Грамотное оформление решений задач —

один из факторов успешного обучения математике

П.И. Самсонов
преподаватель
математики школы № 129
г. Москвы,
сотрудник медальной
комиссии СЗУО г. Москвы

Эта статья посвящена одной из наболевших проблем при изучении математики — проблеме грамотного и четкого оформления решений задач. Не секрет, что решение задачи учащиеся сводят к набору выкладок, в которых по прошествии некоторого времени ученику самому трудно разобраться: как же он решал задачу (или как ее решали в классе).

Грамотное оформление решения задачи не может сводиться только лишь к словесному пояснению всех шагов или этапов решения. Иногда, кстати говоря, словесные пояснения являются ненужными.

Помимо прочего встречаются такие решения, в которых отсутствует всякая логика. Этим чаще всего грешат при решении систем уравнений и рациональных неравенств. Например, предложено решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x+4y=1, \\ 2x+3y=-3. \end{cases}$$

Часто мы видим такое «решение»:

$$x=1-4y$$
$$2(1-4y)+3y=-3$$
$$2-8y+3y=-3$$
$$-5y=-5$$
$$y=1 => x=-3.$$

Ответ: (–3; 1).

Это «решение» понять очень трудно, ибо, во-первых, причем тут система уравнений? А во-вторых, совершенно неясно, каким образом эта система решалась.

Говоря в данном случае о грамотном решении системы уравнений, мы должны отразить в таком решении и идею равносильных преобразований системы уравнений и показать сущность метода подстановки при решении системы. Как же это сделать?

В статье представлен опыт работы автора по обучению учащихся построению грамотных решений задач по алгебре. Начнем с предложенной задачи.

Задача 1. *Решите систему уравнений* $\begin{cases} x+4y=1, \\ 2x+3y=-3. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} x+4y=1, \\ 2x+3y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-4y, \\ 2(1-4y)+3y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-4y, \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3, \\ y=1. \end{cases}$$

$$2(1-4y)+3y=-3,$$
$$2-8y+3y=-3,$$
$$-5y=-5,$$
$$y=1.$$

Ответ: (–3; 1).

В чем особенность приведенного решения? Во-первых (это касается логики решения), система уравнений никуда не исчезает, она лишь преобразовывается до тех пор, пока ответ не становится ясным. Во-вторых, четко «показан» метод подстановки. В-третьих, зная, что одной из основных идей решения системы уравнений является получение в этой системе уравнения от одной переменной, мы выделили справа **вспомогательное поле решений**, на котором и записали решение этого уравнения.

Вообще, следует считать очень разумным, когда основной ход решения задачи не «затуманивается» различными мелкими выкладками и преобразованиями. Именно поэтому, чтобы не перегружать решение задачи деталями, с правой или с левой стороны тетрадного листа выделяется вспомогательное поле решений, на котором и осуществляются все неосновные этапы решения задачи.

Чтобы преимущество такого способа записи стало очевидным, рассмотрим еще несколько примеров решений систем уравнений.

Задача 2. *Решите систему уравнений* $\begin{cases} x-y=7, \\ xy=18. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} x-y=7, \\ xy=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7+y, \\ (7+y)y=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7+y, \\ \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-9 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=7+y, \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=7+y, \\ y=-9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=9, \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2, \\ y=-9. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$(7+y)y=18,$$
$$y^2+7y-18=0,$$
$$D=49+72=121, \sqrt{D}=11,$$
$$y_1=\frac{-7+11}{2}=2,$$
$$y_2=\frac{-7-11}{2}=-9.$$

Ответ: (9; 2); (–2; –9).

Комментарий. Знак [называется совокупностью и обозначает логическую связку «или».

Задача 3. *Не выполняя построения графиков функций* $y = x^2 + x$ *и* $y = 2x + 2$, *найдите координаты точки с положительной абсциссой, в которой эти графики пересекаются.*

Решение. Задача сводится к решению системы $\begin{cases} y = x^2 + x, \\ y = 2x + 2, \\ x > 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} y = x^2 + x, \\ y = 2x + 2, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x = 2x + 2, \\ y = 2x + 2, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0, \\ y = 2x + 2, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1, \end{array}\right. \\ y = 2x + 2, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 6. \end{cases}$$

$$x^2 - x - 2 = 0,$$
$$D = 1 + 8 = 9, \sqrt{D} = 3,$$
$$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2,$$
$$x_2 = \frac{1-3}{2} = -1.$$

Итак, (2; 6) — координаты искомой точки.

Ответ: (2; 6).

Приведенные примеры наглядно показывают, что в грамотно оформленном решении можно проследить не только все этапы решения задачи, но и увидеть знание решающим применяемых методов. Также нетрудно заметить, что на такое оформление затрачивается немного времени.

Итак, самое главное: **решение — это не набор выкладок с ответом. Решение задачи должно быть полным и логически стройным.**

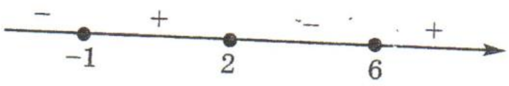
Говоря здесь о полноте решения, мы не имеем в виду те словесные пояснения к задачам, которые часто присутствуют в учебниках. Учебник должен содержать подобные пояснения, а вот в ученических тетрадях их быть не должно, ибо у математики есть свой язык. Полнота решения заключается прежде всего в последовательном раскрытии сути применяемого метода (или методов) для решения конкретной задачи.

Рассмотрим еще несколько примеров, коснувшись теперь уже оформления решений рациональных неравенств.

Задача 4. *Решите неравенство* $(x-2)(x^2 - 5x - 6) \le 0.$

Как правило, для таких задач мы видим такие «решения»:

$$(x-2)(x^2-5x-6)\le 0$$
$$x^2-5x-6=0$$
$$D=25+24=49$$
$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{2}$$
$$x_1=-1$$
$$x_2=6$$
$$(x-2)(x+1)(x-6)\le 0$$



Ответ: $(-\infty;\,-1]\cup[2;\,6]$.

Из такого «решения» мало что понятно. Сначала было неравенство, потом — уравнение, нашли корни этого уравнения, затем снова появилось неравенство, шкала и ответ. Попробуем предложить другой вариант оформления решения этой задачи (более грамотный).

Для этого четко выделим основные этапы решения данного неравенства:

1) Разложение на множители. (Это будет сделано на вспомогательном поле решений.)

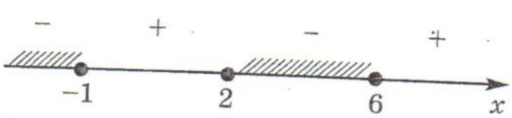
2) Рассмотрение промежутков знакопостоянства и установление знака на каждом из рассматриваемых промежутков. (Это также будет сделано на вспомогательном поле решений справа, причем нас интересует только знак, а не значение.)

3) Поиск промежутков решений. (Они отмечены на шкале штриховкой.)

Итак, покажем, как выглядит такое решение.

Решение.

$$(x-2)(x^2-5x-6)\le 0,$$
$$(x-2)(x+1)(x-6)\le 0.$$



1. $x^2-5x-6=0,$

$D=25+24=49, \sqrt{D}=7,$

$x=-1$ *или* $x=6.$

2. $x^2-5x-6=(x+1)(x-6).$

3. $f(x)=(x-2)(x+1)(x-6),$

$f(7)>0,\ \ f(3)<0,\ \ f(0)>0,\ \ f(-3)<0.$

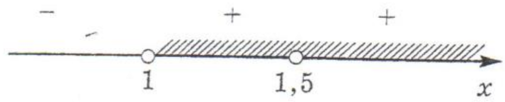
Ответ: $(-\infty;\,-1]\cup[2;\,6]$.

Жесткое требование учителя — обязательное выполнение п. 3 решения на вспомогательном поле решений — позволяет успешно бороться с «чередованием знаков». Приведем пример.

Задача 5. *Решите неравенство* $(2x^2-5x+3)(2x-3)>0.$

Решение.

$$(2x^2-5x+3)(2x-3)>0,$$
$$(2x-3)(x-1)(2x-3)>0,$$
$$(2x-3)^2(x-1)>0.$$



1. $2x^2-5x+3=0,$

$D=25-24=1,$

$x_1=\frac{5+1}{4}=\frac{3}{2},\quad x_2=\frac{5-1}{4}=1.$

2. $2x^2-5x+3=2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-1)=$

$=(2x-3)(x-1).$

3. $g(x)=(2x-3)^2(x-1),$

$g(3)>0,\ g(1{,}3)>0,\ g(0)<0.$

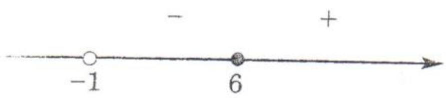
..твет: $(1;\ 1{,}5)\cup(1{,}5;\ +\infty).$

..братите внимание, что в этой задаче числа подобраны «рядом лежащие» и ученик по ..ривычке ставит на промежутке (1; 1,5) знак (–). Неукоснительное выполнение всех этапов ..ешения, отраженных в оформлении решения задачи, позволяет избежать этой ошибки.

..еперь уместно рассмотреть пример, в котором из-за несоблюдения равносильности ..реобразований неравенства часто совершают ошибки.

..адача 6. *Решите неравенство* $\frac{x^2-7x+6}{x^2-1}\le 0.$

..ычно эту задачу решают так: $\frac{x^2-7x+6}{x^2-1}\le 0,\ \frac{(x-1)(x-6)}{(x-1)(x+1)}\le 0,\ \frac{x-6}{x+1}\le 0,$



$-1<x\le 6.$

..ле чего следует ответ (–1; 6], который неверен, ибо $x = 1$ решением не является. ..иведем правильное решение этой задачи.

..ение.

$$\frac{..7x+6}{..-1}\le 0 <=> \frac{(x-1)(x-6)}{(x-1)(x+1)}\le 0 <=>$$

$$\begin{cases}\frac{x-6}{x+1}\le 0,\\ x\ne 1\end{cases} <=> \begin{cases}-1<x\le 6,\\ x\ne 1\end{cases} <=> \left[\begin{array}{l}-1<x<1\\ 1<x\le 6.\end{array}\right.$$

..: $(-1;\ 1)\cup(1;\ 6].$

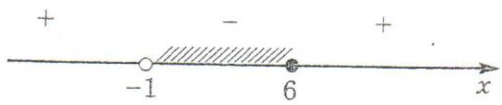
1. $x^2-7x+6=0,$

$D=49-24=25,\ \sqrt{D}=5,$

$x_1=\frac{7+5}{2}=6,\quad x_2=\frac{7-5}{2}=1.$

2. $x^2-7x+6=(x-6)(x-1).$

3. $\frac{x-6}{x+1}\le 0 <=> -1<x\le 6.$



$f(x)=\frac{x-6}{x+1},\ f(7)>0,\ f(1)<0,\ f(-5)>0.$

Если сразу приучить учащихся к грамотному оформлению решений задач, то впоследствии можно помочь им избежать многих неприятностей. Например, если ученик что-то забыл или пропустил занятия, то, взяв тетрадь (свою или одноклассника), он всегда по таким **полным** решениям сможет ликвидировать пробелы в своих знаниях.

Грамотному оформлению решения задач необходимо также уделить внимание, особенно если в классе есть учащиеся-медалисты, так как иначе, если ученик не умеет показывать в письменной работе свои знания, то все его усилия окончить школу с медалью могут быть сведены на нет.

Кроме того, грамотное оформление решений задач приучает к аккуратности и последовательности, что само по себе очень важно.

В завершение рассмотрим несколько задач из курса алгебры 10–11 классов.

Задача 7. *Решите уравнение* $3^{x^2+2}-3^{1-x^2}=26.$

Решение.

$$3^{x^2+2}-3^{1-x^2}=26 <=> 9\cdot 3^{x^2}-\frac{3}{3^{x^2}}=26 <=>$$
$$<=> 9\cdot\left(3^{x^2}\right)^2-3=26\cdot 3^{x^2} <=>$$
$$<=> 9\cdot\left(3^{x^2}\right)^2-26\cdot 3^{x^2}-3=0 <=>$$
$$<=> \left[\begin{array}{l} 3^{x^2}=3 \\ 3^{x^2}=-\frac{1}{9} \end{array}\right. <=> 3^{x^2}=3 <=> x^2=1 <=> \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1. \end{array}\right.$$

$$9t^2-26t-3=0,$$
$$D=676+108=784,\ \sqrt{D}=28,$$
$$t_1=\frac{26+28}{18}=3,$$
$$t_2=\frac{26-28}{18}=-\frac{1}{9}.$$

Ответ: 1; –1.

Задача 8. *Решите уравнение* $\log_2(4-x)+\log_2(x-1)=\log_2(3x-4).$

Решение.

$$\log_2(4-x)+\log_2(x-1)=\log_2(3x-4) <=>$$
$$<=> \begin{cases} \log_2\left((4-x)(x-1)\right)=\log_2(3x-4), \\ 4-x>0, \\ x-1>0 \end{cases} <=>$$
$$<=> \begin{cases} (4-x)(x-1)=3x-4, \\ 1<x<4 \end{cases} <=> \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2, \end{array}\right. \\ 1<x<4 \end{cases} <=> x=2.$$

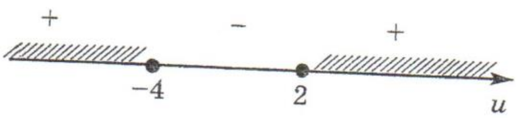
$$(4-x)(x-1)=3x-4,$$
$$4x-4-x^2+x=3x-4,$$
$$-x^2+2x=0,$$
$$x(x-2)=0,$$
$$x=0 \text{ или } x=2.$$

Ответ: 2.

Задача 9. *Решите неравенство* $(2^x+3)(2^x-1)\ge 5.$

Решение. Замена $2^x=u$ приводит исходное неравенство к виду $(u+3)(u-1)\ge 5.$

$$(u+3)(u-1)\ge 5 \Leftrightarrow u^2-u+3u-3-5\ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u^2+2u-8\ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (u+4)(u-2)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u\le -4 \\ u\ge 2. \end{array}\right.$$



$$(2^x+3)(2^x-1)\ge 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x\le -4 \\ 2^x\ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow 2^x\ge 2 \Leftrightarrow x\ge 1.$$

1. $u^2+2u-8=0,$

$D=4+32=36,\ \sqrt{D}=6,$

$u_1=\dfrac{-2+6}{2}=2,$

$u_2=\dfrac{-2-6}{2}=-4.$

2. $u^2+2u-8=(u+4)(u-2).$

3. $f(u)=(u+4)(u-2),$

$f(3)>0,\ \ f(0)<0,\ \ f(-6)>0.$

Ответ: $[1;\ +\infty)$.

Задача 10. Укажите корни уравнения $3\sqrt{x-1}-x=1$, принадлежащие области определения функции $f(x)=\log_7(5-x)$.

Решение. Задача сводится к решению системы $\left\{\begin{array}{l} 3\sqrt{x-1}-x=1, \\ 5-x>0. \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{l} 3\sqrt{x-1}-x=1, \\ 5-x>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3\sqrt{x-1}=1+x, \\ x<5 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 9(x-1)=(1+x)^2, \\ 1+x\ge 0, \\ x<5 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=5, \end{array}\right. \\ -1\le x<5 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=2.$$

$9(x-1)=(1+x)^2,$

$9x-9=1+2x+x^2,$

$x^2-7x+10=0,$

$x=2$ *или* $x=5.$

Ответ: 2.