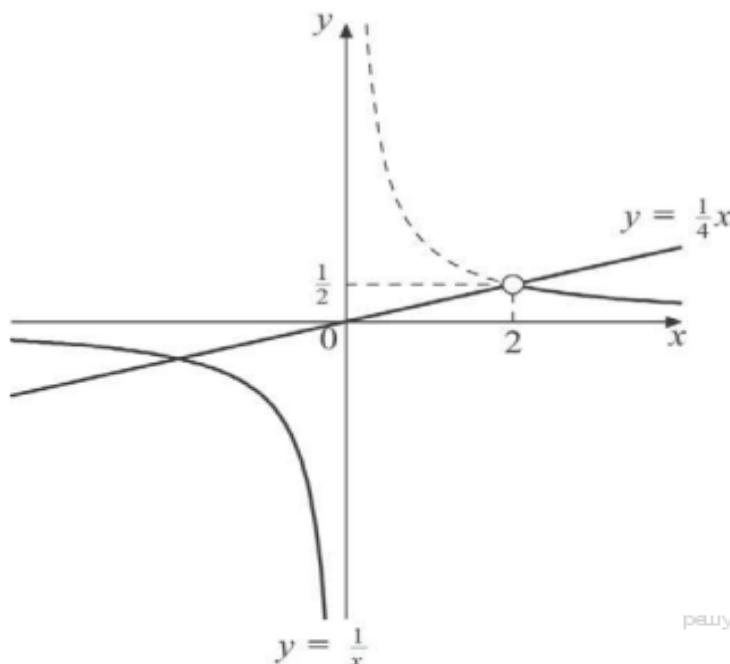
Решение.

Найдем область определения функции:

$$x^2 - 2x > 0; \quad x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty).$$

Поскольку $\frac{x-2}{(\sqrt{x^2-2x})^2} = \frac{x-2}{x^2-2x} = \frac{1}{x}$, получаем, что на области определения функция принимает вид $y = \frac{1}{x}$.

График изображён на рисунке.



решу.огэ.рф

Прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку при $k \geq \frac{1}{4}$.

Ответ: $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

5

Задание 23 № 311610

Постройте график функции $y = |x - 2| - |x + 1| + x - 2$ и найдите значения m , при которых прямая $y = m$ имеет с ним ровно две общие точки.

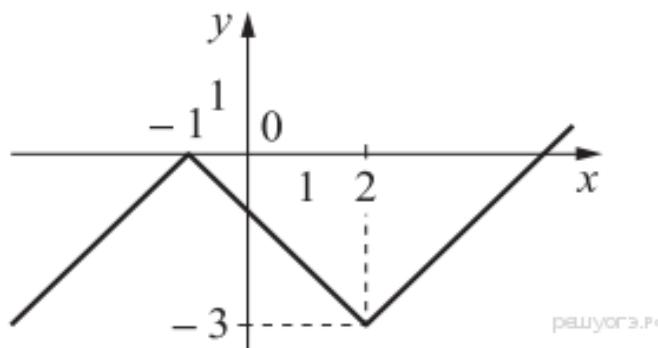
Решение.

Раскроем модули:

$$y = |x - 2| - |x + 1| + x - 2 = \begin{cases} x - 2 - x - 1 + x - 2, & x \geq 2, \\ 2 - x - x - 1 + x - 2, & -1 \leq x < 2, \\ 2 - x + x + 1 + x - 2, & x < -1 \end{cases} = \begin{cases} x - 5, & x \geq 2, \\ -x - 1, & -1 \leq x < 2, \\ x + 1, & x < -1. \end{cases}$$

Получаем, что график функции совпадает с прямой $y = x + 1$ при $x < -1$, совпадает с прямой $y = -x - 1$ при $-1 \leq x \leq 2$ и совпадает с прямой $y = x - 5$ при $x > 2$.

График изображен на рисунке.



решуогз.рф

Прямая $y = m$ имеет с графиком данной функции ровно две общие точки при $m = -3$ или $m = 0$.

Ответ: $m = -3, m = 0$.

Аналоги к заданию № 311610: [316269](#) [311611](#) [311771](#) [311827](#) [311859](#) [316242](#) [316295](#) [316332](#) [352181](#) [348609](#) ... [Все](#)

Источник: ГИА-2013. Математика. Пробные варианты от ФИПИ (1 вар.)

Раздел кодификатора ФИПИ: [Построение графиков кусочно-непрерывных функций](#)

3

Задание 23 № 311565

Постройте график функции $y = \frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6})^2}{x - 3}$ и найдите все значения a , при которых прямая $y = a$ не имеет с графиком данной функции общих точек.

Решение.

Найдём область определения функции:

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0; \quad x \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$$

$$\text{и } x - 3 \neq 0.$$

Значит, функция определена при $x \in (-\infty; 2] \cup (3; +\infty)$.

Поскольку $\frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6})^2}{x - 3} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = x - 2$, получаем, что на области определения функция принимает вид $y = x - 2$. График изображён на рисунке.

(№ 324553) Постройте график функции $y = \frac{4|x|-1}{|x|-4x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

(№ 324554) Постройте график функции $y = \frac{1}{2} \left(\left| x - \frac{1}{x} \right| + x + \frac{1}{x} \right)$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

(№ 324555) Постройте график функции $y = x^2 - |4x+5|$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

(№ 324561) Постройте график функции $y = x^2 - 4|x| - 2x$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком не менее одной, но не более трёх общих точек.

Пример 1. Постройте график функции

$$y = \frac{(x^2 + 0,25)(x - 1)}{1 - x}.$$

Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Пример 2. Постройте график функции

$$y = |x^2 - x - 2|.$$

Какое наибольшее число общих точек графика данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Математическая формула (от лат. *formula* — уменьшительное от *forma* — образ, вид) — принятая в математике (а также физике и прикладных науках) символическая запись законченного логического суждения (определения величины, уравнения, неравенства или тождества).

При работе с функциями:

- Начать с области определения **данной** функции.
- Упростить, если можно, правую часть формулы.
- Построение графика функции должно быть аргументированным (допускаются различные способы: параллельный перенос (сдвиг) графика, преобразование системы координат (использование вспомогательной системы координат), построение с помощью таблицы с дополнительным описанием).
- Помнить определение математической формулы.
- Не забывать о логике решения задачи (излагать рассуждения последовательно)