

Метод рационализации при решении показательных, логарифмических неравенств и неравенств с модулем

Учитель математики

МБОУ СОШ №27

Копылова А.Н.

$$\log_{17-x^2}\left(\frac{21}{5}x - x^2\right) \leq 1$$

OD3

$$17 - x^2 > 0$$

$$17 - x^2 \neq 1$$

$$\frac{21}{5}x - x^2 > 0$$

$$(\sqrt{17} - x)(\sqrt{17} + x) > 0$$

$$x^2 \neq 16 \Rightarrow x \neq 4 \quad x \neq -4$$

$$x \left(\frac{21}{5} - x \right) > 0 \Rightarrow \text{корни } x = 0; x = 4,2$$

Совмещаем промежутки

$$x \in (0; 4) \cup (4; \sqrt{17})$$

$$\log_{17-x^2} \left(\frac{21}{5}x - x^2 \right) \leq 1$$

Решение неравенства.

$$\log_{17-x^2} \left(\frac{21}{5}x - x^2 \right) \leq \log_{17-x^2} (17-x^2)$$

Приводим к стандартному виду

1 случай: Основание > 1 .

$17-x^2 > 1 \rightarrow$ функция возрастает

$$\frac{21}{5}x - x^2 \leq 17 - x^2$$

ТАК ЖЕ РЕШИМ ЭТО
НЕРАВЕНСТВО

$$\frac{21}{5}x \leq 17$$

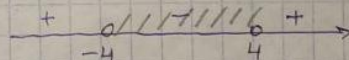
$$21x \leq 85$$

$$x \leq 4\frac{1}{21}$$

$$17 - x^2 > 1$$

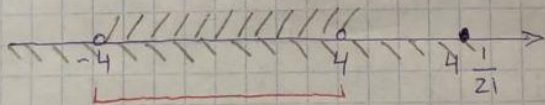
$$x^2 - 16 < 0$$

$$(x-4)(x+4) < 0$$



$$x \in (-4; 4)$$

НАКЛАДЫВАЕМ



$x \in (-4; 4)$, но с учетом ОДЗ $x \in (0; 4)$

2 случай

$17-x^2 < 1$ функция убывающая,

знак неравенства меняется.

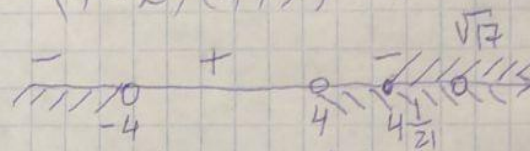
$$\frac{21}{5}x - x^2 \geq 17 - x^2$$

$$x \geq 4\frac{1}{21}$$

$$17 - x^2 < 1$$

$$16 - x^2 < 0$$

$$(4-x)(4+x) < 0$$



$$x \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$$

и с учетом ОДЗ $x \in [4\frac{1}{21}; \sqrt{17})$

Учитывая все решения — общий ответ:

$$x \in (0; 4) \cup [4\frac{1}{21}; \sqrt{17})$$

Метод рационализации

$$\log_{g(x)} f(x) > \log_{g(x)} h(x)$$

Данное неравенство равносильно
следующему неравенству:

$$(g(x) - 1)(f(x) - h(x)) > 0$$

С чем это связано?

1. если $g(x) > 1$, то $g(x) - 1 > 0$

и эта скобка не влияет на знак неравенства (положительное число), значит учитывая знак неравенства

$$f(x) - h(x) > 0, \text{ т.е. } f(x) > h(x)$$

С чем это связано?

2. если $g(x) < 1$, то $g(x) - 1 < 0$

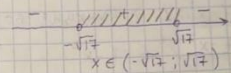
Поэтому вторая скобка должна быть тоже меньше нуля,

$$\text{т.е. } f(x) < h(x)$$

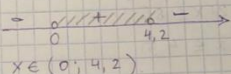
ОДЗ находится также, но после этого мы преобразуем исходное неравенство следующим образом:

$17 - x^2 > 0$
 $17 - x^2 \neq 1$
 $\frac{21}{5}x - x^2 > 0$

$(\sqrt{17} - x)(\sqrt{17} + x) > 0$
 $x^2 \neq 16 \Rightarrow x \neq 4, x \neq -4$
 $x(\frac{21}{5} - x) > 0 \Rightarrow \text{корни } x=0; x=4,2$

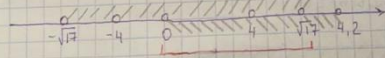


 $x \in (-\sqrt{17}, \sqrt{17})$



 $x \in (0, 4,2)$

Соединяем промежутки



 $x \in (0; 4) \cup (4; \sqrt{17})$

$$17 - x^2 \left(\frac{21}{5}x - x^2 \right) \leq 1$$

$$\log_{17 - x^2} \left(\frac{21}{5}x - x^2 \right) \leq \log_{17 - x^2} (17 - x^2)$$

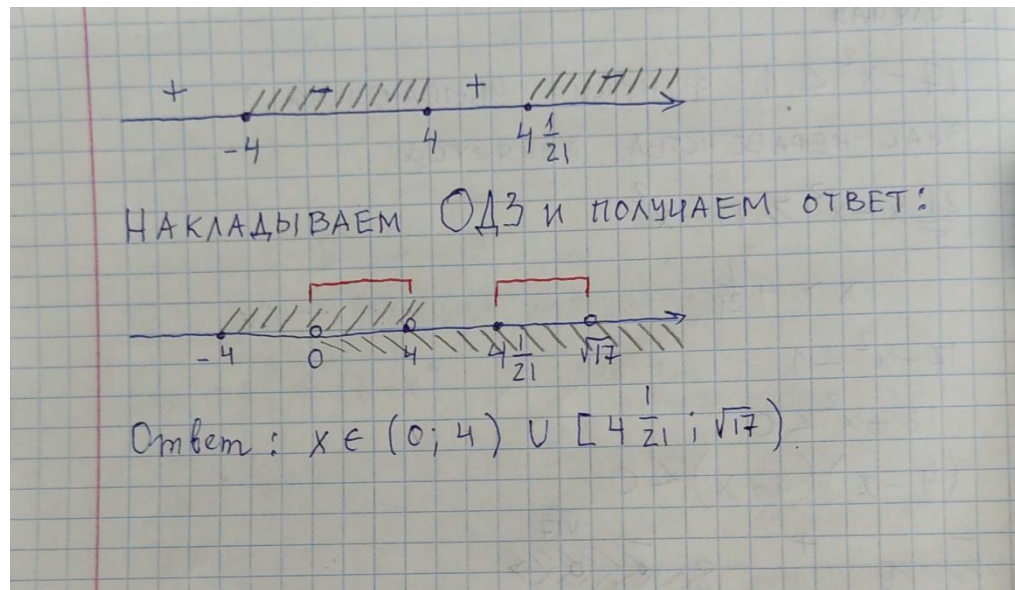
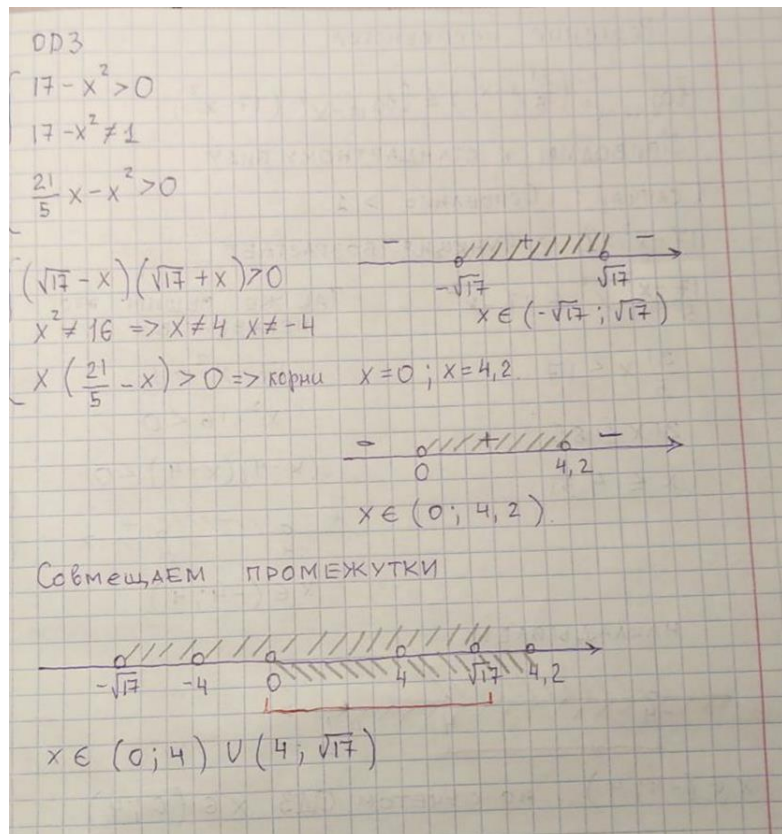
$$(17 - x^2 - 1) \left(\frac{21}{5}x - x^2 - 17 + x^2 \right) \leq 0$$

$$(16 - x^2) \left(\frac{21}{5}x - 17 \right) \leq 0$$

$$(4 - x)(4 + x) \left(\frac{21}{5}x - 17 \right) \leq 0$$

$$(4 - x)(4 + x)\left(\frac{21}{5}x - 17\right) \leq 0$$

$$\text{корни: } x = -4, x = 4, x = 4\frac{1}{21}$$



Для логарифмических:

$$\log_{g(x)} f(x) > \log_{g(x)} h(x)$$

Можно заменить на

$$(g(x) - 1)(f(x) - h(x)) > 0$$

Если дан $\log_a b$, его можно заменить на

$(a - 1)(b - 1)$, т.к. можно записать:

$$\log_a b - \log_a 1, \text{ где } \log_a 1 = 0$$

Для показательных:

выражение

$$a^t - a^k$$

МОЖНО ЗАМЕНИТЬ НА

$$(a - 1)(t - k)$$

Для квадратных корней:

Знак выражения $\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}$
совпадает со знаком выражения
 $(y_1 - y_2)$

Знак выражения $|y_1| - \sqrt{y_2} = \sqrt{y_1^2} - \sqrt{y_2}$
совпадает со знаком выражения
 $(y_1^2 - y_2)$

Для квадратных корней:

Знак выражения $|y_1| - |y_2| = \sqrt{y_1^2} - \sqrt{y_2^2}$

совпадает со знаком выражения

$$y_1^2 - y_2^2 = (y_1 - y_2)(y_1 + y_2)$$

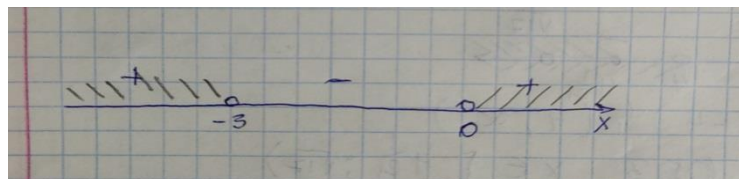
Применим полученные знания:

$$\frac{(4^x - 64)(\log_{x-1} x - \log_{x-1} 3)}{(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 12})(|x + 10| - |x|)} \geq 0$$

Найдем область допустимых значений:

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ x - 1 > 0 \\ x - 1 \neq 0 \\ x^2 + 3x \geq 0 \\ \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 12} \neq 0 \\ |x + 10| - |x| \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} x > 0 \\ x > 1 \\ x \neq 1 \\ x(x+3) > 0 \end{array}$$



$$\frac{(4^x - 64)(\log_{x-1} x - \log_{x-1} 3)}{(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 12})(|x + 10| - |x|)} \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 12} \neq 0$$

$$\sqrt{x^2 + 3x} \neq \sqrt{x^2 + 12}$$

$$x^2 + 3x \neq x^2 + 12$$

$$3x \neq 12$$

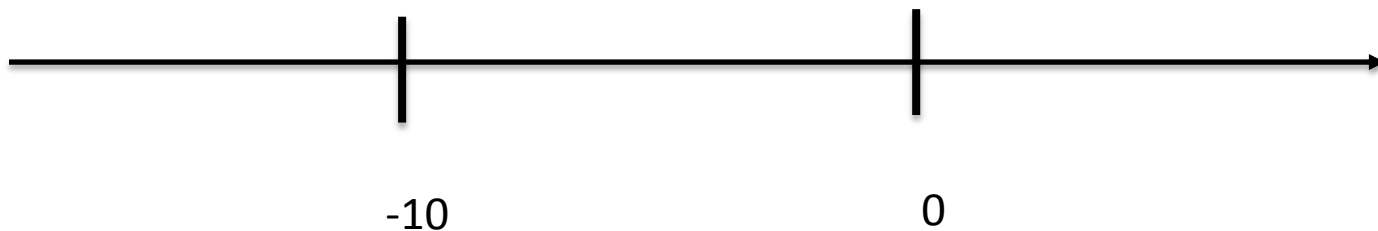
$$x \neq 4$$

$$\frac{(4^x - 64)(\log_{x-1} x - \log_{x-1} 3)}{(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 12})(|x + 10| - |x|)} \geq 0$$

$$|x + 10| - |x| \neq 0$$

Решим методом интервалов:

$$x = -10, x = 0$$



1. $(-\infty; -10)$ 2. $[-10; 0]$ 3. $(0; -\infty)$

$$|x + 10| - |x| \neq 0$$

1. $(-\infty; -10)$ — $|x + 10|$ - отрицательно
 $|x|$ - отрицательно

$$-x - 10 + x \neq 0; \quad -10 \neq 0$$

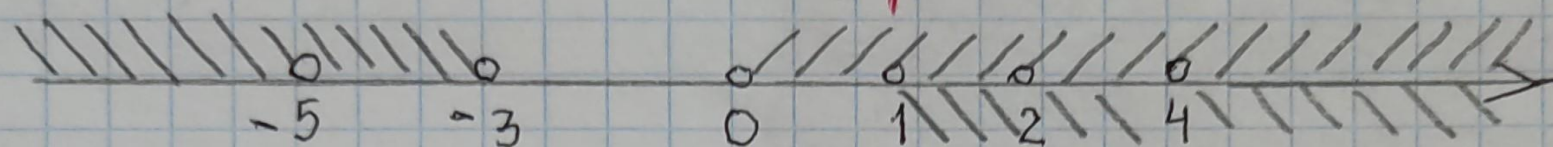
2. $[-10; 0]$ — $|x + 10|$ - положительно
 $|x|$ - отрицательно

$$x + 10 + x \neq 0; \quad 2x \neq -10; \quad x \neq -5.$$

3. $(0; -\infty)$ — $|x + 10|$ - положительно
 $|x|$ - положительно

$$x + 10 - x \neq 0; \quad 10 \neq 0.$$

Собираем ОДЗ:



$$x \in (1; 2) \cup (2; 4) \cup (4; \infty)$$

Переходим к самому неравенству:

$$\frac{(4^x - 64)(\log_{x-1} x - \log_{x-1} 3)}{(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 12})(|x + 10| - |x|)} \geq 0$$

$$4^x - 64 = 4^x - 4^3 \sim (4 - 1)(x - 3) = 3(x - 3)$$

$$\log_{x-1} x - \log_{x-1} 3 \sim (x - 1 - 1)(x - 3) = (x - 2)(x - 3)$$

$$\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 12} \sim (x^2 + 3x) - (x^2 + 12) = 3(x - 4)$$

$$\begin{aligned} |x + 10| - |x| &= \sqrt{(x + 10)^2} - \sqrt{(x)^2} \sim (x + 10)^2 - \\ &- (x)^2 = (x + 10 - x)(x + 10 + x) = 10(2x + 10) = \\ &= 20(x + 5) \end{aligned}$$

Записываем неравенство:

$$\frac{3(x-3)(x-2)(x-3)}{3(x-4) \cdot 20(x+5)} \geq 0$$

$$\frac{(x-3)^2 (x-2)}{(x-4)(x+5)} \geq 0$$

Корни: $x = -5, 2, 3, 4$

