

Семинар-практикум

**«Решение задач
на оптимизацию»
(№15 ЕГЭ профильный уровень)**

**Шелудько Ирина Анатольевна,
учитель математики
высшей квалификационной категории
МБОУ СОШ №1**

03.04.2023



1) Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0,5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через три года суммарная прибыль составит не менее 75 млн рублей?

затраты: $q = 0,5x^2 + x + 7$

прибыль: $px - q$

$$px - (0,5x^2 + x + 7) = px - 0,5x^2 - x - 7 =$$

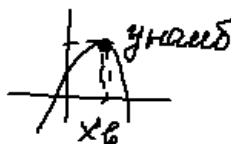
$$= -0,5x^2 + x(p-1) - 7$$

Введём функцию:

$$f(x) = -0,5x^2 + x(p-1) - 7$$

(парабола,
ветви ↓)

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(p-1)}{-2 \cdot 0,5} = p-1$$



$$y_0 = -0,5(p-1)^2 + (p-1)^2 - 7 = 0,5(p-1)^2 - 7 =$$

$$= \boxed{\frac{(p-1)^2}{2} - 7} \text{ — макс за 1 год}$$

за 3 года:

$$3 \left(\frac{(p-1)^2}{2} - 7 \right) \geq 75 - 1 \cdot 3$$

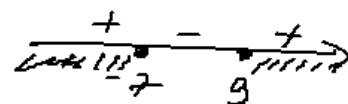
$$\frac{(p-1)^2}{2} - 7 \geq 25$$

$$(p-1)^2 \geq 64$$

$$(p-1-8)(p-1+8) \geq 0$$

$$(p-9)(p+7) \geq 0$$

н.р. $p = 9; -7$



$$p > 0 \Rightarrow p \geq 9$$

зн, $p_{\text{наим}} = 9$

Ответ: 9 млн руб



2) Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$.

Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 3 года?

прибыль: $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$

стоимость

продукции: px

$78 : 3 = 26$

чтобы прибыль за 3 года была не меньше 78 млн.р, необходимо чтобы ежегодная прибыль была не меньше 26 млн.р.

$\Rightarrow px - (0,5x^2 + 2x + 6) \geq 26$

$px \geq 26 + 0,5x^2 + 2x + 6$

$p \geq \frac{0,5x^2 + 2x + 32}{x}$

$p \geq 0,5x + 2 + \frac{32}{x}$

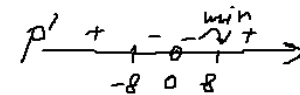
Введем функцию:

$p = 0,5x + 2 + \frac{32}{x}$

$p' = 0,5 - \frac{32}{x^2}$

$p' = 0, \frac{1}{2} - \frac{32}{x^2} = 0$

$x = \pm 8$



найдем x_{min}

$p(8) = 0,5 \cdot 8 + 2 + \frac{32}{8} = 10$

Ответ: 10 млн. руб.



3) Строительство нового завода стоит 159 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При этом в первый год $p = 10$, а далее каждый год возрастает на 1. За сколько лет окупится строительство?

стоимость
продукции: px млн руб.

прибыль: $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$

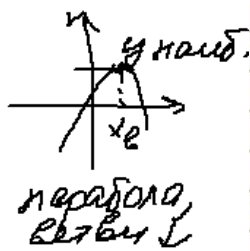
Введем функцию:

$$f(x) = px - (0,5x^2 + 2x + 6)$$

$$f(x) = -0,5x^2 + x(p-2) - 6$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{-(p-2)}{2 \cdot (-0,5)} = p-2$$

$$\begin{aligned} f(p-2) &= -0,5(p-2)^2 + (p-2)^2 - 6 = \\ &= \underline{0,5(p-2)^2 - 6} \quad \text{прибыль} \\ &\quad \text{за 1 год} \end{aligned}$$



1 год $p = 10$

$$0,5 \cdot 100 - 2 \cdot 10 - 4 = 26 \text{ млн.р.}$$

2 год $p = 11$

$$0,5 \cdot 121 - 2 \cdot 11 - 4 = 34,5$$

3 год $p = 12$

$$0,5 \cdot 144 - 2 \cdot 12 - 4 = 44$$

(за 3 года

$$26 + 34,5 + 44 = 104,5 \text{ млн.р.})$$

4 год $p = 13$

$$0,5 \cdot 169 - 2 \cdot 13 - 4 = 54,5$$

(за 4 года:

$$104,5 + 54,5 = 159 \text{ млн.р.})$$

Ответ: 4 года



4) В двух областях работают по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,3 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую суммарную массу металлов можно добыть в двух областях за сутки?

I
160 раб
по 5ч/сут
или
 $1ч = 0,1кг Al$
или
 $1ч = 0,3кг Ni$

II
160 раб
по 5ч/сут
 $x кг Al - x^2 чел/час$
 $y кг Ni - y^2 чел/час$

Чел/час труда
40 чел/час
40 чел по 1ч.
120 чел по 40с.
80 чел по 20с.
40 чел по 10с.

I $160 \cdot 5 \cdot 0,3 = 240ч$
(берем 0,3, т.к. Ni добывается больше)

II (чел/час = людей \times час)

m чел - Al
 $(160-m)$ чел - Ni

\Downarrow
 $5m = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{5m}$

$5(160-m) = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{5(160-m)}$

Введем функцию:

$f(m) = x + y = \sqrt{5m} + \sqrt{5(160-m)}$

Найдем макс.

$f'(m) = \frac{5}{2\sqrt{5m}} - \frac{5}{2\sqrt{5(160-m)}}$
 $f'(m) = 0, \frac{5}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{5m}} - \frac{1}{\sqrt{5(160-m)}} \right) = 0$

$\sqrt{800-5m} - \sqrt{5m} = 0$
 $\sqrt{800-5m} = \sqrt{5m}$
 $800-5m = 5m$
 $m = 80$ (чел) год Al

$\Rightarrow 160-80 = 80$ (чел) год Ni

$f(80) = \sqrt{5 \cdot 80} + \sqrt{5(160-80)} = \sqrt{400} + \sqrt{400} = 20 + 20 = 40$

Суммарно в 2х областях:
 $240 + 40 = 280 кг$

Ответ: 280 кг



5) В двух областях есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно за сутки суммарно добыть в двух областях?

I	II
160 раб по 5 ч.	160 раб по 5 ч
x кг - 0,1 кг Al	x кг = x^2 чел/час Al
или y кг - 0,1 кг Ni	y кг = y^2 чел/час Ni
Найти суммарно в 2-х областях	

I $160 \cdot 5 \cdot 0,1 = 80 \text{ кг}$

II Пусть Al добывают m чел по 5 ч.
 \Rightarrow Ni добывают $(160-m)$ чел по 5 ч.

Al
 $5m = x^2$
 $x = \sqrt{5m}$

Ni
 $5(160-m) = y^2$
 $y = \sqrt{5(160-m)}$

$$f(m) = x + y = \sqrt{5m} + \sqrt{5(160-m)}$$

$$f'(m) = \frac{5}{2\sqrt{5m}} - \frac{5}{2\sqrt{5(160-m)}}$$

$$f'(m) = 0, \quad \sqrt{800-5m} - \sqrt{5m} = 0$$

$$m = 80$$

$$f'(80) = \sqrt{400} + \sqrt{400} = 40$$

Суммарно в 2-х областях:

$$80 + 40 = 120 \text{ кг}$$

Ответ: 120 кг



6) В распоряжении начальника имеется бригада рабочих в составе 24 человек. Их нужно распределить на день на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $4t^2$ у. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 у. е. Как нужно распределить на эти объекты бригаду рабочих, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько у. е. в этом случае придется заплатить рабочим?

I объект	II объект
t чел — $4t^2$ у. е.	t чел — t^2 у. е.
Т.к. всего 24 чел, то пусть	
x чел ↓ $4x^2$ у. е.	\Rightarrow $(24-x)$ чел ↓ $(24-x)^2$ у. е.
Суммарно: $4x^2 + (24-x)^2$ у. е.	

Введем функцию:

$$f(x) = 4x^2 + (24-x)^2 = 5x^2 - 48x + 576 \text{ (у. е.)}$$

должна быть наименьшей

$f(x)$ наим в x вершине

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{48}{10} = 4,8 \quad (4 < 4,8 < 5)$$

т.к. $x \in \mathbb{N}$ и $0 < x < 24$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ или } x = 5$$

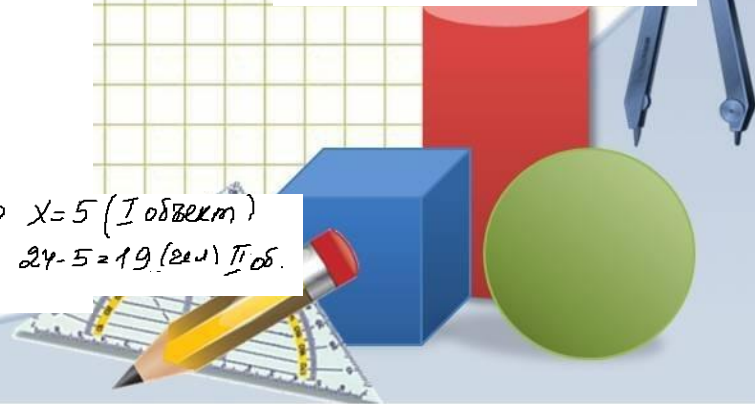
$$f(4) = 5 \cdot 16 - 48 \cdot 4 + 576 = 464$$

$$f(5) = 5 \cdot 25 - 48 \cdot 5 + 576 = 461$$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ (I объект)}$$

$24 - 5 = 19 \text{ (чел)} \text{ II об.}$

Ответ: I — 5 чел
II — 19 чел
461 у. е.



7) Иван является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование.

В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара;

если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Иван платит рабочему 500 рублей.

Иван готов выделять 6 800 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

I завод	II завод
$t^2 \text{ ч} - 3t \text{ ед. тов.}$	$t^2 \text{ ч} - 5t \text{ ед. тов.}$
За 1 ч - 500 р.	
Всего 6800000 р. в нед.	
1) $6800000 : 500 = 13600 \text{ (ч)}$	
2) Пусть	
I завод	II завод
$x^2 \text{ ч} - (3x) \text{ ед. тов.}$	$y^2 \text{ ч} - (5y) \text{ ед. тов.}$
тогда,	
$x^2 + y^2 = 13600 \text{ ч.}$ всего часов	
$\Rightarrow y^2 = 13600 - x^2$	
$y = \sqrt{13600 - x^2}$	

Кол-во товара на 2х заводах

$$3x + 5y = 3x + 5\sqrt{13600 - x^2}$$

Введем функцию:

$$f(x) = 3x + 5\sqrt{13600 - x^2}$$

$$f'(x) = 3 - \frac{5x}{\sqrt{13600 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0, \quad 3 - \frac{5x}{\sqrt{13600 - x^2}} = 0$$

$$3\sqrt{13600 - x^2} = 5x$$

$$9(13600 - x^2) = 25x^2$$

$$24x^2 = 3 \cdot 13600$$

$$x^2 = 3600$$

$$x = 60$$

$$f(60) = 3 \cdot 60 + 5\sqrt{13600 - 3600} = 680$$

Ответ: 680 ед. тов

