

Задания В10

Д2.1. Зависимость объёма спроса q на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой:

$$q = 75 - 5p.$$

Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) определяется как $r(p) = q \cdot p$. Определите максимальный уровень цены p , при котором месячная выручка $r(p)$ составит не менее 270 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Д2.2. Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна

$$P = m \left(\frac{v^2}{L} - g \right),$$

где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). С какой минимальной скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 1,6 м? Ответ выразите в м/с.

Д2.3. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma S T^4,$$

где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{125} \cdot 10^{20} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P не менее $4,56 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Д2.4. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 390 \text{ Гц}$. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону

$$f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}},$$

где c — скорость звука в воздухе (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 320 \text{ м/с}$. Ответ выразите в м/с.

Д2.5. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

где $l_0 = 25 \text{ м}$ — длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5 \text{ км/с}$ — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 24 м? Ответ выразите в км/с.

Д2.6. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начала распада, T — период полураспада в минутах. В лаборатории получили вещество, содержащее $m_0 = 20 \text{ мг}$ изотопа кислорода-15, период полураспада которого $T = 2 \text{ мин}$. В течение скольких минут масса изотопа кислорода-15 будет не меньше 10 мг?

Д2.7. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $v = 2$ моля воздуха объёмом $V_1 = 18 \text{ л}$, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объёма V_2 . Работа (в джоулях), совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением

$$A = \alpha v T \log_2 \frac{V_1}{V_2},$$

где $\alpha = 9,15$ — постоянная, а $T = 300$ К — температура воздуха. Какой объём V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 10 980 Дж?

Д2.8. При бросании мяча под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли его время в полёте, выраженное в секундах, равно

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время в полёте будет не меньше 1,9 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 19$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Д2.9. На рельсах стоит платформа. Скейтбордист прыгает на неё со скоростью $v = 8$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью

$$u = \frac{m}{m + M} v \cos \alpha,$$

где $m = 70$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 490$ кг — масса платформы. Под каким наибольшим углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу до скорости не менее чем 0,5 м/с?

Д2.10. Катер должен пересечь реку шириной $L = 90$ м так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Скорость течения реки $u = 1,5$ м/с. Время в пути, измеряемое в секундах, равно

$$t = \frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha,$$

где α — острый угол между осью катера и линией берега (см. рис. на с. 59). Под каким минимальным углом α к берегу нужно направить катер, чтобы время в пути было не больше 60 с? Ответ дайте в градусах.

Д3.1. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 20$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону

$$l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ),$$

где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^\circ\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 6 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Д3.2. Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна

$$P = m \left(\frac{v^2}{L} - g \right),$$

где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). С какой минимальной скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 1,225 м? Ответ выразите в м/с.

Д3.3. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma S T^4,$$

где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{648} \cdot 10^{20} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P не менее $1,824 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Д3.4. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 50$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 60 до 80 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 120 до 150 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

Д3.5. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

где $l_0 = 50$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 48 м? Ответ выразите в км/с.

Д3.6. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начала распада, T — период полураспада в минутах. В лаборатории получили вещество, содержащее $m_0 = 100$ мкг изотопа кислорода-15, период полураспада которого $T = 2$ мин. В течение скольких минут масса изотопа кислорода-15 будет не меньше 12,5 мкг?

Д3.7. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $v = 4$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1,5$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа (в джоулях), совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением

$$A = \alpha v T \log_2 \frac{p_2}{p_1},$$

где $\alpha = 9,15$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 (в атм) можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 10 980 Дж?

Д3.8. При бросании мяча под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли его время в полёте, выраженное в секундах, равно

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время в полёте будет не меньше 2,5 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 25$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Д3.9. На рельсах стоит платформа. Скейтбордист прыгает на неё со скоростью $v = 6$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью

$$u = \frac{m}{m + M} v \cos \alpha,$$

где $m = 70$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 350$ кг — масса платформы. Под каким наибольшим углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу до скорости не менее чем 0,5 м/с?

Д3.10. Катер должен пересечь реку шириной $L = 100$ м так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Скорость течения реки $u = 0,8$ м/с. Время в пути, измеряемое в секундах, равно

$$t = \frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha,$$

где α — острый угол между осью катера и линией берега (см. рис. на с. 59). Под каким минимальным углом α к берегу нужно направить катер, чтобы время в пути было не больше 125 с? Ответ дайте в градусах.