

Задание 1 Решите неравенство: $|x^7 + 4x^5 + x^2 + 2x - 3| < x^7 + 4x^5 - x^2 - 2x + 3$.

Задание 2 В арифметической прогрессии (a_n) : $a_k = l$, $a_l = k$ ($k \neq l$). Вычислите a_n .

Задание 3 В параллелограмме ABCD стороны AB = 4, BC = 7. Биссектрисы АК и ВМ углов параллелограмма пересекаются в точке О (точки К и М принадлежат сторонам ВС и AD соответственно). Найдите отношение площадей пятиугольника ОКСДМ и треугольника ОАВ.

Задание 4 Решите систему уравнений в натуральных числах:

$$\begin{cases} 2x^2 + 30y^2 + 3z^2 + 12xy + 12yz = 308 \\ 2x^2 + 6y^2 - 3z^2 + 12xy - 12yz = 92 \end{cases}$$

Задание 5

Через сколько минут после того, как часы показали ровно 3 часа, минутная стрелка догонит часовую?

Задание 1 Решение:

Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^7 + 4x^5 + x^2 + 2x - 3 < x^7 + 4x^5 - x^2 - 2x + 3, \\ -(x^7 + 4x^5 + x^2 + 2x - 3) < x^7 + 4x^5 - x^2 - 2x + 3, \end{cases} \quad (1)$$

которую, можно переписать в виде

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0, \\ x^5(x^2 + 4) > 0 \end{cases} \quad (2)$$

решения первого неравенства системы (2) составляют промежуток $-3 < x < 1$,

решения второго промежутка $0 < x < +\infty$.

Следовательно, решения системы неравенств (2), а значит, и исходного неравенства (1) составляют промежуток $0 < x < 1$.

Ответ: $0 < x < 1$.

Задание 2 Решение:

222. В арифметической прогрессии (a_n)

$$a_k = l, \quad a_l = k \quad (k \neq l).$$

Вычислите a_n .

△ Вычтем почленно равенства

$$l = a_1 + d(k - 1), \quad k = a_1 + d(l - 1),$$

где d — разность арифметической прогрессии. Получим:

$$l - k = d(k - l), \quad d = -1.$$

Тогда

$$l = a_1 - (k - 1), \quad a_1 = k + l - 1.$$

Осталось найти a_n :

$$a_n = a_1 + d(n - 1) = k + l - 1 - (n - 1) = k + l - n.$$

Ответ: $a_n = k + l - n$. ▲

Задание 3 Решение: $\angle BAO + \angle ABO = (\angle BAD + \angle ABC) : 2 = 90^\circ$. Тогда $\angle BOA = 90^\circ$. Значит, АВ = ВК (т.к ВО - биссектриса и высота $\triangle ABK$). Аналогично из $\triangle BAM$ получаем, что АВ = АМ. Таким образом, АВКМ - ромб (ВК = АВ = АМ и ВК $\parallel$ АМ). Он имеет общую высоту с параллелограммом ABCD, площадь которого S. Отсюда следует, что S_{CDMK} составляет $\frac{3}{7}$ от S, а площадь каждого из четырех треугольников, на

которые диагонали разбивает ромб АВКМ, равняется $\frac{S}{7}$. Значит S_{OKCDM} составляет $\frac{4}{7}$ от S, откуда

$$\frac{S_{OKCDM}}{S_{OAB}} = 4 \quad \text{Ответ: } \frac{S_{OKCDM}}{S_{OAB}} = 4$$

Задание 5 Решите систему уравнений в натуральных числах:

$$\begin{cases} 2x^2 + 30y^2 + 3z^2 + 12xy + 12yz = 308 \\ 2x^2 + 6y^2 - 3z^2 + 12xy - 12yz = 92 \end{cases}$$

Решение:

1. Сложим уравнения системы, получим:

$$x^2 + 9y^2 + 6x + 6y = 100$$

$$(x + 3y)^2 = 100 \quad \text{т.к. } x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, \text{ то } x + 3y = 10$$

2. Вычтем второе уравнение из первого получим:

$$4y^2 + z^2 + 4yz = 36$$

$$(2y + z)^2 = 36 \quad \text{т.к. } y \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{N}, \text{ то } 2y + z = 6$$

3. Решим систему

$$\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 2y + z = 6 \end{cases}$$

$$\text{а) } 2y + z = 6, \quad z = 2, y = 2$$

$$z = 4, y = 1$$

$$z = 6, \text{ нет решений}$$

$$\text{б) } x + 3y = 10 \quad \text{при } y = 2, x = 4 \quad \text{при } y = 1, x = 7$$

Ответ: $x = 4; y = 2; z = 2$ или $x = 7; y = 1; z = 4$.

Задание 5 Поскольку скорость минутной стрелки в 12 раз больше скорости часовой, то, обозначив через x время, пройденное часовой стрелкой, $12x$ - минутной и, учитывая, что первоначально между стрелками было ровно 15 минут, получим уравнение

$$12x = x + 15, \quad x = 1 \frac{4}{11}$$

Тогда минутная стрелка догонит часовую стрелку через

$$15 + 1 \frac{4}{11} = 16 \frac{4}{11} \text{ минут}$$