«Как решать задание 15 ЕГЭ по математике профильного уровня»

Подготовила учитель высшей категории

Татчин Ульяна Вирославовна

СУРГУТ
2020

Задание №15 в ЕГЭ профильного уровня являет собой неравенство: алгебраическое, показательное или логарифмическое.

Если эта задача решается легко, значит вы хорошо освоили школьную математику.

Вспомним что можно делать с неравенствами или чего с ними делать нельзя.

При решении неравенств **можно**:

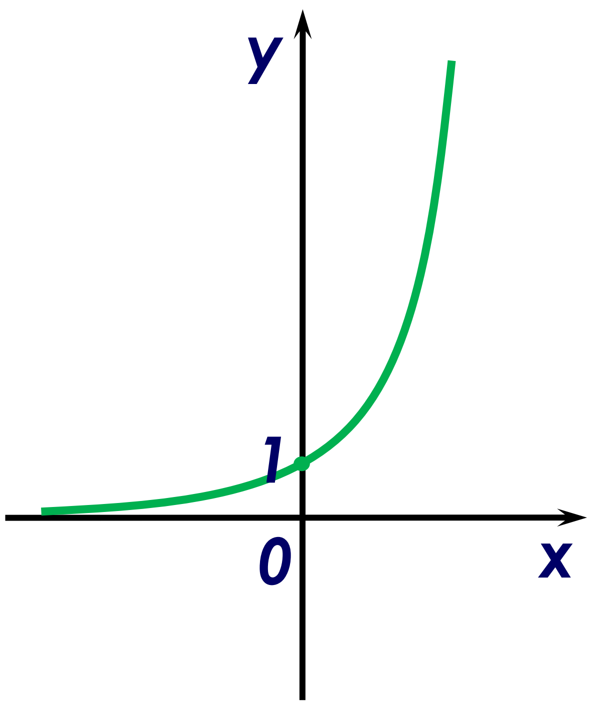
1. Умножать обе части неравенства на число или выражение, не равное нулю.
2. Можем возводить обе части неравенства в квадрат при условии, что они неотрицательны

3. Имея дело с показательным или логарифмическим неравенством, мы можем «отбрасывать» основания или логарифмы.

График показательной функции

$y = a^x,\ a \neq 1,\ a > 0$

$y = a^x,\ a > 1$



$y = a^x,\ 0 < a < 1$

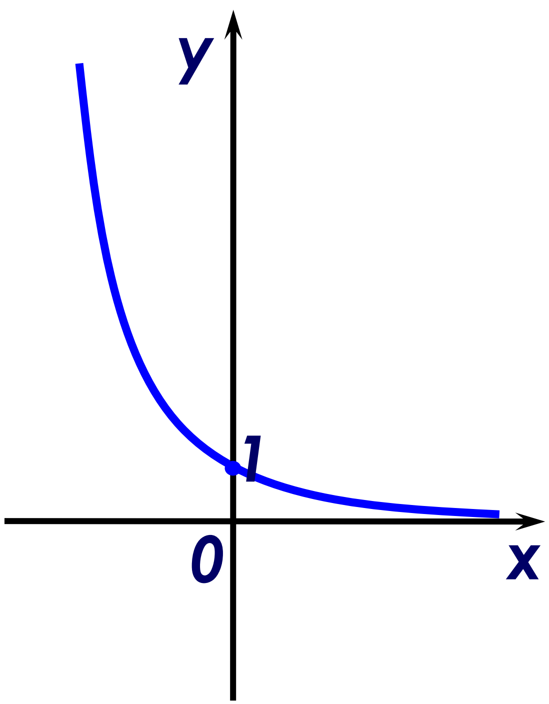
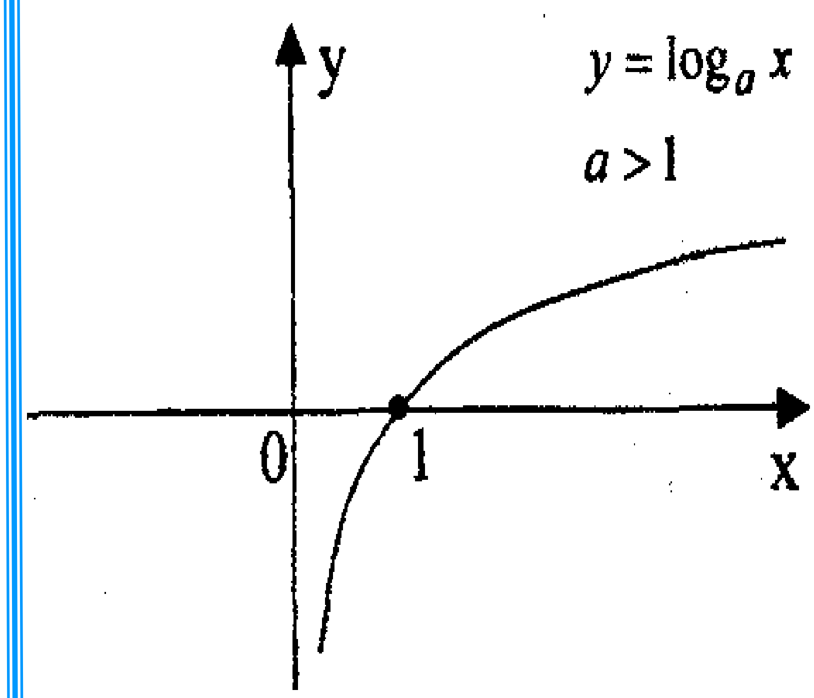
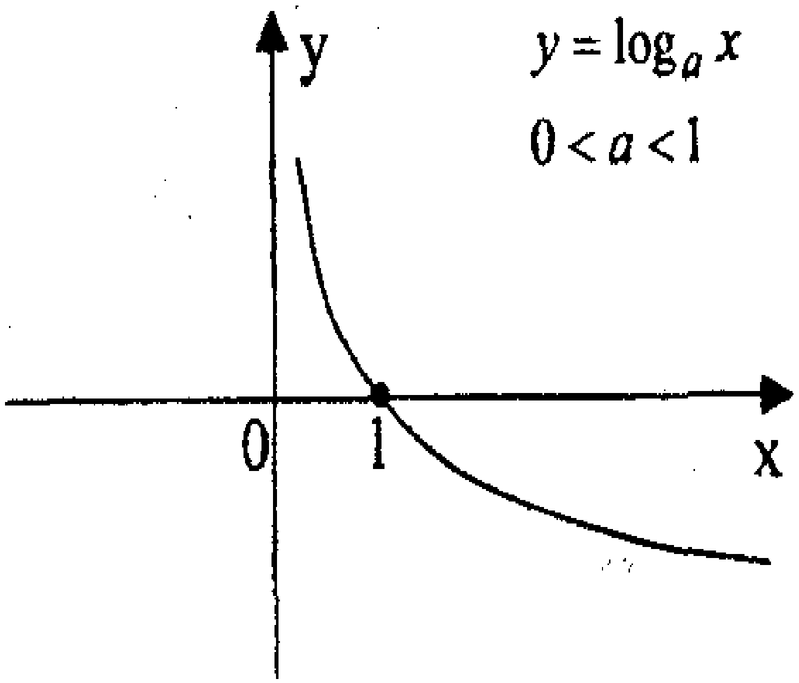


График логарифмической функции

$y = \log_a x$, $a \neq 1$, $a > 0$, $x > 0$





4. При решении показательных и логарифмических неравенств применяется метод рационализации.
5. Общее правило. Если неравенство можно хоть как-то упростить – это необходимо сделать. Иначе его решение может занять восемь страниц и два часа времени.

Чего нельзя делать? Вот 7 ловушек, в которые часто попадают при решении неравенств.

1. Нельзя умножать (или делить) неравенство на выражение, знака которого мы не знаем.

Например, в неравенстве $x(3x-2) > x(x+1)$ нельзя поделить левую и правую часть на x.

Правильный способ: все перенести в левую часть неравенства, разложить на множители и решить неравенство методом интервалов:

$$x(3x-2)-x(x+1)>0$$

$$x(2x-3)>0$$

Получаем, что $x>0$ или $x>\frac{3}{2}$. "Сократив" на x, который может быть отрицательным , мы не получили бы правильного ответа.

2. Извлекать из неравенства корень тоже нельзя. Такого действия просто нет. Как , например, решить неравенство $x^2>100$?

Перенесем все в левую часть неравенства, чтобы в правой остался ноль.

$$x^2-100>0$$

Разложим левую часть на множители.

$$(x-10)(x+10)>0$$

Решим неравенство, пользуясь свойствами квадратичной функции $y=x^2-100$, и запишем ответ : $x<-10$ или $x>10$.

Запомним: ответы типа «$x>\pm10$» абсурдны.

3. Как решать неравенство $x^2>0$?

Это типичная ловушка для выпускников. Так и хочется сказать , что $x>0$ (то есть извлечь корень из неравенства). Но это делать нельзя. Выражение x^2 положительно при всех x, кроме нуля.

Правильное решение неравенства: $x\neq0$

4. Возводить обе части неравенства в квадрат можно, только если они неотрицательны.

5. Помним о том, в каких случаях знак показательного или логарифмического неравенства меняется, а в каких остается тем же. «Отбрасывая» логарифмы, делаем это грамотно.
6. Если в неравенстве есть дроби, корни четной степени или логарифмы – там обязательно будет область допустимых значений.
7. Сложная тема для старшеклассников - задачи с модулем.

№1. Решите неравенство

$$3^{lgx}+6\frac{2}{3}\cdot 3^{0,5lgx}\cdot 2^{0,5(lgx-6)} \leq 2^{lgx}$$

Решение:

$$3^{lgx}+\ \frac{20}{3}\cdot 3^{\frac{lgx}{2}}\cdot\ \frac{2^{\frac{lgx}{2}}}{2^3} \leq 2^{lgx}$$

Обозначим $3^{\frac{lgx}{2}} =$ t, $2^{\frac{lgx}{2}}$ =z ; t $> 0, z > 0$

Тогда $3^{lgx}=t^2,\ 2^{lgx}= z^2$

Получим:

$$t^2+\frac{20}{3\cdot 8}\cdot t\cdot z - z^2 \leq 0$$

$$t^2+\frac{5}{6}\cdot t\cdot z - z^2 \leq 0$$

Домножим обе части неравенства на 6 и разделим на

$z^2 > 0.$

$6 \cdot \left(\frac{t}{z}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{t}{z}\right) - 6 \leq 0$

Замена: $\frac{t}{z} = y$, $y > 0$

$6y^2 + 5y - 6 \leq 0$

Решим неравенство методом интервалов:

$6y^2 + 5y - 6 = 0$

$D = 25 + 4 \cdot 36 = 169;\ \sqrt{D} = 13;\ y = \frac{-5 \pm 13}{12}$; $y = -\frac{3}{2}$; $y = \frac{2}{3}$

Разложим квадратный трехчлен на множители:

$$6y^2 + 5y - 6 = 6\left(y - \frac{2}{3}\right)\left(y + \frac{3}{2}\right)$$

Получим:

$$\left(y - \frac{2}{3}\right)\left(y + \frac{3}{2}\right) \le 0.$$

Поскольку $y > 0$, поделим обе части неравенства на $y + \frac{3}{2} > 0$

$$y - \frac{2}{3} \le 0$$

$$y \le \frac{2}{3}.$$

Вернемся к переменной x.

$$y = \frac{t}{z} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\lg x}{2}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-\lg x}{2}} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{1}$$

Показательная функция $y = a^x$ монотонно убывает при $0 < a < 1$, и если $\left(\frac{2}{3}\right)^{z_1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{z_2}$, то $z_1 \geq z_2$.

Значит, $-\frac{lgx}{2} \geq 1$

$\lg x \leq -2$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \lg x \le \lg 0,01 \end{cases}$$

Ответ: $x \in (0; 0,01]$.

Замена переменной помогла свести это неравенство к алгебраическому однородному. Затем мы вернулись к переменной х и воспользовались тем, что показательная функция с основанием меньшим единицы монотонно убывает. И конечно, не забываем про область определения логарифмической функции.

Решите неравенство: $\dfrac{\log_{\frac{1}{4}}(3x+1)}{log_{\frac{1}{4}}(6x-1)} < 2$

ОДЗ:

Решение:

$$\frac{\log_4(3x+1)}{\log_4(6x-1)} < 2$$

$$\begin{cases} 3x+1>0 \\ 6x-1>0 \\ 6x-1\neq 1 \end{cases}$$

$$\frac{\log_4(3x+1)}{\log_4(6x-1)} - 2 < 0$$

$$\frac{\log_4(3x+1) - 2\log_4(6x-1)}{\log_4(6x-1)} < 0$$

$$\frac{log_4(3x+1) - \log_4(6x-1)^2}{\log_4(6x-1)} < 0$$

Упростим левую часть неравенства по методу замены множителя.

Полезный прием для решения сложных неравенств на ЕГЭ по математике – **метод рационализации неравенства**. Другое название — **метод замены множителя**.

Суть метода в том, чтобы от неравенства, содержащего в качестве множителей сложные показательные или логарифмические выражения, перейти к равносильному ему более простому рациональному неравенству.

Вот таблица, позволяющая заменять сложные логарифмические (или показательные) множители в неравенствах на более простые. Эта таблица является ключом к задаче 15. Вот увидите, она выручит вас на ЕГЭ по математике:

Сложный множитель	На что заменить
$\log_h f - \log_h g$	$(h-1)(f-g)$
$\log_h f - 1$	$(h-1)(f-h)$
$\log_h f$	$(h-1)(f-1)$
$h^f - h^g$	$(h-1)(f-g)$
$h^f - 1$	$(h-1)\cdot f$
$f^h - g^h$	$(f-g)\cdot h$
f, g — функции от x. h — функция или число.	

$\frac{\quad}{g(x)} < 0.$

Конечно же, все выражения, которые содержат логарифмы, существуют при $f, g, h > 0$ и $h \neq 1$.

Когда на ЕГЭ по математике вы применяете метод рационализации (замены множителя), - обязательно поясните, что вы им воспользовались.

Обратите внимание, что мы говорим о замене множителя в неравенствах вида $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$

Знак здесь может быть любой: $>$, $\geq$, $\leq$. Правая часть обязательно должна быть равна нулю. И заменяем мы именно множитель (а не слагаемое, например). Иначе ничего не получится.

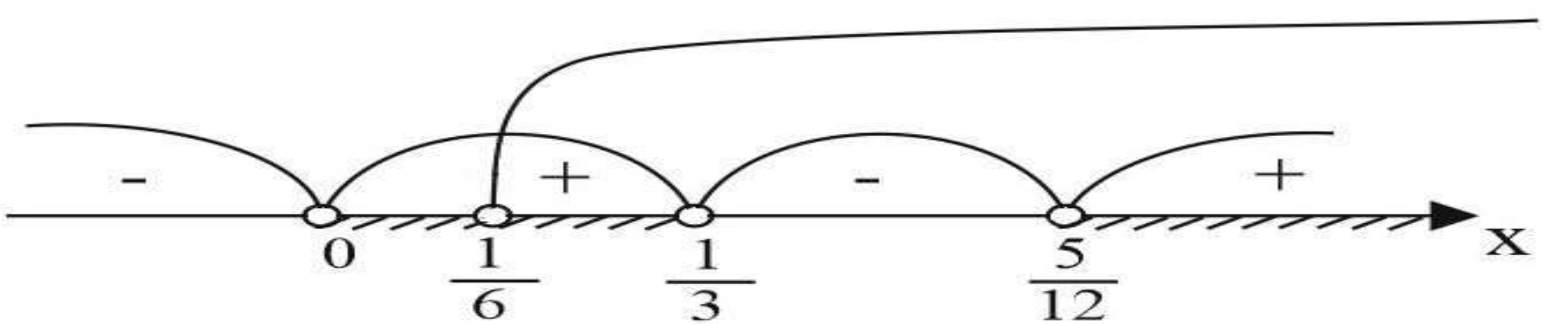
Неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \frac{(4-1)(3x+1-(6x-1)^2)}{(4-1)(6x-1-1)} < 0 \\ 3x+1>0 \\ 6x-1>0 \\ 6x-1 \neq 1 \end{cases}$$

Мы заменили множитель вида $\log_h f - \log_h g$ на $(h-1)(f-g)$, а множитель вида $\log_h f$ на $(h-1)(f-1)$

$$\begin{cases} \frac{3x+1-36x+12x-1}{3x-1} < 0 \\ x > -\frac{1}{3} \\ x > \frac{1}{6} \\ x \neq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{36x^2-15x}{3x-1} > 0 \\ x > \frac{1}{6} \\ x \neq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x(12x-5)}{3x-1} > 0 \\ x > \frac{1}{6} \\ x \neq \frac{1}{3} \end{cases}$$

Решим первое неравенство с помощью метода интервалов.



С учётом второго и третьего неравенств получим:

$$x \in \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{12}; +\infty.\right)$$

В этой задаче, кроме известных формул перехода к другому основанию логарифма, нам помог метод замены множителя, его еще называют методом рационализации.

Ребята! Помните! Сдача ЕГЭ на высокий балл – не случайность, не подарок судьбы. Это регулярная подготовка, знание специальных приемов , умение распределить и сэкономить время. Желаю вам успехов и удачи при сдаче экзамена!

Использованы материалы:

1. Учебное издание «Математика. Задания высокой и повышенной сложности», Малкова А.Г., ООО «Феникс»,2018
2. https://ege-study.ru/