Семинар-практикум

«Решение задач на оптимальный выбор»

(№16 ЕГЭ профильный уровень)

Шпак Ольга Евгеньевна,
учитель математики
высшей квалификационной категории
МБОУ лицей №3

15.03.2024

Задачи на оптимизацию

(от лат. optimum – «наилучший») – задачи, которые возникают там, где необходимо выяснить как с помощью имеющихся средств достичь наилучшего результата

Задачи на оптимизацию – это исследовательские задачи, очень близкие по смыслу (но не по методам решения) к задачам с параметром. Сложность таких задач в том, что не всегда есть готовые методы решения и задача может потребовать своего подхода. ***Успех в*** решении таких задач заключается в ***систематическом тренинге.***

Основные этапы решения текстовой задачи:

- подробный разбор условия задачи для четкого понимания сути описанного в задаче процесса;
- выбор переменных, количество которых должно быть достаточным для того, чтобы составить уравнения и неравенства;
- формализация или составление математической модели (составление уравнений, неравенств или их систем);
- решение полученного уравнения, неравенства или системы;
- интерпретация полученного результата и непосредственно сам ответ на вопрос задачи.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Фабрика, производящая пищевые полуфабрикаты, выпускает блинчики со следующими видами начинки: ягодная и творожная. В данной ниже таблице приведены себестоимость и отпускная цена, а также производственные возможности фабрики по каждому виду продукта при полной загрузке всех мощностей только данным видом продукта.

Вид начинки	Себестоимость(за 1 тонну)	Отпускная цена(за 1 тонну)	Производственныевозможности
ягоды	70 тыс. руб.	100 тыс. руб.	90 (тонн в мес.)
творог	100 тыс. руб.	135 тыс. руб.	75 (тонн в мес.)

Для выполнения условий ассортиментности, которые предъявляются торговыми сетями, продукции каждого вида должно быть выпущено не менее 15 тонн. Предполагая, что вся продукция фабрики находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль, которую может получить фабрика от производства блинчиков за 1 месяц.

1. Исследуем доходность

$$\text{Доходность (Д)} = \frac{\text{Прибыль (П)}}{\text{Затраты (З)}}$$

Ягоды: П = 100 тыс. – 70 тыс. = 30 тыс.

З = 70 тыс.

$$Д = \frac{30\ тыс.}{70\ тыс.} = \frac{3}{7}$$

Творог: П = 135 тыс – 100 тыс = 35 тыс

З = 100 тыс

$$Д = \frac{35\ тыс}{100\ тыс} = \frac{7}{20}$$

$$\frac{3}{7} > \frac{7}{20} \qquad \frac{60}{140} > \frac{49}{140}$$

Доходность ягодных блинчиков выше, их надо производить больше.

2) M (творог) = 15 тонн
   S (творог) = 15 x 35 = 525 тыс.руб.

3) 75 тонн - 100 %
   15 тонн - X%

$$X = \frac{15 \times 100}{75} = 20\%$$ - столько % производственных мощностей занято под выпуск творожных блинчиков

100 – 20 = 80% - остается на выпуск ягодных блинчиков

90 тонн – 100 %
y тонн - 80%

$$y = \frac{80 \times 90}{100} = 72$$ тонны – максимально возможная масса ягодных блинчиков

M (ягоды) = 72 тонны
S (ягоды) = 72 x 30 = 2160 тыс. руб.
S= 525 тыс + 2160 тыс = 2685 тыс. руб.

Консервный завод выпускает фруктовые компоты в двух видах тары — стеклянной и жестяной. Производственные мощности завода позволяют выпускать в день 90 центнеров компотов в стеклянной таре или 80 центнеров в жестяной таре. Для выполнения условий ассортиментности, которые предъявляются торговыми сетями, продукции в каждом из видов тары должно быть выпущено не менее 20 центнеров. В таблице приведены себестоимость и отпускная цена завода за 1 центнер продукции для обоих видов тары.

Вид тары	Себестоимость,1 центнера	Отпускная цена,1 центнера
стеклянная	1500 руб.	2100 руб.
жестяная	1100 руб.	1750 руб.

Предполагая, что вся продукция завода находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль завода за один день (прибылью называется разница между отпускной стоимостью всей продукции и её себестоимостью).

Найти максимальную прибыль

Прибыль: 2100 – 1500 = 600 руб. – прибыль с 1 ц стеклянной тары
1750 – 1100 = 650 руб. – прибыль с 1 ц жестяной тары

m_1 - масса компота в стеклянной таре
m_2 - масса компота в жестяной таре

$$600m_1 + 650m_2 \longrightarrow max$$

90 ц - 100%
m_1 - x%

80 ц – 100%
m_2 - y%

$m_1 = 0{,}9x$

$m_2 = 0{,}8y$

$0{,}9x \geqslant 20$

$0{,}8y \geqslant 20$

$x + y = 100\%$ - все производственные возможности

$600 \cdot 0{,}9x + 650 \cdot 0{,}8y \longrightarrow \max$

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 540x + 520y \longrightarrow \max \end{cases}$$

$x = 100 - x$

$540(100 - y) + 520y \longrightarrow \max$

$54000 - 20y \longrightarrow \max$

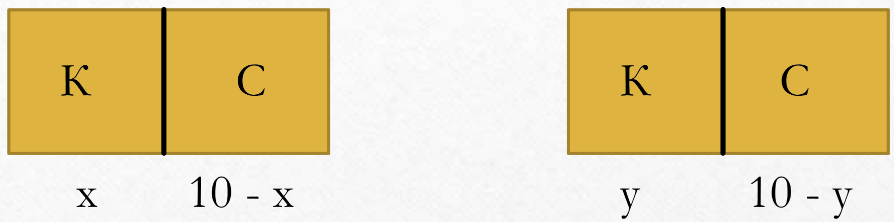
Чем больше y, тем меньше прибыль, чем меньше y, тем больше прибыль

$0{,}8y \geqslant 20 \qquad 4y \geqslant 100 \qquad y \geqslant 25$

$54000 - 20 \cdot 25 = 53\,500$ руб. Ответ: 53500

У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 400 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 11 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?



Так как доход фермера на каждом поле не зависит от того, каким образом засеять другое поле, то можно найти максимальную доход на каждом поле в отдельности и сложить полученные знания

$f(x) = x \cdot 400 \cdot 10\,000$ – доход от продажи картофеля

$f(x) = (10 - x) \cdot 300 \cdot 11\,000$ – доход от продажи свеклы

$f(x) = x \cdot 400 \cdot 10\,000 + (10 - x) \cdot 300 \cdot 11\,000 = 700\,000x + 33\,000\,000$

$x \in [0; 10]$ $f'(x) = 700\,000 > 0$

f наиб. $= f(10) = 40\,000\,000$ – на I поле

$f(y) = y \cdot 300 \cdot 10\ 000 + (10 - y) \cdot 400 \cdot 11\ 000 = -1\ 400\ 000y + 44\ 000\ 000$

$f'(x) = -1\ 400\ 000 < 0$

$f(0) = 44\ 000\ 000$

$40\ 000\ 000 + 44\ 000\ 000 = 84\ 000\ 000$

С использованием понятия «доходность»

Рассмотрим доходность каждой культуры на каждом поле на ед. площади.

Картофель I поле $400 \cdot 10\,000 = 4\,000\,000$ руб. на га

Свекла I поле $300 \cdot 11\,000 = 3\,300\,000$ руб. на га

Доходность на 1 пле выше, поэтому нужно все поле засеять картофелем

$10 \cdot 4\,000\,000 = 40\,000\,000$ руб.

Картофель II поле $300 \cdot 10\,000 = 3\,000\,000$ руб. на га

Свекла II поле $400 \cdot 11\,000 = 4\,400\,000$ руб. на га

Доходность свеклы выше, поэтому нужно все поле засеять свеклой

$10 \cdot 4\,400\,000 = 44\,000\,000$ руб.

$40\,000\,000 + 44\,000\,000 = 84\,000\,000$ руб.

Зависимость объёма Q (в шт.) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q=15000 – P$, $1000 \leqslant P \leqslant 15000$ Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 5000000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену товара на 20%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

Q – количество товара в штуках $Q = 15000 – P$

P – цена за единицу товара $1000 \leqslant P \leqslant 15000$

D – доход с продажи $D= PQ$

Z – затраты на производство $Z = 3000Q + 5000000$

F – прибыль $F = D – Z$

1) Найдем прибыль: $F = PQ - 3000Q – 5000000$

$F = P\ (15000 – P) – 3000\ (1500 – P) – 5000000$

$F = -P^2 + 18000P – 50\ 000\ 000$, где P – старая цена

2) $0,8P$ – новая цена (снижена на 20%)

$F\ (0,8P) = -0,64P^2 + 14400P – 50\ 000\ 000$

3) Так как прибыль не изменилась

$-P^2 + 18000P = -0,64P^2 + 14400P$

$0,36P^2 - 3600P = 0$

$P(0,36P – 3600) = 0$

$P = 0$ – не удовл.усл. $\quad P = 10\ 000$

10 000 руб. – старая цена

4) $0,8P = 8000$ руб. – стала цена

5) $F = -P^2 + 18000P – 50\ 000\ 000$

$F_{наиб.}$ на [1000; 1500]

Вершина = 9000 – единственная точка max на [1000; 1500]

Вершина = 9000 – единственная точка max на [1000; 1500]

6) 8000 руб. – 100%

9000 руб. – x%

$$x = \frac{9000 \cdot 100}{8000} = 112{,}5\%$$

112,5% - 100% =12,5%

Ответ: 12.5

Однажды в разговоре П.Л. Чебышев заметил: «В старину математические задачи задавали боги. Далее наступил второй период, когда задачи задавали полубоги: Ньютон, Эйлер, Лагранж и т.д. Теперь третий период, когда задачи задает практика»