УЧЕТ РЕЗУЛЬТАТОВ ГИА-2023 В ПОВЫШЕНИИ КАЧЕСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО СОВЕРШЕНСТВОВАНИЮ ПРЕПОДАВАНИЯ УЧЕБНОГО ПРЕДМЕТА «МАТЕМАТИКА»

Золотая Ирина Георгиевна,

учитель математики МБОУ СОШ №10 с УИОП

ЕГЭ, задание 12

Задание содержит два пункта:

а) решить уравнение;

б) отобрать корни на данном промежутке.

Соответственно в ответе должно быть две части:

а) все корни уравнения;

б)отобранные на данном промежутке корни.

Критерии проверки задания 12

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Вычислительная ошибка в понимании эксперта

Вычислительная ошибка – ошибка, допущенная при выполнении арифметических действий: сложение, вычитание, умножение, деление.

Задание № 12 – тригонометрическое, логарифмическое или показательное уравнение. Выделение решения уравнения в отдельный пункт а прямо указывает участникам экзамена на необходимость полного решения предложенного уравнения: при отсутствии в тексте конкретной работы ответа на вопрос пункта а задание № 12 оценивается 0 баллов.

ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ В ВАРИАНТАХ ЕГЭ 2019-2022ГГ

ЕГЭ 2019

а) Решите уравнение $2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$

ЕГЭ 2020

а) Решите уравнение $2\sin^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + \sqrt{3}\sin 2x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$

ЕГЭ 2021

а) Решите уравнение $4\cos^3 x - 2\sqrt{3}\cos 2x + 3\cos x = 2\sqrt{3}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$

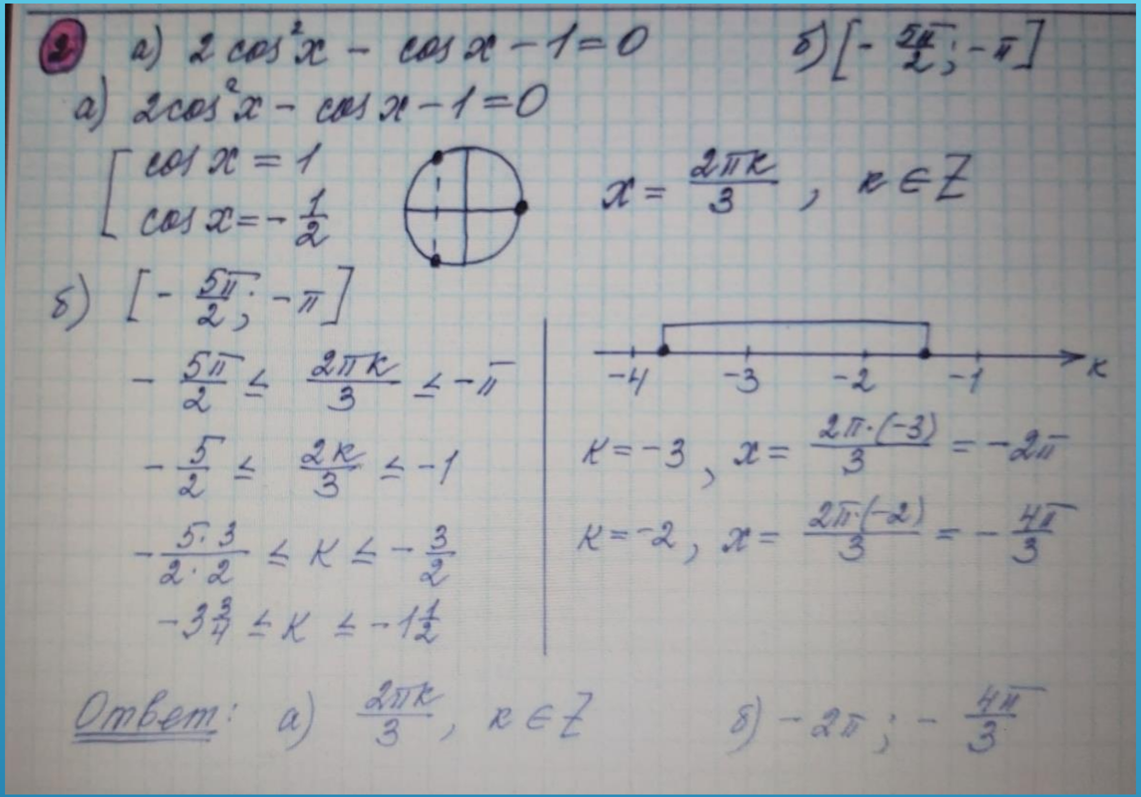
ЕГЭ 2022

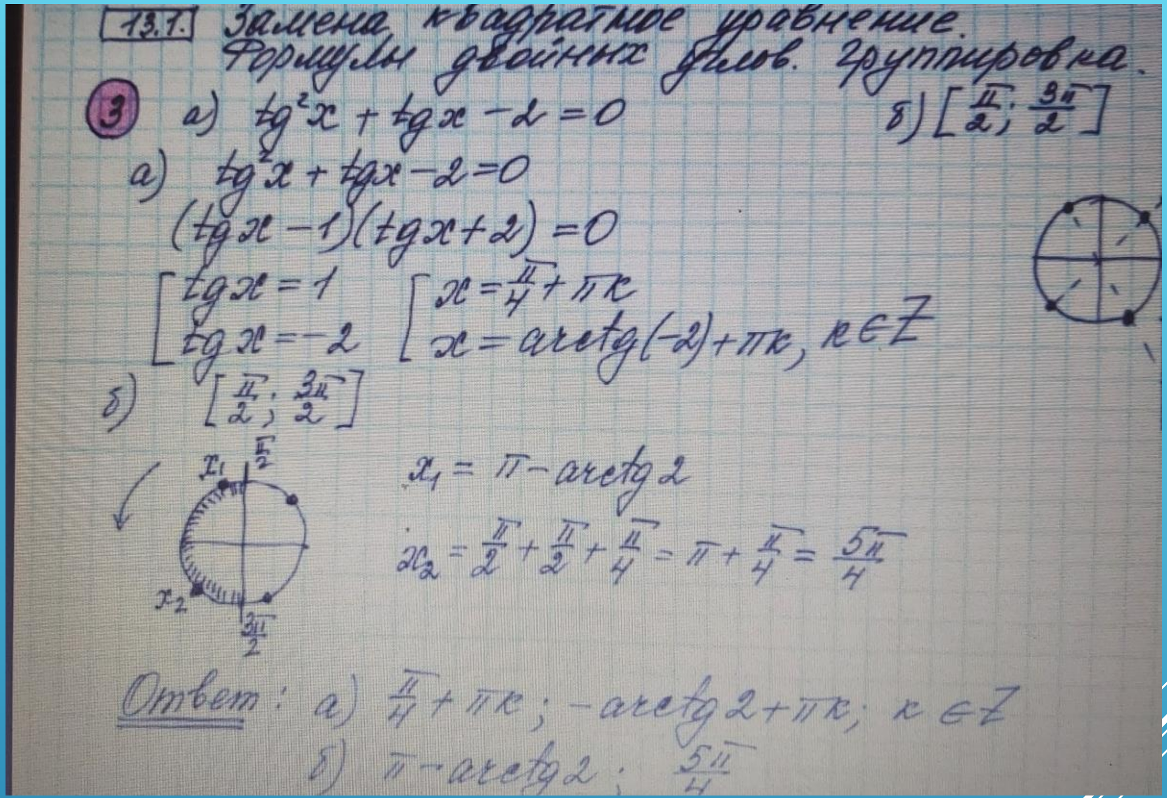
а) Решите уравнение $2\cos^2 x - 3\sin(-x) - 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$.

а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\sin(-x) - \cos(-x) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$





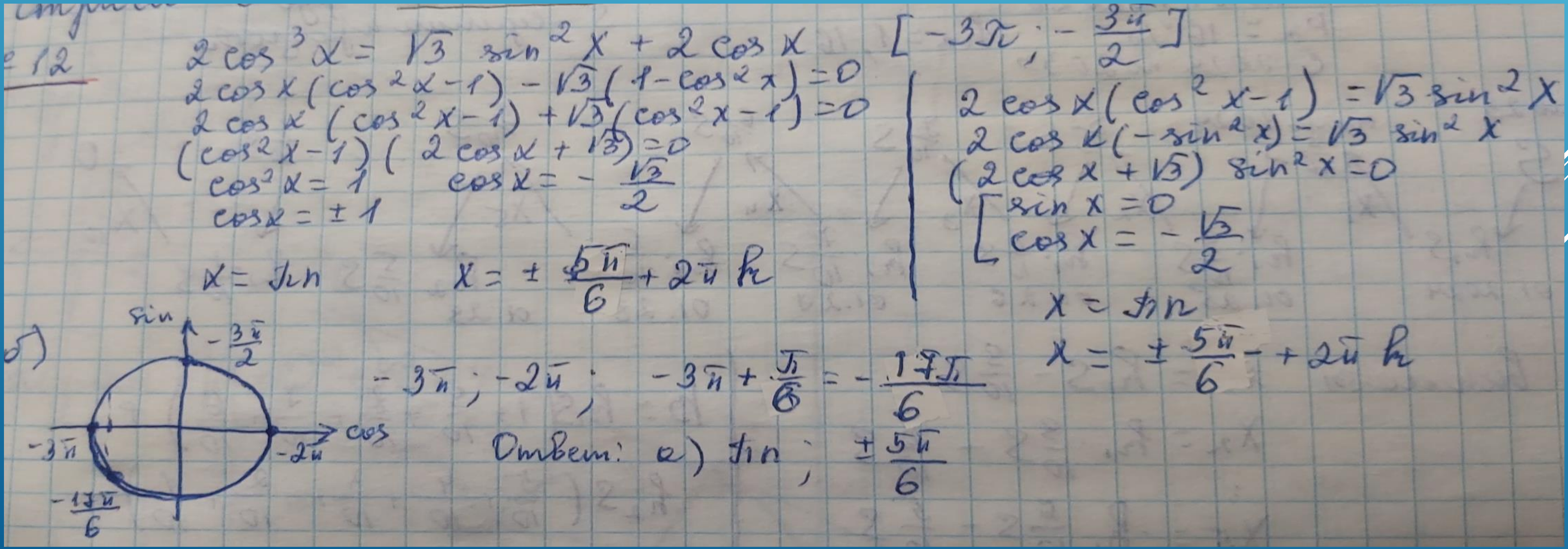
ОТБОР КОРНЕЙ В 12 ЗАДАНИИ. УЧЕНИК РЕШИЛ УРАВНЕНИЕ — ОДИН БАЛЛ. ЧТОБЫ ЗАРАБОТАТЬ ВТОРОЙ БАЛЛ, НУЖНО СОБЛЮСТИ НЕСКОЛЬКО РЕКОМЕНДАЦИЙ:

1. КОРНИ ОТБИРАЕМ ЛЮБЫМ СПОСОБОМ: С ПОМОЩЬЮ ГРАФИКА, ЧИСЛОВОЙ ОКРУЖНОСТИ, РЕШЕНИЯ ДВОЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ, ПЕРЕБОРОМ И ГРАФИЧЕСКИ.

2. СЕРИИ КОРНЕЙ ЗАПИСЫВАЕМ С РАЗНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ. ПРИ ВЫБОРКЕ КОРНЕЙ ЭТА ХИТРОСТЬ ПОМОЖЕТ НЕ ЗАПУТАТЬСЯ.

3. ПЕРЕБОР КОРНЕЙ НЕ ОСТАНАВЛИВАЕМ НА КОРНЕ, ПРИНАДЛЕЖАЩЕМУ ОТРЕЗКУ. ТАКОЙ СПОСОБ БУДЕТ НЕДОСТАТОЧНО ОБОСНОВАННЫМ, ПУНКТ «Б» НЕ ЗАСЧИТАЮТ.

4. ПРИ ОТБОРЕ КОРНЕЙ С ПОМОЩЬЮ ЧИСЛОВОЙ (ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ) ОКРУЖНОСТИ ОТМЕЧАЕМ КОНЦЫ ЧИСЛОВОГО ОТРЕЗКА, ВЫДЕЛЯЕМ ДУГУ, ОБОЗНАЧАЕМ КОРНИ.



ЕГЭ, задание 12

основные ошибки

в формулах корней простейшего тригонометрического уравнения	$sinx = \frac{1}{2}$ ✗ $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n\epsilon Z;$ $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n\epsilon Z;$ $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n.$

ЕГЭ, задание 12

основные ошибки

в формулах корней простейших тригонометрических уравнений	а) используя формулы приведения получим: $-2\cos^2 x - \cos x = 0$ $2\cos^2 x + \cos x = 0$ $\cos x(2\cos x + 1) = 0$ $\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ 2\cos x + 1 = 0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = -\frac{1}{2}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z\\ x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z\\ x_3 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in Z\\ x_4 = \frac{4\pi}{3} + 2\pi d, d \in Z\end{array}\right.$

ЕГЭ, задание 12

основные ошибки

Незнание множества значений тригонометрических функций	$sinx = \frac{4}{3}$ ✗ $x = (-1)^n arcsin\frac{4}{3} + 2\pi n, n\epsilon Z$ $cosx = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ $x = \pm arccos\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z$

$\boxed{-1 \le sinx \le 1}$ $\boxed{-1 \le cosx \le 1}$ ✓

ЕГЭ, задание 12

основные ошибки

Деление обеих частей уравнения на sinx или на cosx.	$sin^2x = cosxsinx \quad /: sinx$ ✗ !!! потеря серии корней: $x = \pi n, n\epsilon Z$

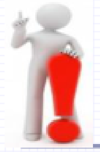
$ax^2 + bx = 0$

$x(ax + b) = 0$

$sin^2x - cosxsinx = 0$ ✓

$sinx(sinx - cosx) = 0$

$sinx = 0$ или $sinx - cosx = 0$



ЕГЭ, задание 12

основные ошибки

При решении уравнений вида:
$\sin^2 x = a$; $\cos^2 x = a$.

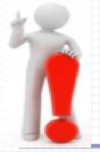
$$\cos^2 x = \frac{3}{4}$$
$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

!!! *потеря серии корней:*

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \epsilon Z$$

$$x^2 = a$$
$$x_1 = \sqrt{a} \text{ или } x_2 = -\sqrt{a}$$

$$\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$
$$\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \text{ или } \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$



ЕГЭ, задание 12

основные ошибки

Неправильное использование формул приведения.

а) $\cos 2x + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$

$\cancel{2\cos^2 x - 1 + \sqrt{3}}(-\cos x) + 1 = 0$

$2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$

$\cos x(2\cos x - \sqrt{3}) = 0$

$\cos x = 0$ или $2\cos x - \sqrt{3} = 0$

$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $\quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$n \in Z$ $\quad x_3 = \frac{\pi}{6} + 2\pi m$ $\quad m \in Z$

$x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ $\quad \cancel{x_4 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi L \quad L \in Z}$

$k \in Z$

$x_4 = \frac{11\pi}{6} + 2\pi L \quad L \in Z$

ЕГЭ, задание 12

основные ошибки

Незнание свойств четных и нечетных функций.

12) а) $\sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0$

$2\sin x\cos x + 2\sin x - \cos x - 1 = 0$

$2\sin x(\cos x + 1) - 1(\cos x + 1) = 0$

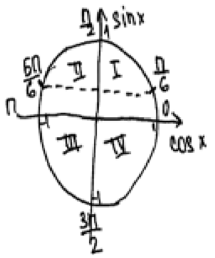
$(2\sin x - 1)(\cos x + 1) = 0$

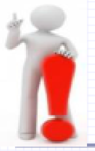
$2\sin x - 1 = 0$ или $\cos x + 1 = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$ $\quad \cos x = -1$

$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$ $\quad x_3 = \pi + 2\pi n, n \in Z$

$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$





ЕГЭ, задание 12

основные ошибки

Неправильное или некорректное использование тригонометрических формул.

- $\sqrt{6}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + 2\cos(2x) = \sqrt{3}\cos x - 2$
- $\sin^2(-x) = -\sin^2 x$
- $\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos^2 x$

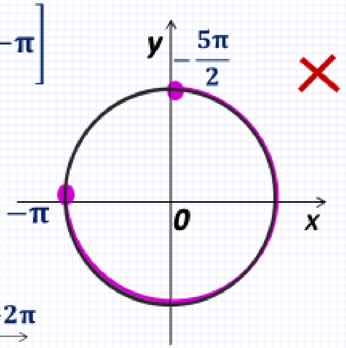
$$\sin^2(-x) = (\sin(-x))^2 = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$$
$$\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \left(\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\right)^2 = (-\cos x)^2 = \cos^2 x$$

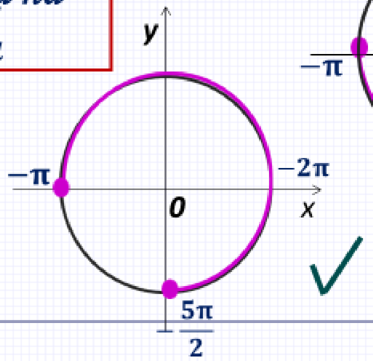
ЕГЭ, задание 12

основные ошибки

Неверное определение промежутка на окружности

$x \in \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$





б) $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$.

$k=2$ $\quad x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k = \frac{11\pi}{6} \notin [2\pi; \frac{7\pi}{2}]$.

$k=3$ $\quad x = \frac{\pi}{6} + 3\pi = \frac{19\pi}{6}$

$x = \frac{7\pi}{2}$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

б) $\frac{19\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{2}$.

Комментарий

Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. Отбор корней нельзя назвать обоснованным, так как перебор остановлён на корне, принадлежащем отрезку.

Оценка эксперта: 1 балл.

• Решают тригонометрическое уравнение как квадратное, то сначала необходимо сделать замену, а затем решать его с помощью дискриминанта как квадратное (либо с помощью свойств коэффициентов, теоремы Виета). *Искать дискриминант относительно функций нельзя!*

• В разных сериях решений можно писать одинаковые буквы либо разные, при этом указывать, что введенная буква принадлежит множеству целых чисел.

•В ответ не нужно писать совокупности, системы, «x=»и т.д. Правильно записать просто серии решений через «;» или в столбик.

•Не путать системы и совокупности, системам – это логическое «И», то есть должны выполняться одновременно все условия в системе; совокупность – логическое «ИЛИ», т.е. выполняется одно или несколько условий одновременно.

• Отбор корней по окружности:

- должна быть нарисована окружность, подписаны концы промежутка, отмечена дуга, отмечены и подписаны все точки, попадающие в промежуток, также рисуйте оси, но подписывать их необязательно.

- Перебором: обязательно должны перебираться n, при которых x не входит в промежуток (по одному слева и справа от границ).

- Может быть также сделан с помощью двойных неравенств

Виды неравенств задания №14:

- Рациональные неравенства
- Неравенства, содержащие радикалы
- Рациональные неравенства
- Показательные неравенства
- Логарифмические неравенства
- Неравенства с логарифмами по переменному основанию
- Неравенства с модулем
- Смешанные неравенства

Критерии проверки задания 14

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек……., ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

К ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ОШИБКАМ <u>НЕ</u> ОТНОСЯТСЯ: НЕВЕРНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛ; ВЫПОЛНЕНИЕ НЕРАВНОСИЛЬНЫХ ПЕРЕХОДОВ;
НЕВЕРНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ЧИСЕЛ НА КООРДИНАТНОЙ ПРЯМОЙ;
НЕПРАВИЛЬНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ СОВОКУПНОСТИ И СИСТЕМ НЕРАВЕНСТВ

Основные методы решения показательных неравенств: метод замены;
метод интервалов;
метод равносильных переходов;
метод выделения целой части
метод почленного деления
Кроме того, нестандартные методы: метод рационализации;
метод оценки, в частности, использование классических неравенств.

Частые ошибки при решении неравенств:

неумение раскладывать на множители, в том числе многочлены третьей степени;

ошибки при преобразованиях дробей и приведению к общему знаменателю;

незнание метода интервалов, в частности, учащиеся забывают знаменатель;

потеря промежутков при использовании метода интервалов;

забывают поменять знак неравенства при умножении всего неравенства на минус единицу;

вычислительные ошибки.

(14) $\log_{0,1}(6-6x) \le \log_{0,1}(x^2-4x+3) + \log_{0,1}(x+4)$

$$\begin{cases} 6-6x>0 \\ x^2-4x+3>0 \\ x+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ (x-3)(x-1)>0 \\ x>-4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$x \in (-4;\ 1)$

$$\log_{0,1} \frac{6-6x}{(x^2-4x+3)(x+4)} \le 0$$

$$\frac{6-6x}{(x-1)(x-3)(x+4)} \le 1$$

$$\frac{-6(x-1)}{(x-1)(x-3)(x+4)} \le 1$$

При $x \ne 1$ $\quad \dfrac{-6-(x-3)(x+4)}{(x-3)(x+4)} \le 0$

$$\frac{6+x^2+x-12}{(x-3)(x+4)} \ge 0$$

$$\frac{x^2+x-6}{(x-3)(x+4)} \ge 0$$

$$\frac{(x+3)(x-2)}{(x-3)(x+4)} \ge 0$$

Ответ: $[-3;\ 1)$

$c^2 \ge 0;\ c \ne 0$

№14 $\dfrac{\log_2 x^2 - \log_3 x^2}{\log_6^2(2x^2-10x+12,5)+1} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x^2 - \log_3 x^2 \ge 0 \quad (2) \\ 2x^2-10x+12,5>0 \quad (1) \end{cases}$

Неравенство 1) $2x^2-10x+12,5>0$

$4x^2-20x+25>0$

$(2x-5)^2>0$ $\quad x \ne 2,5$

2) $\log_2 x^2 \ge \log_3 x^2$

$\log_2 x^2 \ge \dfrac{\log_2 x^2}{\log_2 3}$ $\qquad \log_2 x^2 \left(1 - \dfrac{1}{\log_2 3}\right) \ge 0$

>1 $\quad >1 \Rightarrow \log_2 x^2 \ge 0$

$\log_2 x^2 \left(\dfrac{\log_2 3 - 1}{\log_2 3}\right) \ge 0 \Leftrightarrow$ $x^2-1 \ge 0$, $(x-1)(x+1) \ge 0$

$x \in (-\infty;\ -1] \cup (1;\ 2,5) \cup (2,5;\ +\infty)$

Функция $y = \log_2 t$ мон. возраст., поэтому, если $\log_2 t_1 \ge \log_2 t_2$, то $t_1 \ge t_2$ при $t_1>0$, $t_2>0$.

(14) $\dfrac{\log_3 x}{\log_3\left(\frac{x}{27}\right)} \geq \dfrac{2}{\log_3 x} + \dfrac{5}{\log_3^2 x - \log_3 x^3}$ $\quad \underline{x>0}$

$\log_3 x = t \quad \dfrac{t}{t-3} - \dfrac{2}{t} - \dfrac{5}{t(t-3)} \geq 0$

$\dfrac{t^2-2(t-3)-5}{t(t-3)} \geq 0$

$\dfrac{t^2-2t+1}{t(t-3)} \geq 0$

$\dfrac{(t-1)^2}{t(t-3)} \geq 0$

$+ \quad 0 \quad - \quad 1 \quad - \quad 3 \quad + \quad t$

$t \in (-\infty; 0) \cup \{1\} \cup (3; +\infty)$

$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \log_3 x < 0 \\ \log_3 x = 1 \\ \log_3 x > 3 \end{array}\right. \\ x > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x = 3 \\ x > 27 \end{array}\right. \\ x > 0 \end{array}\right.$

Ответ: $(0; 1) \cup \{3\} \cup (27; +\infty)$

(14) $9^{4x-x^2-1} - 36 \cdot 3^{4x-x^2-1} + 243 \geq 0$

$3^{4x-x^2-1} = t, t>0 \quad t^2 - 36t + 243 \geq 0$

$D_1 = (18)^2 - 243 = 324 - 243 = 81$

$t_{1,2} = 18 \pm 9 \quad t_1 = 9 \quad t_2 = 27$

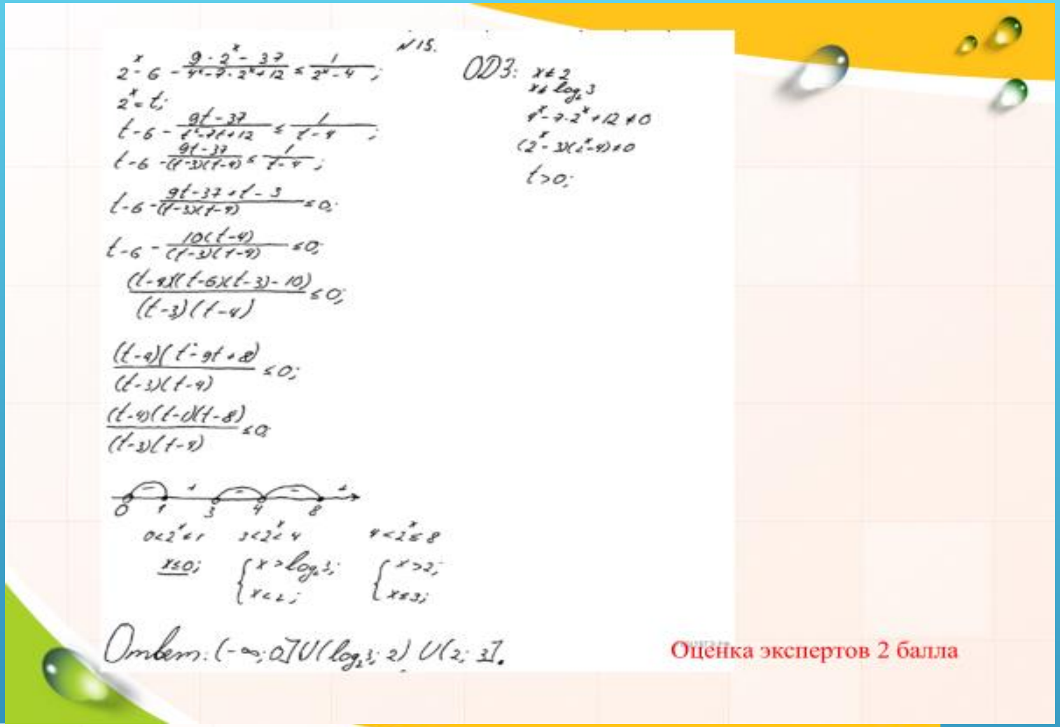
$0 \quad + \quad 9 \quad - \quad 27 \quad + \quad t$

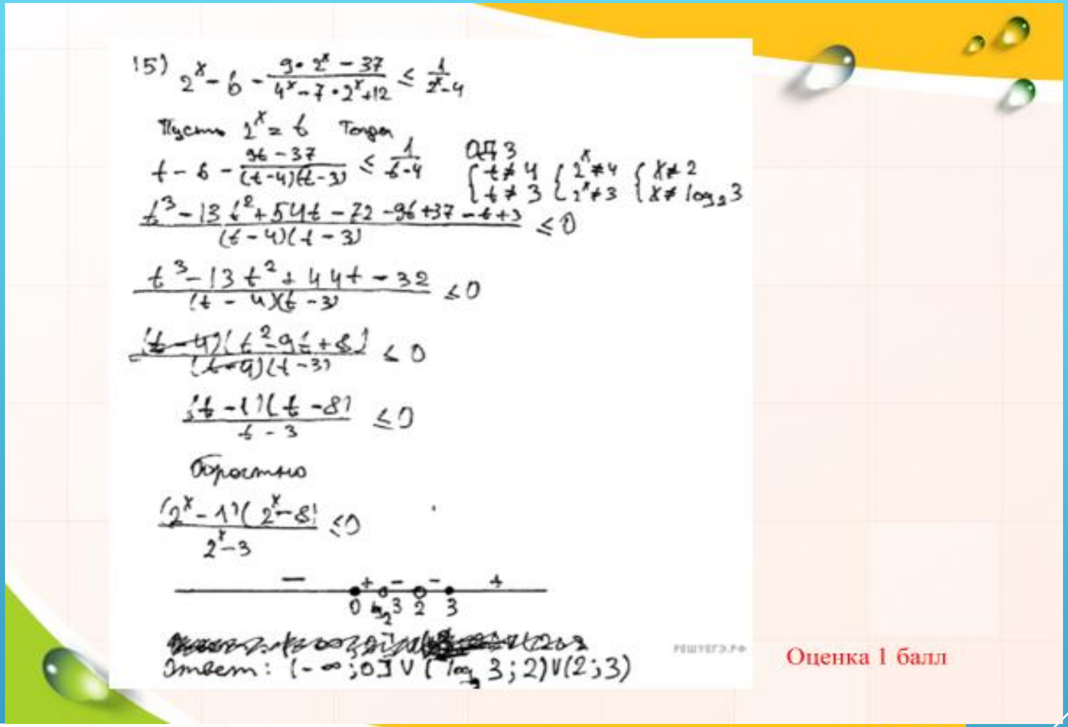
$\left[\begin{array}{l} t \leq 9 \\ t \geq 27 \end{array}\right.$

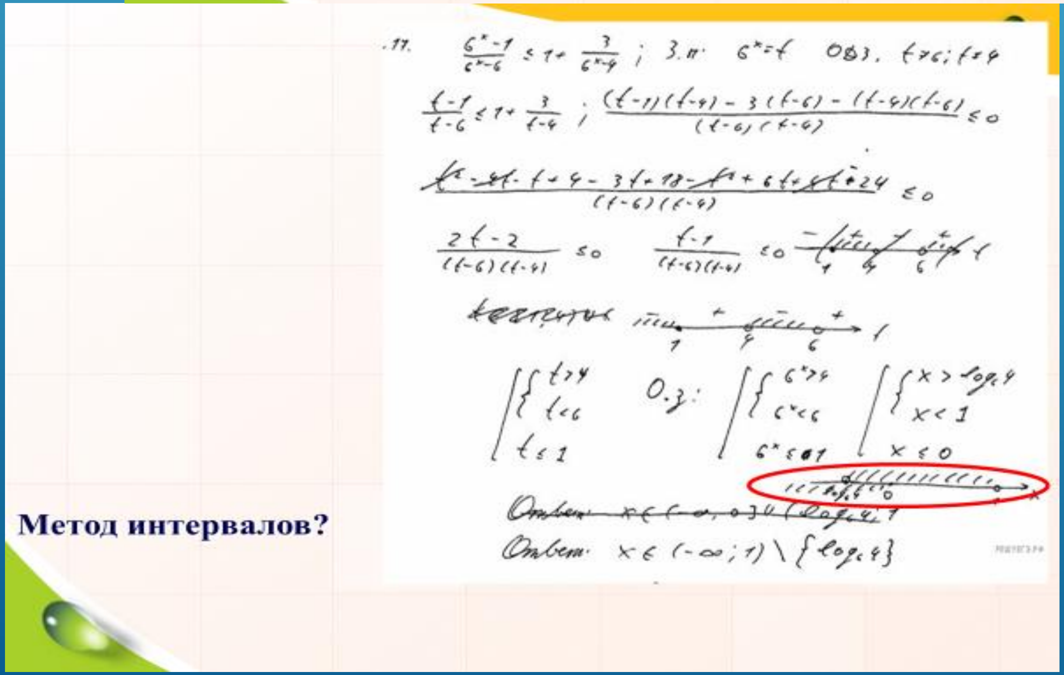
$\left[\begin{array}{l} 3^{4x-x^2-1} \leq 3^2 \\ 3^{4x-x^2-1} \geq 27\ (3^3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-x^2-1 \leq 2 \\ 4x-x^2-1 \geq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2+4x-3 \leq 0 \\ -x^2+4x-4 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

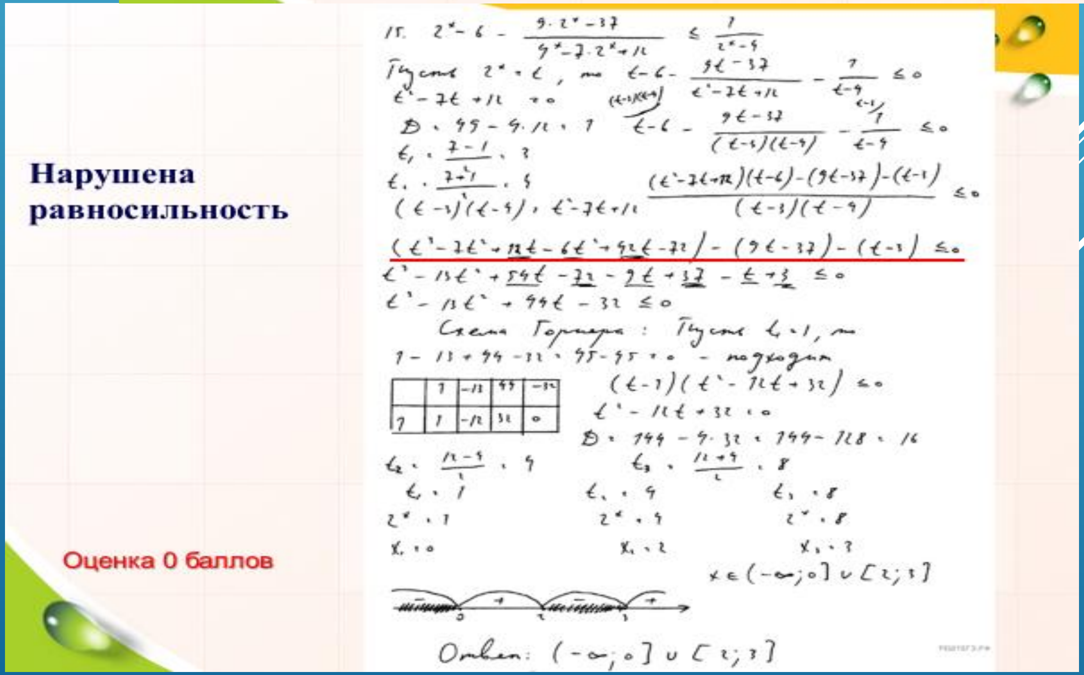
$\left[\begin{array}{l} x^2-4x+3 \geq 0 \\ x^2-4x+4 \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-3)(x-1) \geq 0 \\ (x-2)^2 \leq 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty) \\ x = 2 \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$


Оценка экспертов 2 балла


Оценка 1 балл


Метод интервалов?


Нарушена равносильность
Оценка 0 баллов

•В ОДЗ выписывать абсолютно все ограничения на исходное. Лучше выписывать все условия, даже если какие-то будут автоматически учтены, например, если есть множители $log_3(x^2)$ и $log_3(x)$, то лучше выписать в изначальную систему ОДЗ оба условия, а потом уже можно упрощать.

• Выписать только некоторые ограничения на равносильный переход, назвать это ограничениями.

•Если вынести чётную степень из логарифма, то нужно ставить модуль и затем объяснить, например, что $|x|=x$ на ОДЗ.

•Если использовать метод рационализации:

1. Обозначить, что используете этот метод, например написав «по методу рационализации на ОДЗ».
2. Лучше сохранить скобки с разностью чисел при переходе, например, $3^x - 3^{6-x} \leqslant 0$. По методу рационализации на ОДЗ: $(2-1)(x-(6-x)) \leqslant 0$.
3. Не забывать, метод рационализации используем на ОДЗ и только когда сравниваем выражение с нулём.
4. Когда делать замену, не забывать после нахождения промежутков для t обоснованно перейти к исходной переменной.

Основные виды задач 15:

1) Кредиты с равными (аннуитетными) платежами

2) Кредиты с дифференцированными платежами

3) Вклады, сложные проценты

4) Оптимальный выбор

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ПОДРОБНЕЕ: 1 БАЛЛ МОЖНО ВЫСТАВЛЯТЬ В ТЕХ СЛУЧАЯХ, КОГДА СЮЖЕТНОЕ УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ ВЕРНО СВЕДЕНО К РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ (АРИФМЕТИЧЕСКОЙ, АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ, ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ) ЗАДАЧИ, НО ИМЕННО К РЕШЕНИЮ, А НЕ К ОТДЕЛЬНОМУ РАВЕНСТВУ, НАБОРУ УРАВНЕНИЙ, УРАВНЕНИЮ, ЗАДАЮЩЕМУ ФУНКЦИЮ, И Т.П. ПРЕДЪЯВЛЕННЫЙ ТЕКСТ ДОЛЖЕН ВКЛЮЧАТЬ ОПИСАНИЕ ТОГО, КАК ПОСТРОЕНА МОДЕЛЬ.

НЕОБХОДИМЫЙ И ВАЖНЕЙШИЙ ЭТАП РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ- ФОРМАЛИЗАЦИЯ, СОСТАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗАДАЧИ.

- Введение переменных
- Перевод условия задачи в уравнения или неравенства
- Решение уравнения (системы)
- Нахождение значения искомой величины и запись ответа

.

В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 4,2 млн. руб. Условия возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на *r*% по сравнению с концом предыдущего года.
— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга.
— в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным 4,2 млн. руб.
— суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.
Найдите *r*, если в 2021 году долг будет выплачен полностью и общие выплаты составят 6,1 млн. рублей.

Пусть банк начисляет *r* процентов, то есть умножает остаток долга на k
Тогда первые три платежа составляли 4,2X-4,2 миллионов рублей. Пусть, далее, четвертый и пятый платежи составляли *N* миллионов рублей. Тогда N=(4,2x-N)x, откуда можно найти N .
По условию, общие выплаты составят 6,1 млн руб., откуда составляем и решаем уравнение.

1. (Аналог ЕГЭ 2023 основная волна) В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 10 лет. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– в июле каждого из годов с 2026 по 2030 долг уменьшается на одну и ту же сумму по сравнению с июлем предыдущего года;

– в июле каждого из годов с 2031 по 2035 долг уменьшается на одну и ту же сумму по сравнению с июлем предыдущего года, отличную от суммы, на которую долг убывал в первые пять лет;

– в июле 2030 года долг составил 800 тысяч рублей.

Найдите начальную сумму кредита, если сумма выплат по кредиту равна 2090 тысяч рублей.

(Аналог ЕГЭ 2023 основная волна) В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 10 лет. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– в июле каждого из годов с 2026 по 2030 долг уменьшается на одну и ту же сумму по сравнению с июлем предыдущего года;

– в июле каждого из годов с 2031 по 2035 долг уменьшается на одну и ту же сумму по сравнению с июлем предыдущего года, отличную от суммы, на которую долг убывал в первые пять лет;

– в июле 2030 года долг составил 800 тысяч рублей.

Найдите начальную сумму кредита, если сумма выплат по кредиту равна 2090 тысяч рублей.

Решение.

Отметим, что увеличение произвольной величины A на 10% можно записать как $1{,}1 \cdot A$. Пусть взяли кредит S тысяч руб. Пусть также первые пять лет долг равномерно уменьшается на x тысяч руб., а вторые пять лет долг равномерно уменьшается на y тысяч руб. Составим таблицу.

год		долг в тыс. руб.	выплаты в тыс. руб.
2026	январь	$1{,}1 \cdot S$	$1{,}1 \cdot S - (S - x)$
	июль	$S - x$	
2027	январь	$1{,}1(S - x)$	$1{,}1(S - x) - (S - 2x)$
	июль	$S - 2x$	
...			
2030	январь	$1{,}1(S - 4x)$	$1{,}1(S - 4x) - (S - 5x)$
	июль	$S - 5x$	
2031	январь	$1{,}1(S - 5x)$	$1{,}1(S - 5x) - (S - 5x - y)$
	июль	$S - 5x - y$	
2032	январь	$1{,}1(S - 5x - y)$	$1{,}1(S - 5x - y) - (S - 5x - 2y)$
	июль	$S - 5x - 2y$	
...			
2035	январь	$1{,}1(S - 5x - 4y)$	$1{,}1(S - 5x - 4y) - (S - 5x - 5y)$
	июль	$S - 5x - 5y$	

Так как к 2035 году кредит должен быть выплачен, в июле 2030 года долг составил 800 тысяч рублей, а сумма выплат составила 2090 тысяч руб., получаем систему

$$\begin{cases} S - 5x - 5y = 0 \\ S - 5x = 800 \\ 1{,}2 \cdot S - (S - x) + \dots + 1{,}2(S - 4x) - (S - 5x) + 1{,}2(S - 5x - y) - (S - 5x - 2y) + \dots + 1{,}2(S - 5x - 4y) - (S - 5x - 5y) = 2090 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 800 - 5y = 0 \\ S - 5x = 800 \\ 11S - 10S - 1{,}1 \cdot 35x - 1{,}1 \cdot 10y + 40x + 15y = 2090 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 160 \\ S = 800 + 5x \\ S + 1{,}5x + 4y = 2090 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 160 \\ S = 800 + 5x \\ 800 + 5x + 1{,}5x + 4 \cdot 160 = 2090 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = 160, \quad x = 100, \quad S = 1300.$$

Ответ: 1300 тысяч рублей.

№ 15

$r_1 = 18\%$ с 2024 по 2028 $\quad k_1 = 1,18$

$r_2 = 16\%$ с 2028 по 2033 $\quad k_2 = 1,16$

$B = 1470$ тыс руб.

S – сумма кредита

июль 23 $S \to k_1 S$ (01.2024) $\xrightarrow{x_1}$ июль 2024 $\frac{9}{10}S \to k_1 \cdot \frac{9}{10} S$ (01.25) $\xrightarrow{x_2} \frac{8}{10}S \to k_1 \cdot \frac{8}{10}S$ (01.26) $\xrightarrow{x_3} \frac{7}{10}S \to k_1 \cdot \frac{7}{10}S$ (01.27) $\xrightarrow{x_4} \frac{6}{10}S \to k_1 \cdot \frac{6}{10}S$ (01.28) $\xrightarrow{x_5} \frac{5}{10}S \to k_2 \cdot \frac{5}{10}S$ (01.29) $\ldots \frac{1}{10}S \to k_2 \cdot \frac{1}{10}S \xrightarrow{x_{10}} 0$

Выплаты

$x_1 = k_1 S - \frac{9}{10}S$

$x_2 = k_1 \cdot \frac{9}{10}S - \frac{8}{10}S$

$\vdots$

$x_5 = k_1 \frac{6}{10}S - \frac{5}{10}S$

$x_6 = k_2 \frac{5}{10}S - \frac{4}{10}S$

$\vdots$

$x_{10} = k_2 \cdot \frac{1}{10}S$

$S_9 = \frac{1+9}{2} \cdot 9 = 45$

$$B = k_1 S\left(1 + \frac{9}{10} + \frac{8}{10} + \frac{7}{10} + \frac{6}{10}\right) + k_2 S\left(\frac{5}{10} + \frac{4}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10}\right) - S\left(\frac{9}{10} + \frac{8}{10} + \frac{7}{10} + \ldots \frac{1}{10}\right)$$

$$= k_1 S \cdot \frac{40}{10} + \frac{k_2 S \cdot 15}{10} - S \cdot \frac{45}{10} =$$

$$= 4 k_1 S + 1,5\, k_2 S - 4,5 S =$$

$$= 4 \cdot 1,18 S + 1,16 \cdot 1,5 S - 4,5 S =$$

$$= 1,96 S$$

$B = 1470 = 1,96 S \qquad S = 750$ тыс.

$$\frac{147000}{196} = \frac{21000}{28} = \frac{3000}{4} = 750$$

ноябрь -
дек - апр -
май - часть кред.

2016	2017	2018	2019	2020	2021
S	0,7S	0,5S	0,4S	0,2S	0

ноябрь 2016 $1,2S$.
дек - апр 2017 $1,2S - x_1$
май 2017 $\cancel{0,7}(1,2S - x_1) = 0,7S$. $\cancel{\Rightarrow 0,7S - 1,2S + x =}$
нояб 2017 $0,84S$
дек - апр 2018 $0,84S - x_2$
май 2018 $0,84S - x_2 = 0,5S$
нояб 2018 $0,6S$
дек - апр 2019 $0,6S - x_3$
май 2019 $0,6S - x_3 = 0,4S$
нояб 2019 $0,48S$
дек - апр 2020 $0,48S - x_4$
май 2020 $0,48S - x_4 = 0,2S$
нояб 2020 $0,24S$
дек - апр 2021 $0,24S - x_5$
май 2021 $0,24S - x_5 = 0$.
~~нояб 2021~~

$x_1 = 1,2S - 0,7S = 0,5S$
$x_2 = 0,84S - 0,5S = 0,34S$
$x_3 = 0,6S - 0,4S = 0,2S$
$x_4 = 0,48S - 0,2S = 0,28S$
$x_5 = 0,24S \cancel{- S = 0,5 - 0,76S}$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 7$ млн.
$0,5S + 0,34S + 0,2S + 0,28S + 0,24S > 7$ млн.
$1,56S > 7$ млн,
$S > 4\frac{76}{156}$ млн.
5 млн.

$$\begin{array}{r|l} 700 & 156 \\ -624 & 4,4 \\ 760 & \\ -700 & \\ 600 & \end{array}$$

Ответ: 5 млн

Могу выделить несколько основных ошибок.
1)Неверное построение математической модели, связанное с неверным определением формы кредитования.
2)Ошибки при применении формул арифметической прогрессии и расчета общей суммы выплат.

Внимательно прочтите условие, предложенное в экзаменационной работе;
Найдите и выпишите все известные данные, выполните рисунок в случае с заданием по геометрии;
Определите и запишите все взаимоотношения и связи между исходными данными;
Выясните неизвестные параметры, выпишите, что именно нужно найти, четко сформулируйте вопрос, на который нужно найти ответ;
Вычислите конкретный тип задания, сформулируйте его содержание и определите заранее последовательность собственных действий.
Предложенный алгоритм можно использовать в качестве памятки для самоконтроля. Вы можете применять указанную инструкцию в процессе знакомства с предложенным заданием. Все предложенные пункты в памятке стоит четко, последовательно повторять и фиксировать в письменном виде, а не только соблюдать условно.

Задание 15

- Все переменные, которых не было в условии, нужно описать перед решением задачи.
- Математическая модель может быть описана в виде таблицы, либо словесно/схематично, нельзя сразу записать уравнение без описания модели.

•Если вам дано r - число процентов, на которое растет вклад, то в таблице умножать S на$(1+\frac{r}{100})$,а не на(1 +r). В конце имеем, например, r=20,т.е. r% = 20%, r - это просто число, не проценты!

•Помните, что 5, 5% и $\frac{5}{100}$ - это 3 разные вещи, не приравнивайте их между собой, чтобы не запутаться. Оптимальнее всего всегда обозначать за r число и не работать с самими процентами.

•Нельзя использовать готовые формулы, даже если вы знаете как такая формула выглядит, например, для аннуитетного платежа. Их нужно получить по ходу решения. При этом формулу арифметической прогрессии использовать можно, просто опишите, что ваши платежи составляют эту прогрессию.

•Если решаете задачу на оптимизацию и ищете локальную точку минимума, например, то вам нужно обосновать, что эта точка локального экстремума - именно точка минимума, а не максимума. Если у вас парабола — можно сказать, что ее ветви направлены вверх, а если вы ищете через производную - покажите схематично знаки производной и локальный минимум.

Основные виды задач с параметром

1. Линейные уравнения
2. Линейные неравенства
3. Графики уравнений на плоскости *Oxy*
4. Графики неравенств на плоскости *Oxy*
5. Квадратные уравнения
6. Разложение квадратного трехчлена на множители. Формулы Виета
7. Расположение корней квадратного уравнения относительно заданных точек
8. Дробно-рациональные уравнения. Отбор корней
9. Использование свойств функций и алгебраических выражений
10. Задачи с модулем

Основные типы задач с параметрами

Задачи, которые необходимо решить для всех значений параметра или для значений параметра из заданного промежутка.

Задачи, где требуется найти количество решений в зависимости от значения параметра.

Задачи, где необходимо найти значения параметра, при которых задача имеет заданное количество решений.

Задачи, в которых необходимо найти значения параметра, при которых множество решений удовлетворяет заданным условиям.

Методы решения:

Аналитический, т. е. с помощью алгебраических выражений.
Графический, т. е. с помощью построения графиков функций.
Решение относительно параметра, т.е. в случае, когда параметр считается еще одной переменной.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a=-2$	3
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения, и получено или множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=8$, $a=3$ и/или $a=-2$, или множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=0$, $a=-1$ и/или $a=-2$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения параболы и лучей (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Задание 3

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Корнями исходного уравнения являются корни уравнения $|3x|-2x-2-a=0$, для которых выполнено условие $x^2-2x-a\neq 0$.

При $x\le 0$ уравнение $|3x|-2x-2-a=0$ принимает вид $-5x-2-a=0$ и задаёт на плоскости Oxa луч l_1 с началом в точке $(0;-2)$. При $x\ge 0$ уравнение $|3x|-2x-2-a=0$ принимает вид $x-2-a=0$ и задаёт луч l_2 с началом в точке $(0;-2)$. Значит, уравнение $|3x|-2x-2-a=0$ имеет два корня при $a>-2$, имеет один корень при $a=-2$ и не имеет корней при $a<-2$.

Уравнение $x^2-2x-a=0$ задаёт параболу $a=x^2-2x$.

Координаты точек пересечения параболы $a=x^2-2x$ с лучом l_1 являются решениями системы:

$$\begin{cases} a=x^2-2x, \\ a=-5x-2, \\ x\le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -5x-2=x^2-2x, \\ a=-5x-2, \\ x\le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+1)(x+2)=0, \\ a=-5x-2, \\ x\le 0. \end{cases}$$

Значит, парабола $a=x^2-2x$ пересекается с лучом l_1 в точках $(-1;3)$ и $(-2;8)$.

Координаты точек пересечения параболы $a=x^2-2x$ с лучом l_2 являются решениями системы:

$$\begin{cases} a=x^2-2x, \\ a=x-2, \\ x\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-2=x^2-2x, \\ a=x-2, \\ x\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)(x-2)=0, \\ a=x-2, \\ x\ge 0. \end{cases}$$

Значит, парабола $a=x^2-2x$ пересекается с лучом l_2 в точках $(1;-1)$ и $(2;0)$.

Следовательно, условие $x^2-2x-a\neq 0$ выполнено для корней уравнения $|3x|-2x-2-a=0$ при всех a, кроме $a=-1$, $a=0$, $a=3$ и $a=8$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня при $-2<a<-1$; $-1<a<0$; $0<a<3$; $3<a<8$; $a>8$.

18.3. 23 3)

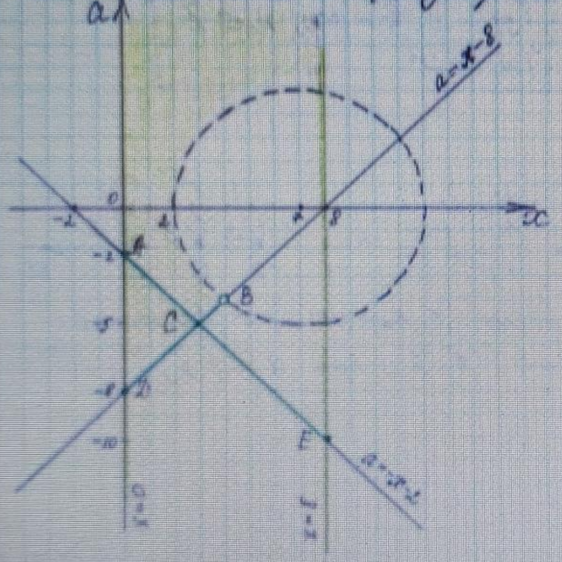
a – ? ровно 1 корень на $[0;8]$

$$\frac{(x+a+2)(x-a-8)}{\sqrt{x^2-14x+a^2+24}}=0.$$

$$\begin{cases} (x+a+2)(x-a-8)=0 \\ x^2-14x+a^2+24>0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=-x-2 \\ a=x-8 \end{array}\right. \\ (x-7)^2+a^2>25 \end{cases}$$

$\left[\begin{array}{l} a=-x-2 \\ a=x-8 \end{array}\right.$ Совокупность двух прямых

$(x-7)^2+a^2>25$ Внешняя часть круга (без границы); $(7;0)$-центр, $R=5$.



$A(0;-2)$

$C:\ x-8=-x-2$

$2x=6$

$x=3 \Rightarrow a=-5$

$C(3;-5)$

$B:\ (x-7)^2+(x-8)^2=25$

$x^2-14x+49+x^2-16x+64=25$

$2x^2-30x+88=0$

$x^2-15x+44=0$

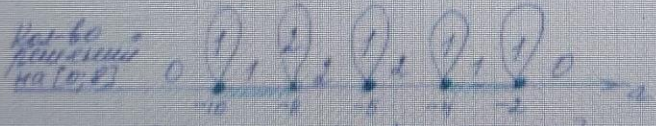
$x=\frac{15\pm\sqrt{225-176}}{2}=\frac{15\pm 7}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x=11 \\ x=4 \Rightarrow a=-4 \end{array}\right.$

$B(4;-4)$

$D(0;-8)$

$E(8;-10)$



$a\in[-10;-8)\cup\{-5\}\cup[-4;-2]$

Ответ: $[-10;-8)\cup\{-5\}\cup[-4;-2]$

Задание №7

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x-x^2-a^2}} = 0$$

имеет ровно один корень на

Решение.

ОДЗ: $10x - x^2 - a^2 > 0$

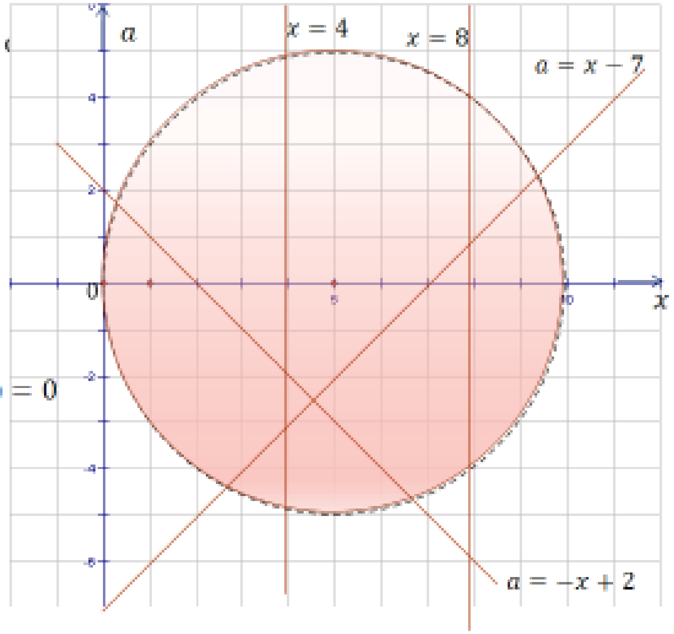
$x^2 - 10x + 25 + a^2 < 25$

$(x-5)^2 + a^2 < 25$

$(x - a - 7)(x + a - 2) = 0$

$(x - a - 7) = 0$ или $(x + a - 2) = 0$

$a = x - 7$ или $a = -x + 2$



уравнение имеет ровно один корень на [4; 8]

$A: \begin{cases} a = -x + 2 \\ x^2 - 10x + a^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

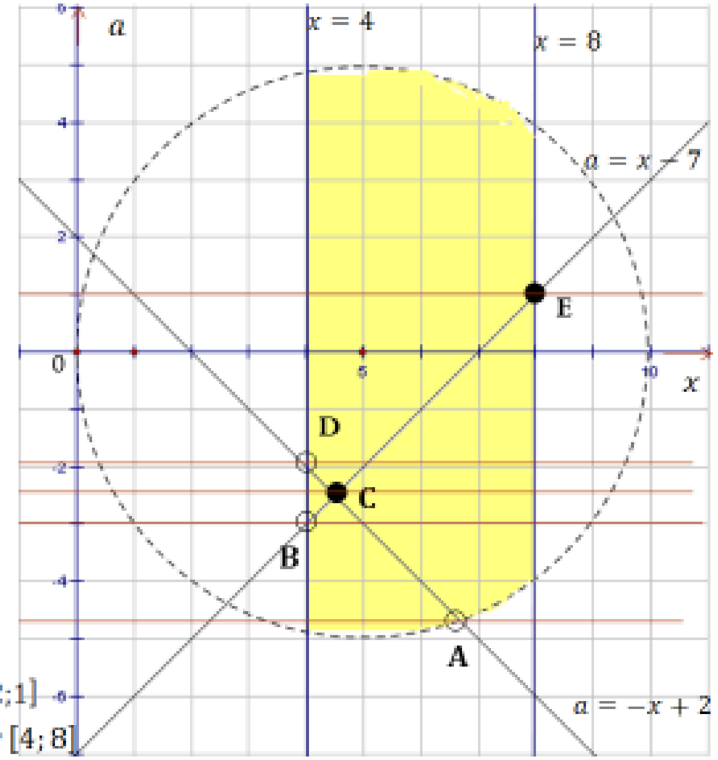
$\Rightarrow a = \dfrac{-3-\sqrt{41}}{2}$

$B: \begin{cases} x = 4 \\ a = x - 7 \end{cases} \Rightarrow a = -3$

$C: \begin{cases} a = -x + 2 \\ a = x - 7 \end{cases} \Rightarrow a = -2{,}5$

$D: \begin{cases} x = 4 \\ a = -x + 2 \end{cases} \Rightarrow a = -2$

$E: \begin{cases} x = 8 \\ a = x - 7 \end{cases} \Rightarrow a = 1$



При $a \in \left(\dfrac{-3-\sqrt{41}}{2}; -3\right) \cup \{-2{,}5\} \cup (-2;1]$ уравнение имеет ровно один корень на [4; 8]

Задание 17

Если решают задачу графически, помнить, что по критериям больше 1балла ставится, только если график верный. Обязательно объяснять построение.

•Если ввели замену, сразу вводим и ограничения на неё, что позволит далее построить исследование.

•Можно вводить квадратичную функцию, записать, что она определяет параболу и как направлены ветви.

•Если суть исследования - количество корней, то не забывать проверить совпадение корней.

•Если решают задачу методом хорошего/плохого корня, не забыть описать, что значат эти определения для данной задачи. Когда нашли несколько значений (скорее всего, без учета некоторых ограничений), можно писать так: «определим, какие из полученных чисел являются корнем данного уравнения»

ПРИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ В ЗАДАНИЯХ 13 И 16 ЛИБО УКАЗЫВАЕМ ТЕОРЕМУ, КОТОРУЮ ИСПОЛЬЗОВАЛИ, ЛИБО ЕЕ ФОРМУЛИРОВКУ.

ВАЖНО! ЕСЛИ УЧЕНИК НЕ ПОМНИТ ТОЧНОЕ НАЗВАНИЕ, ТО ЛУЧШЕ НАПИСАТЬ ФОРМУЛИРОВКУ.

Задание 13

- Не забывать описать построение сечения (если просят найти его площадь, высоту).
- Найти расстояние между точками (прямыми, плоскостями), то когда строят перпендикуляр, обязательно обосновать, почему именно такой отрезок будет являться расстоянием.
- Решают задачу методом координат, то обязательно расписать, что вводят прямоугольную систему координат и вдоль каких прямых направлены оси.
- Найти угол, а ребёнок нашёл функцию угла, то не забыть сделать переход к аркфункции. (помнить - угол между прямыми и угол между плоскостями определён как острый по умолчанию).
- При отсылке на теорему о трех перпендикулярах указывать перпендикуляр к плоскости, наклонную и её проекцию на плоскость.
- Найти угол между плоскостями, то нужно не просто написать искомый угол, а обосновать построение линейного угла искомого двугранного угла.
- Найти угол между прямой и плоскостью, то поясните, что он равен углу между прямой и её проекцией на плоскость.

Задание 16

Когда используют теорему, нужно написать ее название (если забыли фамилию автора, можн
сформулировать теорему словами).

- Если нужно доказать, что четырехугольник является трапецией, не забыть доказат
параллельность одной пары сторон и не параллельность другой (иначе можно получит
параллелограмм).

- Доказывая равенство треугольников или их подобие, писать отсылку на признак.
- Если делают дополнительное построение, то обязательно описать его

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

Задание 18

• При решении задания лучше сразу сделать некоторый «фундамент» на предложенном условии, и потом использовать данный «фундамент» во всех пунктах. Признаки делимости, признак равноостаточности.

•Если в задаче спрашивают «можно ли. . . » и ответ утвердительный, то можно просто привести пример такой конструкции. Если ответ отрицательный, то необходимо доказать, что это невозможно для любого случая (рассмотреть один недостаточно).

•Если решают задачу перебором, это допустимо, главное помнить, что разобрать нужно абсолютно все случаи.

•Сделав оценку в пункте в), не забывать построить пример.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*