# Консультация по математике для 9-х классов по подготовки к ОГЭ «Построение графиков функций»

## (на примере задания 23)

**Шелудько Ирина Анатольевна,**
учитель математики
высшей квалификационной категории
МБОУ СОШ №1

## Задание 23 в материалах ОГЭ

Уметь выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения, неравенства и их системы, строить и читать графики функций, строить и исследовать простейшие математические модели

**<u>Задача 1</u>: Постройте график функции $y = \frac{x^4-13x^2+36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях параметра $c$ прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.**

Область определения функции $x \neq -2, \quad x \neq 3.$

Обратим внимание на числитель: $x^4 - 13x^2 + 36$. Это биквадратное уравнение. Оно решается методом замены: $x^2 = t$. Но в случае с приведенным квадратным уравнением можно обойтись и без этого. Его корни можно найти с помощью теоремы Виета:

$$x_1 + x_2 = -b,$$
$$x_1 \cdot x_2 = c.$$

В нашем уравнении $b = -13, c = 36$. Надо подобрать такую пару чисел, сумма которых будет равна 13, а произведение равно 36. Очевидно, что это числа 4 и 9. Таким образом, корни числителя найдены:

$$x_1 = 4, \qquad x_2 = 9.$$

Квадратный трехчлен можно разложить на множители следующим образом

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Но мы имеем дело с биквадратным уравнением – значит, скорректируем:

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x^2 - x_1)(x^2 - x_2).$$

В нашем уравнении, являющемся числителем, $a = 1$. Значит, числитель мы можем записать в следующем виде:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 4)(x^2 - 9).$$

Полученное выражение тоже раскладывается – теперь уже по формуле сокращенного умножения. Начнем с первого множителя:

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2).$$

Теперь второй множитель:

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3).$$

Собираем вновь числитель и получаем уравнение функции в новом виде:

$$y = \frac{(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)}.$$

$y = (x-2)(x+3).$

$y = x^2 + x - 6.$

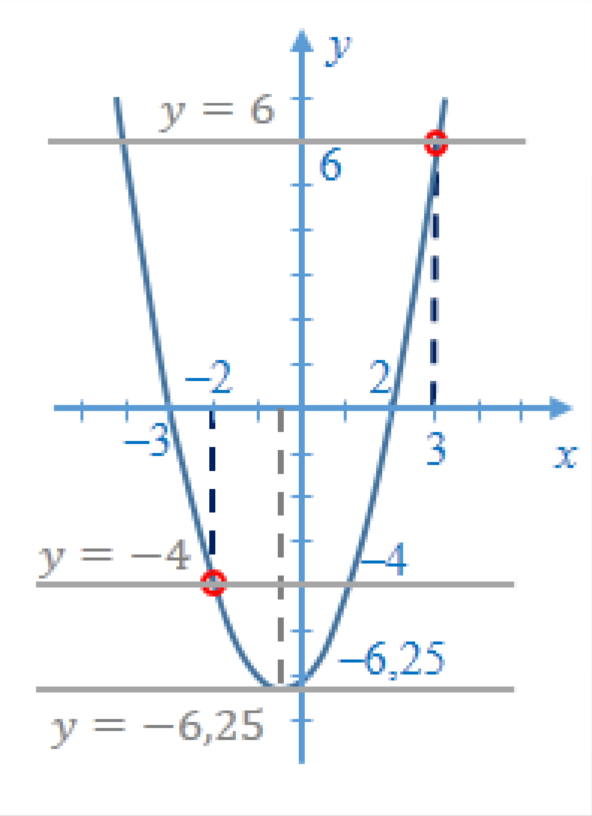
Вершина параболы

$x_0 = -\frac{1}{2},$

$y_0 = -6{,}25.$

$$y_1 = -2^2 + (-2) - 6 = 4 - 2 - 6 = -4,$$
$$y_2 = 3^2 + 3 - 6 = 9 + 3 - 6 = 6.$$

Итак, в параболе надо выколоть точки $(-2; -4)$ и $(3; 6)$.




Теперь решим вторую часть. Прямая $y = c$ имеет ровно одну общую точку при трех значениях $c$. Первая точка определяется сразу: $y = -6{,}25$. Но кроме того, выколоты точки $(-2; -4)$ и $(3; 6)$. То есть в этих точках функции не существует, парабола в них прерывается, и там пустота. Значит, в точках $y = -4$ и $y = 6$ прямая пересекает только одну ветвь параболы.

Следовательно, мы решили и вторую часть задачи: при $c = -6{,}25$, $c = -4$ и $c = 6$ прямая $y = c$ имеет одну общую точку с графиком заданной функции.

Ответ: $c = -6{,}25$; $c = -4$; $c = 6$.

**<u>Задача 2</u>**. **Найдите все значения $k$, при которых прямая $y = kx$ пересекает в трёх различных точках график функции:**

$$y = \begin{cases} 3x + 7, \text{ если } x < -3 \\ -2, \text{ если } -3 \le x \le 3 \\ 3x - 11, \text{ если } x > 3 \end{cases}$$

функция $y = -2$ это прямая, параллельная оси $x$.

Разберемся с другими частями функции:

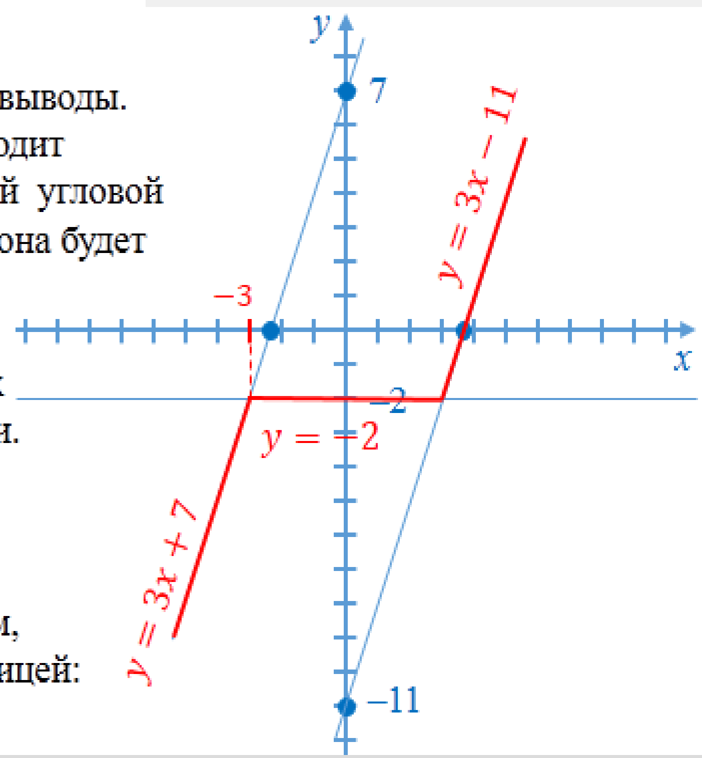
| $y = 3x + 7$ | | | $y = 3x - 11$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | $-2\frac{1}{3}$ | $x$ | 0 | $3\frac{2}{3}$ |
| $y$ | 7 | 0 | $y$ | $-11$ | 0 |

Теперь рисуем график.

Как видим, это ломаная. Делаем выводы.

Понятно, что прямая $y = kx$ проходит через центр координат. Если в ней угловой коэффициент $k$ будет равен 3, то она будет параллельна прямым $y = 3x + 7$ и $y = 3x – 11$. Следовательно, такая прямая не будет иметь трех общих точек с графиком функции. Если коэффициент будет больше 3, то в этом случае она тоже не получит трех общих точек. Таким образом, мы определились с верхней границей:

$$k < 3.$$



Прямая $y = kx$, пересекая центр координат, не должна проходить через точку (–3; –2), так как в этом случае она опять же не будет иметь трех общих точек с графиком. Следовательно, ее угловой коэффициент должен быть больше прямой, проходящей через эту точку. Значит, чтобы решить задачу, надо найти величину углового коэффициента прямой, проходящей через точку (–3; –2). Уясним для себя: –3 – это абсцисса точки, –2 ее ордината. Подставляем их в уравнение прямой $y = kx$ и находим ее угловой коэффициент:

$$-2 = k \cdot (-3),$$

$$k = \frac{-2}{-3},$$

$$k = \frac{2}{3}.$$

Задача решена: чтобы прямая $y = kx$ имела три общих точки с графиком представленной функции, ее угловой коэффициент $k$ должен быть больше $\frac{2}{3}$, но меньше 3.

Ответ: $\frac{2}{3} < k < 3$, или $(\frac{2}{3}; 3)$

**<u>Задача 3</u>. Найдите все значения $k$, при каждом из которых прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = -x^2 - 6,25$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.**

Поскольку надо найти общую точку двух функций, то приравняем их:

$$kx = -x^2 - 6{,}25.$$

Приравняем к нулю и умножим на –1, чтобы избавиться от знака минус перед первым коэффициентом и тем самым упростить квадратное уравнение:

$$-x^2 - 6{,}25 - kx = 0,$$

$$x^2 + kx + 6{,}25 = 0.$$

Отметим коэффициенты:

$a = 1,\quad b = k,\quad c = 6{,}25.$

Находим дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac = k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6{,}25 = k^2 - 25.$$

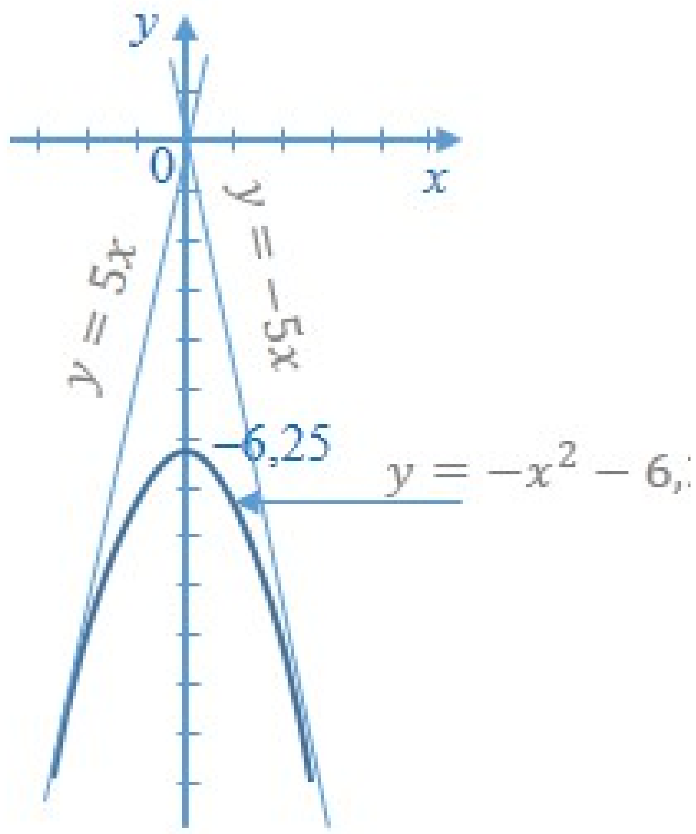
В задаче сказано, что надо найти одну общую точку – то есть один корень. А квадратное уравнение имеет один корень только в том случае, если дискриминант равен нулю. Значит, приравняем дискриминант к нулю и решим уравнение:

$$k^2 - 25 = 0,$$

$$k^2 = 25,$$

$$k = \sqrt{25},$$

$$k = \pm 5.$$




Прямая $y = kx$ имеет с графиком функции ровно одну общую точку при $k = –5$ и $k = 5$.
То есть:
$y = –5x$
$y = 5x$.
Задача решена полностью.

Ответ: –5; 5.

**<u>Задача</u> 4 . Постройте график функции $y = |x^2 - x - 2|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?**

Построим параболу и отобразим относительно Ох ту часть графика, где функция принимает отрицательные значения

Найдем вершину параболы. Ее абсциссу можно вычислить по формуле:

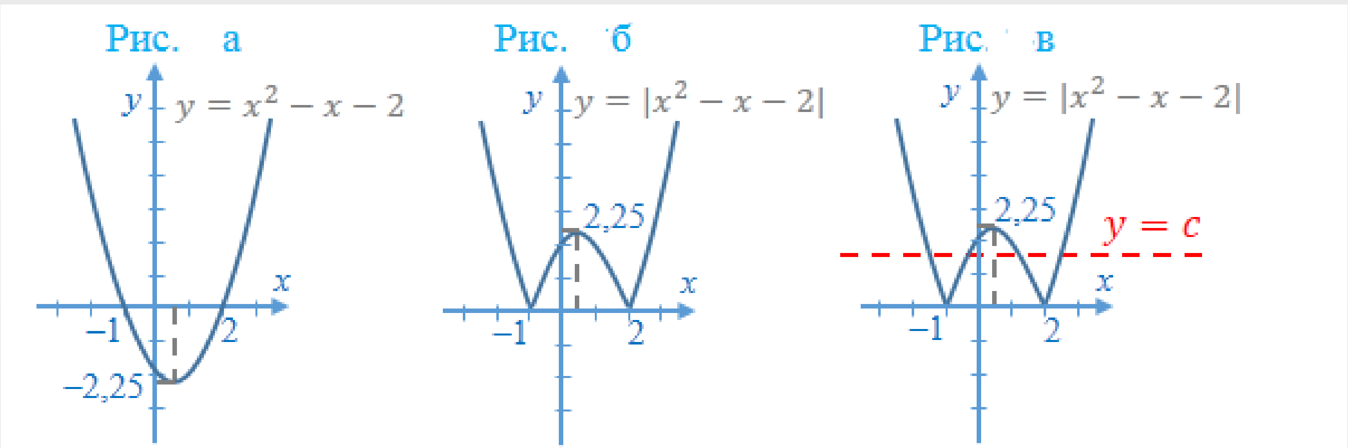
$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Коэффициенты нам известны (см.выше). Вычисляем абсциссу:

$$x_0 - \frac{-1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Подставим в уравнение функции полученное значение абсциссы и вычислим ординату вершины:

$$y_0 = 0{,}5^2 - 0{,}5 - 2 = 0{,}25 - 0{,}5 - 2 = -2{,}25.$$




Прямая $y = c$ параллельна оси $x$ она может иметь с графиком функции не более 4 общих точек.

<u>Ответ</u>: 4.

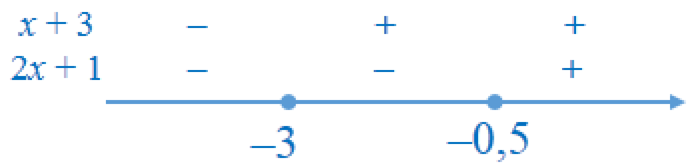
**Задача 5** . **Постройте график функции** $y = |x+3| + |2x+1| - x$.

Приравняем каждое подмодульное выражение к нулю и найдем точки, в которых происходит смена знака:

$x + 3 = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = -3.$

$2x + 1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad 2x = -1 \quad \leftrightarrow \quad x = -0{,}5.$

Отметим точки на числовой оси, определим интервалы знакопостоянства:




Раскроем модули для каждого из трех интервалов.

В интервале $x \le -3$ оба подмодульных выражения со знаком минус. Пишем:

$$\begin{cases} x \le -3 \\ y = -(x+3) - (2x+1) - x \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \le -3 \\ y = -4x - 4 \end{cases}$$

В промежутке $-3 \le x \le -0{,}5$ первое подмодульное выражение со знаком плюс, второе – со знаком минус. Учтем и это:

$$\begin{cases} -3 \le x \le -0{,}5 \\ y = (x+3) - (2x+1) - x \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le -0{,}5 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$

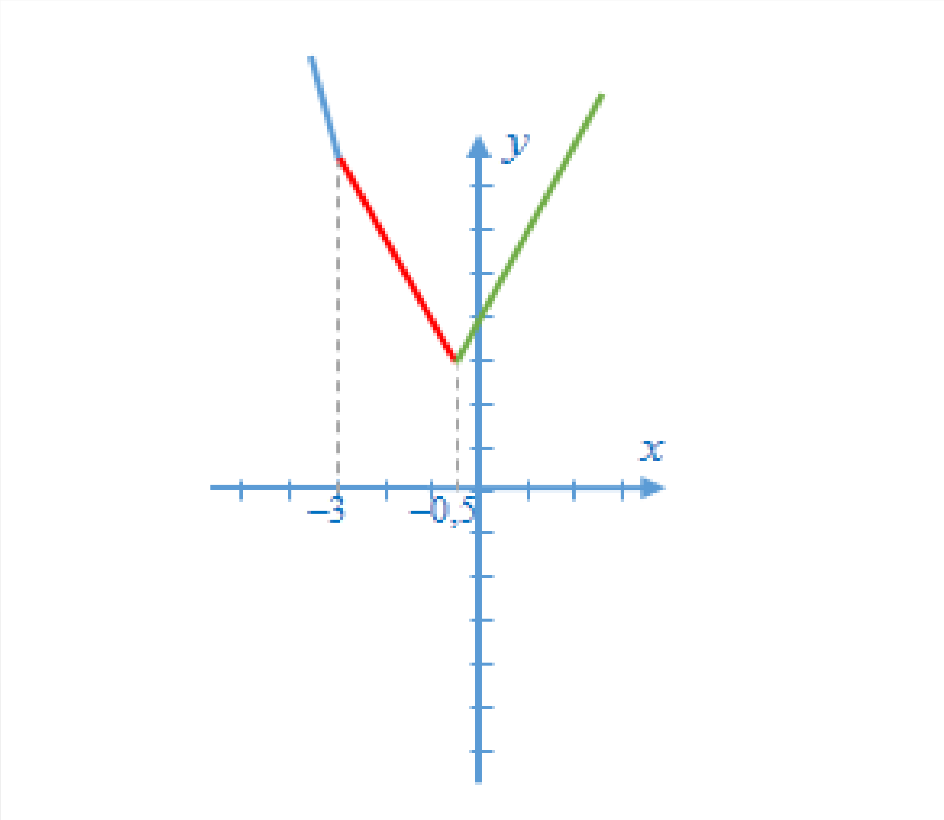
В промежутке $x \ge -0{,}5$ оба подмодульных выражения со знаком плюс:

$$\begin{cases} x \ge -0{,}5 \\ y = (x+3) + (2x+1) - x \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \ge -0{,}5 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$$

В результате наша функция обрела иной вид:

$$y = \begin{cases} -4x - 4, \text{если } x \le -3 \\ -2x + 2, \text{если } -3 \le x \le -0{,}5 \\ 2x + 4, \text{если} x \ge -0{,}5 \end{cases}$$

Все три подфункции – линейные, их графиками являются прямые.



**<u>Задача</u> 6 . Постройте график функции $y = |x|x + |x| - 6x$ и определите, при каких значениях m прямая y = m имеет с графиком ровно две общие точки.**

Раскроем модули.

При x < 0:

$$y = -x \cdot x + (-x) - 6x = -x^2 - x - 6x = -x^2 - 7x.$$

При x ≥ 0:

$$y = x \cdot x + x - 6x = x^2 - 5x.$$

Наше функция обрела иной вид:

Находим корни (нули) функции.

Приравняем к нулю первое уравнение и решим его:

$$-x^2 - 7x = 0 \quad \leftrightarrow \quad -x(x+7) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} -x = 0 \\ x + 7 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -7 \end{cases}$$

Определим нули второго уравнения:

$$x^2 - 5x = 0 \quad \leftrightarrow \quad x(x-5) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x - 5 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$$

Найдем вершину первой параболы. Для этого сначала отметим коэффициенты первого уравнения:

$$a = -1, \quad b = -7, \quad c = 0.$$

Находим абсциссу вершины:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-7}{2 \cdot (-1)} = -\frac{7}{2} = -3{,}5.$$

Находим ординату вершины:

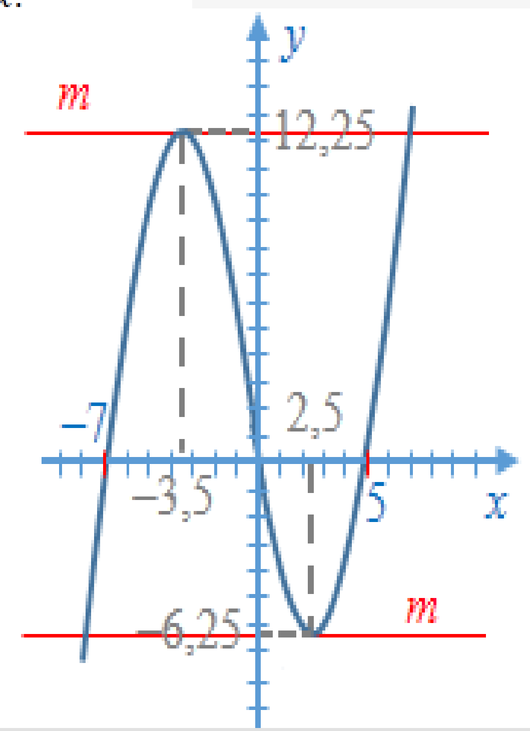
$$y_0 = -1 \cdot (-3{,}5)^2 - 7 \cdot (-3{,}5) = -1 \cdot 12{,}25 + 24{,}5 = 12{,}25.$$

Перейдем ко второй параболе. Отметим коэффициенты второго уравнения:

$$a = 1, \quad b = -5, \quad c = 0.$$

Найдем координаты вершины второй параболы:

$$x_0 = -\frac{-5}{2 \cdot 1} = \frac{5}{2} = 2{,}5, \qquad y_0 = 2{,}5^2 - 5 \cdot 2{,}5 = 6{,}25 - 12{,}5 = -6{,}25.$$




прямая $y = m$ имеет ровно две общие точки с заданной функцией при $m = -6{,}25$ и $m = 12{,}25$.

Задача решена.

<u>Ответ</u>: = –6,25; 12,25.

**Задача 7** **Постройте график функции:**

$$y = \frac{3x+5}{3x^2+5x}.$$

**Определите, при каких значениях $k$ прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.**

Найдем область определения функции

Приравняем знаменатель к нулю и найдем эти значения:

$$3x^2 + 5x = 0,$$

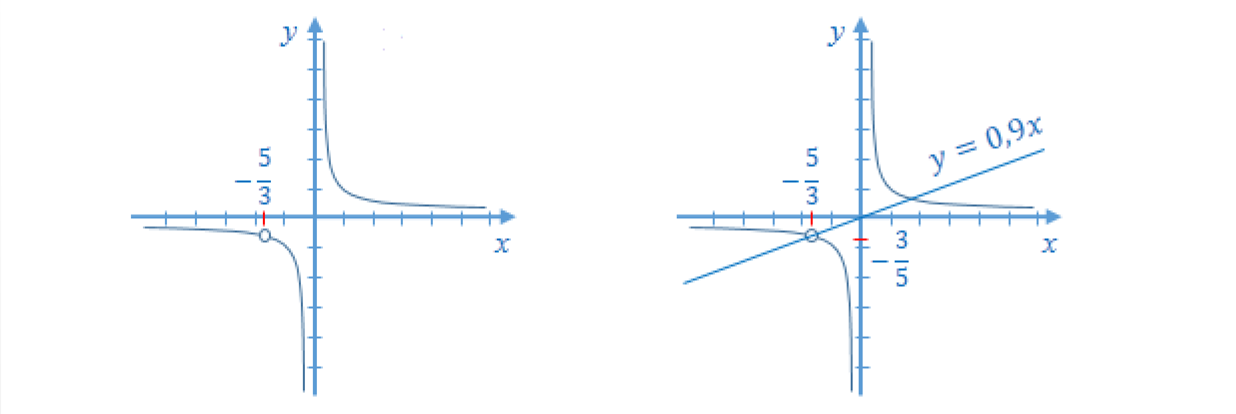
$$x(3x+5) = 0,$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ 3x + 5 = 0 \end{array}\right. \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ 3x = -5 \end{array}\right. \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\frac{5}{3} \end{array}\right.$$

Итак, в этих двух точках функция не существует. На графике их надо будет выколоть.

Теперь упрощаем функцию:

$$y = \frac{3x+5}{x(3x+5)} = \frac{1}{x}.$$




Переходим ко второй части задачи. Из графика видно, что прямая может иметь ровно одну общую точку с графиком только в том случае, если она пройдет через выколотую точку. Абсцисса этой точки нам известна – находим ординату:

$$y = \frac{1}{-\frac{5}{3}} = -\frac{3}{5} \text{ (рис. 16б).}$$

Подставляем значения $x$ и $y$ выколотой точки в уравнение прямой и получаем ответ:

$$-\frac{5}{3}k = -\frac{3}{5}$$

$$k = -\frac{3}{5} : \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{9}{10} = 0{,}9$$

При $k = 0{,}9$ прямая имеет ровно общую точку с графиком заданной функции.

Ответ: 0,9.

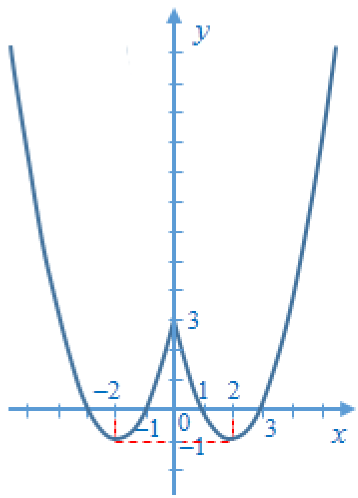
**Задача 8 . Постройте график функции $y = x^2 - 4|x| + 3$ и определите, при каких значениях параметра $a$ прямая $y = a$ имеет с графиком ровно две общие точки.**

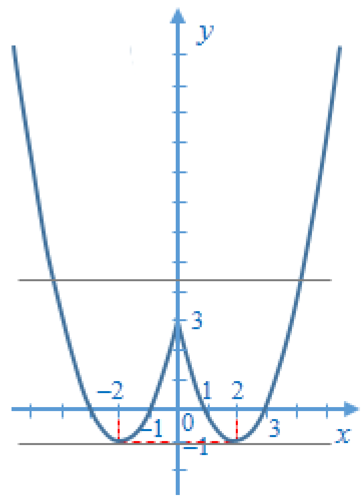
Данный график можно получить из графика функции $y = x^2 - 4x + 3.$

Путем симметричного отображения относительно Oy той части графика, где х неотрицательное число

Находим координаты вершины:

$$x_{\text{в}} = -\frac{-4}{2} = 2, \qquad y_{\text{в}} = -\frac{D}{4a} = -\frac{4}{4} = -1.$$




прямая $y = a$ имеет с графиком ровно две общие точки при $a = -1$ и $a \in (3; +\infty)$.

Ответ: $-1$; $(3; +\infty)$.

**<u>Задача 9</u> . Постройте график функции:**

$$y = \frac{1}{2}\left(\left|x - \frac{1}{x}\right| + x + \frac{1}{x}\right).$$

**Определите, при каких значениях $m$ прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.**

Область определения функции: $x \neq 0$

Раскроем подмодульное выражение. Для этого приравняем его к нулю и решим:

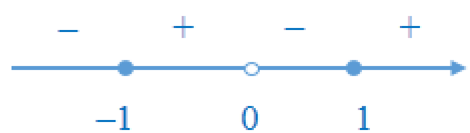
$$x - \frac{1}{x} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 1}{x} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{(x-1)(x+1)}{x} = 0.$$

Дробь равна нулю только в том случае, если числитель равен нулю.

Приравняем числитель к нулю и решим уравнение:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Отметим полученные точки на числовой оси и определим знаки интервалов. При этом не забудем о точке 0. Хотя в этой точке функция не существует, она тоже образует интервал знакопостоянства:



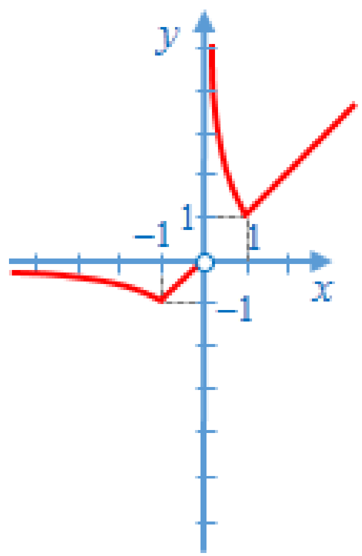
Таким образом, наша функция обрела новый вид:

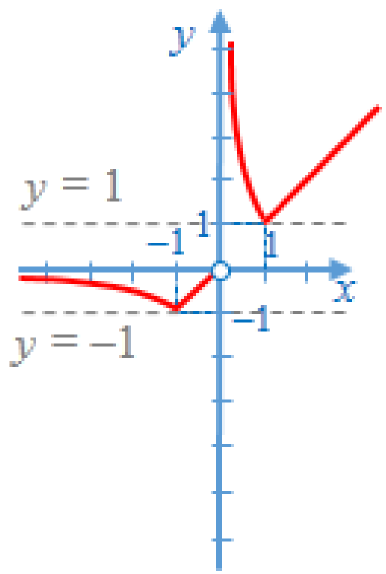
$$y = \begin{cases} x, \text{при } -1 \le x < 0 \text{ и } x \ge 1 \\ \dfrac{1}{x}, \text{при } x < -1 \text{ и } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

Найдем несколько точек по каждой подфункции, чтобы нарисовать график:

1: (–0,8; –0,8), (–0,2; –0,2), (2; 2), (3; 3).

2: (–4; –0,25), (–3; $-\frac{1}{3}$), (–2; –0,5), (–1; –1), (0,2; 5), (0,5; 2), (0,8; 1,25), (1; 1).




Как видим, прямая $y = m$ имеет ровно одну общую точку с графиком функции при $m = -1$ и $m = 1$.

Ответ: –1; 1.

**<u>Задача</u> 10. Найдите все положительные значения $k$, при которых прямая $y = kx$ пересекает в двух точках ломаную, заданную условиями:**

$$y = \begin{cases} -3x - 4, \text{если } x < -2 \\ 2, \text{если } -2 \le x \le 2 \\ 3x - 4, \text{если } x > 2 \end{cases}$$

График функции и прямая $y = kx$ в точке пересечения имеют одинаковые координаты – то есть в этих точках они равны. Приравняем прямую и первую формулу и выразим $x$ через $k$:

$$-3x - 4 = kx,$$
$$-3x - kx = 4,$$
$$-x(3 + k) = 4,$$
$$x = -\frac{4}{3+k}.$$

Подставим значение $x$, выраженное через $k$, в третье уравнение:

$$y = 3 \cdot \left(-\frac{4}{3+k}\right) - 4 = -\frac{12 - 4(3+k)}{3+k} = -\frac{12 - 12 - 4k}{3+k} = \frac{4k}{3+k}.$$

$$\frac{4k}{3+k} = 2 \quad \to \frac{4k}{3+k} - 2 = 0 \quad \to \quad \frac{4k - 2(3+k)}{3+k} = 0 \quad \to \quad \frac{2k-6}{3+k} = 0.$$

Дробь равна нулю только в том случае, если числитель равен нулю. Приравняем числитель к нулю и найдем $k$:

$$2k - 6 = 0,$$
$$2k = 6,$$
$$k = 3.$$

Одно значение $k$ мы нашли.

Теперь обратим внимание на второе уравнение системы. Прямая $y = kx$ может проходить и через эту часть графика функции, а в ней нам определенно известно значение $y$. Подставим его в любое другое уравнение системы и найдем соответствующее значение $x$:

$$3x - 4 = 2,$$
$$3x = 6,$$
$$x = 2.$$

Подставим эти значения в уравнение прямой $y = kx$ и найдем второе значение $k$:

$$k \cdot 2 = 2,$$
$$k = 1.$$

<u>Ответ</u>: 1; 3.

## Материалы по подготовке к ОГЭ по математике

Прототипы заданий второй части ОГЭ по математике
http://alexlarin.net/gia/21-26-2015.html

http://4oge.ru/novosti/211-bank-zadaniy-oge-fipi.html
Банк заданий ОГЭ ФИПИ

http://reshuoge.ru/
«Решу ОГЭ». Математика. Обучающая система Дмитрия Гущина