ПОДГОТОВКА К ЕГЭ
ВЫСШИЙ УРОВЕНЬ КАЧЕСТВА

ЕГЭ 2012

ФИЗИКА

Решение задач

СДАЕМ БЕЗ ПРОБЛЕМ!

- ✓ Задания частей В и С
- ✓ Подробные решения и ответы

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ
ВЫСШИЙ УРОВЕНЬ КАЧЕСТВА

ЕГЭ 2012

Н.И. Зорин

ФИЗИКА
Решение задач

СДАЕМ БЕЗ ПРОБЛЕМ!

Москва эксмо 2012

УДК 373.167.1:53
ББК 22.3я721
З-86

Зорин Н. И.

З-86 ЕГЭ 2012. Физика. Решение задач. Сдаем без проблем! / Н. И. Зорин. — М. : Эксмо, 2012. — 320 с. — (ЕГЭ. Сдаем без проблем).

ISBN 978-5-699-51304-8

Книга адресована абитуриентам, поступающим в высшие учебные заведения, а также учащимся старших классов средних школ, гимназий, лицеев, техникумов для подготовки к ЕГЭ по физике.

Данное издание включает:

- решение задач с кратким и развернутым ответом;
- задачи для самостоятельного решения.

Пособие окажет помощь учителям при организации систематической подготовки учащихся к сдаче ЕГЭ по физике.

УДК 373.167.1:53
ББК 22.3я721

ISBN 978-5-699-51304-8

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие предназначено для выпускников школ и учителей, занимающихся подготовкой учащихся к ЕГЭ.

Цель пособия — углубить и расширить понимание физики будущими абитуриентами и научить их активно применять физические законы к решению конкретных задач.

Данное пособие подготовлено на основе большого практического опыта, накопленного автором при работе с абитуриентами, при подготовке к выпускным экзаменам в форме ЕГЭ, что позволило выявить наиболее сложные для понимания школьниками вопросы физики.

Главное внимание уделено важнейшим физическим явлениям и физическим законам. Нельзя дать рецепта для решения всех задач по физике, можно только научить грамотному подходу к задаче, который позволит найти ее решение.

Выполнение заданий группы В и С требует применение знаний сразу из двух-трех разделов физики, т.е. высокого уровня подготовки школьников. Эти задания отражают уровень требований к вступительным экзаменам в вузы. Включение во вторую и третью части работы сложных заданий разной трудности позволяет дифференцировать учащихся при отборе в вузы с различными требованиями к уровню подготовки. Главная цель экзамена по физике — проверка знания учащимся школьного курса физики, умения использовать эти знания для решения задач и объяснения различных физических явлений. Рассмотрим основные рекомендации по выполнению заданий и характерные ошибки.

Решение и анализ задач позволяют понять и запомнить основные законы и формулы физики, создают представление об их характерных особенностях и границах применения. Задачи развивают навык в использовании общих законов материального мира для решения конкретных вопросов, имеющих практическое значение. Таким образом, умение решать задачи является одним из важных критериев оценки глубины усвоения программного материала.

Решение большинства физических задач можно разделить на четыре этапа.

1. Анализ условия задачи и его наглядная интерпретация схемой или чертежом.

На этом этапе следует уяснить физическое содержание задачи, понять, какие процессы и явления включены в ее условие.

Ознакомившись с условием задачи, не следует пытаться сразу найти искомую величину. Необходимо помнить, что ближайшая цель решения состоит в том, чтобы свести задачу от физической к математической, записав ее условие при помощи формул. Для этого нужно четко представить себе физическое явление, о котором говорится в условии задачи, установить, какие законы физики лежат в основе данного явления, вспомнить математическое выражение этих законов.

Чтобы хорошо понять условие задачи, необходимо сделать схематический чертеж, где, хотя бы условно, указать все величины, характеризующие данное явление. Если при этом окажется, что для полного описания явления надо использовать величины, не фигурирующие в условии задачи, их нужно ввести в решение самим, так как в большинстве случаев без них невозможно найти связь между искомыми и заданными величинами.

Сделав чертеж, следует еще раз прочитать условие задачи и отметить, какие из величин, указанных на черте-

же, даны и какие требуется найти. Все известные величины — их числовые значение и наименования — выписываются обычно в колонку.

2. Составление алгебраических уравнений, связывающих физические величины, которые характеризуют рассматриваемое явление с количественной стороны.

На втором этапе с помощью физических законов и формул необходимо установить математическую связь между всеми величинами, введенными в решение при символическом описании рассматриваемого явления. В результате получится одно или несколько уравнений, включающих в себя как заданные, так и неизвестные величины, — физическая задача сводится к математической. При этом особое внимание следует обратить на векторный характер ряда величин, входящих в формулы физики. Для полного определения этих величин необходимо учитывать не только их числовое значение, но и направление. При этом всегда нужно помнить, что числовое значение и направление — это две неотъемлемые характеристики любого вектора. Если происходит изменение векторной величины, то это значит, что меняется или ее числовое значение, или направление, или то и другое вместе. Векторные величины равны только в том случае, если их числовые значения и направления одинаковы.

3. Совместное решение полученных уравнений относительно искомой величины.

Прежде чем решать составленную систему уравнений, полезно убедиться в том, что число неизвестных равно числу уравнений, иначе система не будет иметь определенного решения. В том случае, если число неизвестных величин превышает число уравнений, приходится искать дополнительные уравнения. Дополнительные уравнения могут выражать такие условия, как: следствия, вытекающие из стандартных упрощающих допущений (например, до-

пущение о невесомости нитей и блоков); связи между движениями, которые указаны в задаче; особые свойства отдельных видов сил (упругости, трения, тяготения); разного рода геометрические соотношения, указанные в задаче. Третий этап заканчивается повторной проверкой полученной системы уравнений и решением этой системы.

Решение системы уравнений нужно начинать с исключения тех неизвестных величин, которые не требуется находить по условию задачи, и следить за тем, чтобы при каждом алгебраическом действии число неизвестных уменьшалось.

4. Анализ полученного результата и числовой расчет.

Получив ответ в общем виде, следует проверить правильность расчетных формул по наименованию. Для этого в расчетные формулы вместо входящих в них физических величин подставляют их единицы измерения и проводят с ними действия, с тем чтобы убедиться, что результат получается в единицах измерения искомой величины в принятой системе. Несоблюдение этого условия (оно необходимо, но недостаточно) свидетельствует об ошибке, допущенной в ходе решения. Установив наименование искомой величины, можно приступать к действиям с числами. Все расчеты необходимо проводить в Международной системе единиц (СИ). Проводя арифметические расчеты, следует пользоваться правилами приближенных вычислений, позволяющими во многих случаях сэкономить время, не нанося никакого ущерба точности. Эти правила излагаются в руководствах по элементарной математике.

5. Требования к оформлению работы.

О ваших знаниях будут судить по тому, ЧТО написано в работе и КАК написано.

Работа должна быть аккуратной. Ответу на каждый пункт задания должно быть выделено определенное место.

Проверяющему должно быть понятно, где заканчивается одна задача и начинается другая. То есть между задачами должен быть некоторый интервал. Текст задания переписывать не нужно, надо лишь кратко указать, что дано в условии задачи.

При решении многих задач необходимо сделать рисунок. **Рисунок первичен.** Рисунок помогает понять, что рассматривается в задании, и найти путь к решению задачи.

- В задачах по механике на рисунке необходимо показать все данные в задании параметры: силы, скорости, ускорения, направления движения или вращения тел, реакции связей, направления сил (силы трения скольжения, например), возникающих в процессе движения тел, и т.д.
- В задачах по термодинамике необходимо указать на графиках процессов температуру в разных точках процессов, выделить участки, на которых подводится и отводится тепло, графически указать работу, совершаемую в процессе (вы знаете, что это площадь под графиком в координатах P-V).
- В задачах по электродинамике указать знаки зарядов, направление силовых линий, знаки зарядов на обкладках конденсаторов, направление токов в цепях и направление сторонних сил в источниках ЭДС.
- Если речь идет об оптике, то аккуратно изобразить ход лучей в оптических системах, положение фокусов, при необходимости построить изображение предмета.

Решение задач по физике требует пояснений. Оно сопровождается неким текстом, в котором необходимо по ходу решения указать, какие явления рассматриваются в этой задаче, основываясь на каких законах строится ее решение. После этого, например в задачах по механике, записываются уравнения движения тел (второй закон Ньютона) в векторной форме. В случае необходимости выбирается система координат и записываются уравнения

движения в проекциях на оси координат[1]. В результате получается система уравнений, решение которой приводит к ответу. Желательно проверить полученную формулу по наименованию. Подставить числовые значения, если необходимо, и получить числовой ответ, указав наименование искомой величины. Если нет специальных указаний, результат записывается в единицах СИ. Закончить решение задачи необходимо словом «ответ», привести его в виде конечной формулы и отдельно в виде числа с указанием наименования.

[1] При выполнении действий с векторными величинами необходимо использовать математические правила работы с векторными величинами и их проекциями.

МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

Примеры решения задач с кратким или развернутым ответом

1. Автомобиль двигался из пункта A в пункт B со скоростью $v_1 = 40$ км/ч, а обратно из B в A со скоростью $v_2 = 60$ км/ч. Определите среднюю путевую скорость автомобиля на всем пути и скорость перемещения, если автомобиль в пункте B: а) мгновенно развернулся и поехал назад; б) простоял в течение времени, равного половине времени движения из B в A.

Решение

а) Расстояние между A и B равно l. Пройденный автомобилем путь $s = 2l$. Движение из A в B равномерное, поэтому время движения $t_1 = l/v_1$, аналогично время движения из B в A $t_2 = l/v_2$. Полное время движения $t = t_1 + t_2$, средняя путевая скорость

$$v_s = \frac{s}{t} = \frac{2l}{t_1 + t_2} = \frac{2l}{\frac{l}{v_1} + \frac{l}{v_2}} = \frac{2l}{l\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 48 \text{ км/ч} \approx 13 \text{ м/с}.$$

При возвращении в исходную точку вектор перемещения $\Delta\vec{r} = 0$, поэтому средняя скорость перемещения $v_{ср} = \Delta\vec{r}\ /t = 0$.

б) В этом случае полное время движения включает в себя слагаемое

$$t_3 = \frac{1}{2}t_2 = \frac{l}{2v_2}.$$

Поэтому

$$v_s = \frac{2l}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{2l}{\frac{l}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}} = \frac{4v_1v_2}{3v_1 + 2v_2} = 40 \text{ км/ч} \approx 11 \text{ м/с}.$$

Поскольку перемещение остается равным нулю, то и $v_{ср} = 0$.

2. Материальная точка совершает два последовательных перемещения. Вектор первого перемещения направлен под углом $\alpha_1 = 30^\circ$ к оси OX, причем на этом участке точка движется прямолинейно и равномерно со скоростью $v_1 = 10$ м/с. Вектор второго перемещения направлен под углом $\alpha_2 = 90^\circ$ к оси OX, и его модуль вдвое больше модуля первого перемещения. Движение на втором участке — прямолинейное равномерное со скоростью $v_2 = 20$ м/с. Найдите среднюю скорость перемещения и среднюю скорость на всем пути.

Решение

На рисунке изображено движение точки. $\overrightarrow{AC}$ — первое перемещение, $\overrightarrow{CB}$ — второе перемещение. Вектор полного перемещения $\Delta\vec{r} = \overrightarrow{AB}$. Найдем его модуль. $\angle ACB = \beta$ — внешний угол $\Delta\, AC_1C$, поэтому он равен сумме двух внутренних, с ним не смежных. Итак, $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 = 120^\circ$. Пусть модуль первого перемещения $AC = S$, тогда модуль второго перемещения $BC = 2S$. Из $\Delta\, ACB$ по теореме косинусов

$$\Delta r = AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\beta} =$$
$$= \sqrt{S^2 + (2S)^2 - 2 \cdot S \cdot 2S \cdot \cos 120^\circ} = S\sqrt{7}.$$

Так как движение на участке AC равномерное, то время, за которое совершено перемещение $\overrightarrow{AC}$, равно $t_1 = S/v_1$. Время, за которое совершено перемещение $\overrightarrow{CB}$, равно $t_2 = 2S/v_2$. Полное время движения

$$t = t_1 + t_2 = \frac{S}{v_1} + \frac{2S}{v_2} = \frac{S(2v_1 + v_2)}{v_1 v_2}.$$

По определению средняя скорость перемещения $\vec{v}_{ср} = \frac{\Delta \vec{r}}{t}$, а ее модуль

$$v_{ср} = \frac{\Delta r}{t} = \frac{S\sqrt{7}}{S(2v_1 + v_2)/v_1 v_2} = \frac{\sqrt{7} v_1 v_2}{2v_1 + v_2} = 13{,}2 \text{ м/с}.$$

Найдем направление вектора $\vec{v}_{ср}$. Он образует угол γ с вектором $\overline{AC}$. Из $\Delta\, ABC$ по теореме синусов

$$\frac{2S}{\sin\gamma} = \frac{\Delta r}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{2S\sin\beta}{\Delta r} = \frac{2S}{S\sqrt{7}}\sin 120° = \sqrt{\frac{3}{7}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = \arcsin\sqrt{\frac{3}{7}} = 25{,}4°.$$

Угол, который образует вектор средней скорости с осью OX, равен $\gamma + \alpha_1 = 55{,}4°$.

Средняя скорость v_s на всем пути есть весь пройденный путь, отнесенный к полному времени движения, поэтому

$$v_s = \frac{S + 2S}{t} = \frac{3S}{t} = \frac{3S}{S(2v_1 + v_2)/v_1 v_2} = \frac{3v_1 v_2}{2v_1 + v_2} = 15 \text{ м/с}.$$

3. Тело движется равноускоренно. Его начальная скорость v_1, а конечная — v_2. Найдите среднюю скорость тела. В предположении, что начальная скорость равноускоренного движения равна нулю, найдите отношение путей, проходимых телом за последовательные равные промежутки времени.

Решение

При равноускоренном движении координата $x(t)$ и пройденный путь $S(t)$ совпадают, если положить начальную координату равной нулю. Тогда $S(t) = v_1 t + at^2/2$, где a — ускорение тела; t — промежуток времени, за который пройден путь S, при этом скорость изменилась от v_1 до v_2 и $v_2 = v_1 + at \Rightarrow at = v_2 - v_1$. Средняя путевая скорость

$$v_s = \frac{S}{t} = v_1 + \frac{at}{2} = v_1 + \frac{v_2 - v_1}{2} = \frac{v_2 + v_1}{2}.$$

В рассматриваемом случае пройденный путь равен модулю вектора перемещения, поэтому $v_{ср} = v_s$. Полученный результат справедлив только тогда, когда движение является равноускоренным.

При $v_1 = 0$ путь, проходимый за промежуток времени Δt, равен $S_1 = S(\Delta t) = \frac{a\Delta t^2}{2}$. Путь, проходимый за время

$$2\Delta t,\ S(2\Delta t) = \frac{4a\Delta t^2}{2};$$

$$S(3\Delta t) = \frac{9a\Delta t^2}{2};\ \ldots\ S((n-1)\Delta t) = \frac{(n-1)^2 a\Delta t^2}{2};$$

$$S_n = \frac{n^2 a\Delta t^2}{2},\ \text{где } n \in N.$$

Путь, проходимый за второй промежуток времени Δt:

$$S_2 = S(2\Delta t) - S(\Delta t) = \frac{4a\Delta t^2}{2} - \frac{a\Delta t^2}{2} = \frac{3a\Delta t^2}{2}.$$

Путь, проходимый за третий промежуток времени Δt:

$$S_3 = S(3\Delta t) - S(2\Delta t) = \frac{9a\Delta t^2}{2} - \frac{4a\Delta t^2}{2} = \frac{5a\Delta t^2}{2}.$$

Путь, проходимый за n-й промежуток Δt:

$$S_n = S(n\Delta t) - S((n-1)\Delta t) =$$

$$= \frac{n^2 a\Delta t^2}{2} - \frac{(n-1)^2 a\Delta t^2}{2} = \frac{a\Delta t^2}{2}(n^2 - (n-1)^2) = \frac{a\Delta t^2}{2}(2n+1).$$

Тогда

$$S_1 : S_2 : S_3 : \ldots S_n = \frac{a\Delta t^2}{2} : \frac{3a\Delta t^2}{2} : \frac{5a\Delta t^2}{2} : \ldots : \frac{a\Delta t^2}{2}(2n+1) =$$

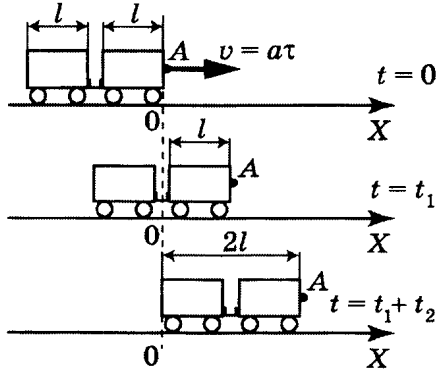
$$= 1 : 3 : 5 : \ldots (2n+1).$$

Отношение путей, проходимых телом за равные последовательные промежутки времени в равноускоренном движении с начальной скоростью, равной нулю, равно отношению последовательных нечетных чисел натурального ряда.

4. Когда опоздавший пассажир вбежал на платформу, мимо него за время t_1 прошел предпоследний вагон поезда. Последний вагон прошел мимо пассажира за время t_2. На сколько опоздал пассажир к отходу поезда? Поезд двигался равноускоренно, длина вагонов одинакова.

Решение

Так как поезд отходит от платформы, то его начальная скорость $v_0 = 0$. Пусть пассажир опоздал на время τ, тогда в момент, когда пассажир вбежал на платформу,



скорость поезда $v = a\tau$. Отсчет времени начнем с момента появления пассажира на платформе и проследим за положением точки A (в координатной системе, изображенной на рисунке, l — длина вагона). Закон движения поезда

$$x(t) = x_0 + v_x t + \frac{a_x t^2}{2} = x(t)v_x t + \frac{a_x t^2}{2} = x(t)at\tau + \frac{at^2}{2}.$$

При $t = t_1$ $\quad x(t_1) = x_A = l = at_1\tau + \dfrac{at_1^2}{2}.$ (1)

При $t = t_1 + t_2$ $\quad x(t_1 + t_2) = x_A = 2l = a\tau(t_1 + t_2) + \dfrac{a(t_1 + t_2)^2}{2}.$ (2)

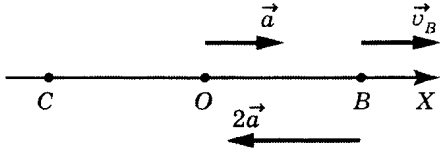
Разделив уравнение (2) на (1), получим

$$2 = \frac{\tau(t_1 + t_2) + (t_1 + t_2)^2/2}{\tau_1 t_1 + t_1^2/2} \Rightarrow 2\tau_1 + t_1^2 = \tau_1 + \tau_2 + \frac{t_1^2}{2} + t_1 t_2 + \frac{t_2^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau(t_1 - t_2) = \frac{t_2^2}{2} + t_1 t_2 - \frac{t_1^2}{2} \Rightarrow \tau = \frac{t_2^2 + 2t_1 t_2 - t_1^2}{2(t_1 - t_2)}.$$

Ответ: $\tau = \dfrac{t_2^2 + 2t_1 t_2 - t_1^2}{2(t_1 - t_2)}.$

5. Тело начинает двигаться из точки O без начальной скорости по прямой с постоянным ускорением a. Через промежуток времени τ после начала движения тело оказывается в точке B, причем в ней происходит изменение направления ускорения на противоположное, а его модуль возрастает вдвое. Через какое время после начала движения тело окажется в точке C, лежащей по другую сторону от начальной точки движения O, такой, что $OB = OC$?



Решение

Сделаем чертеж, иллюстрирующий условие задачи. Для этого направим координатную ось X вдоль прямой, по которой движется тело, как показано на рисунке. Ее начало поместим в точку O, следовательно, начальная координата $x_0 = 0$. Запишем законы движения на участке OB. Так как проекция ускорения $ax = a$ и $v_0 = 0$, то $v(t) = at$, $x(t) = at^2/2$. В момент времени $t = \tau$ тело окажется в точке B, его скорость $v_B = a\tau$, а его координата $x_B = a\tau^2/2$. Несмотря на то что в точке B ускорение изменяет направление, тело еще некоторое время продолжит свое движение в прежнем направлении, двигаясь равнозамедленно. После того как скорость обратится в нуль, оно начнет двигаться в обратном направлении.

В точке B естественно начать новый отсчет времени. Проекция ускорения $a_x = -2a$, начальная координата x_B, начальная скорость v_B. Закон движения тела

$$x(t) = x_B + v_B t + \frac{a_x t^2}{2} = x(t)\frac{a\tau^2}{2} + a\tau t - \frac{2at^2}{2} = x(t)\frac{a\tau^2}{2} + a\tau t - at^2. \quad (1)$$

Когда тело окажется в точке C, его координата $x_c = -x_B = -a\tau^2/2$. Формула (1) выражает координату тела в любой момент времени при движении с ускорением $a_x = -2a$, в том числе и координату точки C. Поэтому можно составить уравнение $a\tau^2/2 + a\tau t - at^2 = -a\tau^2/2$, где t — время движения на участке от B к C. Перенося все члены в одну часть и сокращая на $a \neq 0$, получаем квадратное уравнение относительно t: $t^2 - \tau t - \tau^2 = 0$. Его дискриминант $D = \tau^2 - 4(-\tau^2) = 5\tau^2$, а его корни $t_{1,2} = (\tau \pm \tau\sqrt{5}) / 2 = \tau(1 \pm \sqrt{5})/2$. Здесь $t_2 < 0$, что не удовлетворяет условию задачи. Значит, $t = t_1 = \tau(1 + \sqrt{5})/2$. Тело окажется в точке С через время $t_2 = t_1 + \tau = \tau(1 + \sqrt{5})/2 + \tau = \tau(3 + \sqrt{5})/2 \approx 2{,}6\tau$ после начала движения.

6. За последнюю секунду свободно падающее тело пролетело 3/4 всего пути. Сколько времени падало тело и с какой высоты? Найти конечную скорость.

Решение

Для описания свободного падения воспользуемся формулами $v_x(t) = v_{0x} + g_x t$; $x(t) = x_0 v_{0x} t + \frac{g_x t^2}{2}$. Тогда $v_x(t) = gt$ и $x(t) = -gt^2/2$. Пусть t — полное время движения тела, следовательно, $x_A = H = gt^2/2$.

Время движения до точки B $t - \Delta t$, где $\Delta t = 1$ с — время движения на участке BA. Так как $x_B = H/4$, то $H/4 = g(t - \Delta t)^2/2$.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} H = \dfrac{gt^2}{2}, \\ \dfrac{H}{4} = \dfrac{g(t-\Delta t)^2}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H = \dfrac{gt^2}{2}, \\ H = 2g(t-\Delta t)^2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{gt^2}{2} = 2g(t-\Delta t)^2 \Rightarrow \frac{t^2}{(t-\Delta t)^2} = 4 \Rightarrow \frac{t}{(t-\Delta t)} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 2(t-\Delta t) \Rightarrow t = 2\Delta t = 2 \text{ с}.$$

Искомая высота $H = gt^2/2 = 19{,}6$ м, а конечная скорость $v_A = gt = 19{,}6$ м/с.

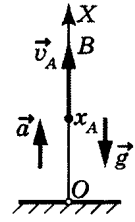
7. Аэростат поднимается с Земли вертикально вверх с ускорением $a = 2$ м/с^2. Через $\tau = 5$ с от начала движения аэростата из него выпал предмет. Через сколько времени этот предмет упадет на землю? Начальная скорость аэростата равна нулю.

Решение

Так как аэростат движется равноускоренно, то его скорость и координата выражаются формулами:

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t = at;\ x(t) = x_0 + v_{0x}t + a_x t^2/2 = a_x t^2/2.$$

Через время $\tau = 5$ с аэростат, а вместе с ним и предмет будут иметь скорость $v_A = a\tau$ и координату $x_A = a\tau^2/2$.



Предмет далее движется в поле тяжести с постоянным ускорением $\vec{g}$, проекция которого на ось $Xa_x = -g$. Время удобно отсчитывать от момента, когда предмет выпал из аэростата. Тогда v_A и x_A — это начальные скорость и координата предмета. Используя формулу, запишем закон движения предмета:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + g_x t^2/2 = x_A + v_A t - g_x t^2/2 = x(t) = \\ = a\tau^2/2 + a\tau t + g_x t^2/2.$$

В тот момент, когда предмет упал на землю, его координата $x = 0$, а время движения — t. Получаем уравнение

$$0 = a\tau^2/2 + a\tau t - gt^2/2 \Rightarrow gt^2 - 2a\tau t - a\tau^2 = 0,$$

$D/4 = (a\tau)^2 + ag\tau^2 = (a\tau)^2\,(1 + g/a)$. Корни квадратного уравнения:

$$t = \left(a\tau \pm a\tau\sqrt{1+g/a/g} = \tau(a/g)\right)/\left(\sqrt{1+g/a}\right).$$

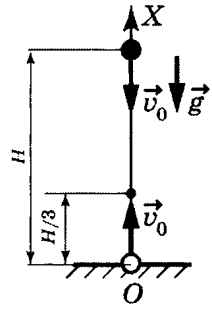
Так как $t > 0$, то время движения предмета

$$t = \tau(a/g)/\left(1+\sqrt{1+g/a}\right);\ t \approx 3{,}4\ \text{с}.$$

8. Два мяча брошены одновременно навстречу друг другу с одинаковыми скоростями: один вертикально вверх с поверхности земли, другой вертикально вниз с высоты H. Найти эти скорости, если известно, что к моменту встречи один из мячей пролетел путь $H/3$.

Решение

Мяч, брошенный с поверхности земли, до точки встречи движется равнозамедленно, поэтому он проходит путь $H/3$. Несмотря на то что другой мяч движется равноускоренно, ускорения обоих мячей одинаковы и равны вектору $\vec{g}$.



Введем вертикальную координатную ось X, ее начало поместим на поверхности земли. Для мяча, находившегося на земле, $a_x = -g$, $v_{0x} = v_0$, $x_Q = 0$, поэтому его координата изменяется по закону

$$x(t) = v_0 t - gt^2/2.$$

Для мяча, находившегося на высоте H, в той же системе координат, $a = -g$, $v_{0x} = -v_0$, $x_0 = H$. Его координата выражается формулой

$$x(t) = H - v_0 t - gt^2/2.$$

В момент встречи пути, пройденные мячами, различны, однако их координаты одинаковы и равны $H/3$. По условию задачи время движения мячей до точки встречи одинаково. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{H}{3} = v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}, \\ \dfrac{H}{3} = H - v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, получим $2H/3 = H - gt^2$. Время движения до встречи $t = \sqrt{H/3g}$. Из первого уравнения системы находим

$$v_0 = \left(H/3 + gt^2/2\right)/t = \sqrt{3gH}/2.$$

9. С башни высотой $H = 25$ м горизонтально брошен камень со скоростью $v_0 = 10$ м/с. На каком расстоянии от основания башни он упадет? Какова его конечная скорость? Какой угол образует вектор конечной скорости с горизонтом?

Решение

В любой точке траектории на камень действует сила тяжести, которая сообщает ему ускорение свободного падения $\vec{g}$. Движение камня раскладываем на два независимых прямолинейных движения, происходящих в горизонтальном OX и вертикальном OY направлениях. Начало координатной системы O находится на поверхности земли у основания башни.

Проекция ускорения $\vec{g}$ на ось OX равна нулю, поэтому в горизонтальном направлении камень движется прямолинейно равномерно. Проекция ускорения $\vec{g}$ на ось OY $g_y = -g = \text{const}$, поэтому движение в вертикальном направлении является равнопеременным (равноускоренным). В выбранной координатной системе начальные координаты камня $x_{0x} = 0$, $y_0 = H$, начальные скорости $v_{0x} = v_0$, $v_{0y} = 0$. Законы равномерного движения в горизонтальном направлении записываются в виде: $v_x(t) = v_{0x} = v_0$; $x(t) = x_0 + v_{0x}t = v_0t$. Законы движения в вертикальном направлении: $v(t) = v_{0y} + g_yt = -gt$; $y(t) = y_0 + v_{0y}t + g_yt^2/2 = H - gt^2/2$.

В точке падения камня его координата y обращается в нуль; получаем уравнение $H - gt^2/2 = 0$, где t — время падения. Из последнего уравнения находим, что $H = gt^2/2 \Rightarrow t = \sqrt{2H/g}$. Из рисунка следует, что расстояние S от основания башни до точки падения равно координате x точки падения: $S = x = v_{0x}t = v_0\sqrt{2H/g} = 22{,}6$ м.

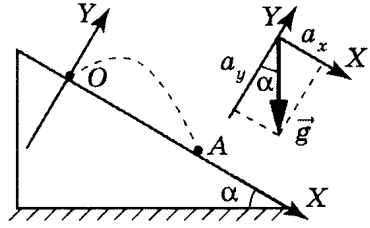
Вектор конечной скорости $\vec{v}_k$ направлен по касательной к траектории, его проекция на горизонтальное направление $v_x = v_0$. Проекция на вертикальное направление $v_y = -gt = -g\sqrt{2H/g} = -\sqrt{2gH}$.

Модуль $v_k = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gH} = 24{,}3$ м/с. Для определения угла α из прямоугольного треугольника ABC найдем:

$$\cos\alpha = v_x / v_k = \alpha = \arccos v_0 / v_k = \arccos 0{,}41 = 65{,}8°.$$

10. На горе с углом наклона α к горизонту бросают мяч с начальной скоростью v_0 перпендикулярно склону горы. Найдите время полета мяча. На каком расстоянии от точки бросания упадет мяч?

Решение



Для решения задачи можно сложное движение разложить на движение в горизонтальном и вертикальном направлениях и ввести систему координат, изображенную на рисунке. Тогда $a_x = g \sin\alpha$, $a_y = -g \cos\alpha$, т.е. движения вдоль X и Y оказываются равнопеременными. Законы движения запишутся в виде

$$x(t) = x_0 + v_{ox}t + a_x t^2/2 = (g \sin \alpha t^2)/2$$
$$(x_0 = 0 \text{ и } v_{0x} = 0),$$
$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + a_y t^2/2 = v_o t - (g \cos \alpha t^2)/2$$
$$(y_0 = 0 \text{ и } v_{0y} = v_0).$$

В точке падения A $y_A = 0 \Rightarrow v_o t_n - (g \cos \alpha t^2{}_n)/2 = 0$, где t_n — время полета мяча,

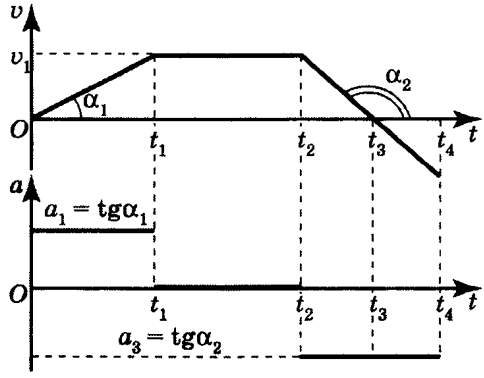
$$t_п(v_0 - (g\cos\alpha t_п)/2) = 0 = t_п = 2v_0/(g\cos\alpha).$$

Расстояние от точки бросания до точки падения
$$s = AO = x_A = (g \sin\alpha t^2{}_п)/2 = (2v^2{}_0 \sin\alpha)/(g \cos^2\alpha).$$

11. Дан график зависимости проекции скорости тела от времени. Движение прямолинейное. Постройте графики зависимости проекции ускорения, координаты и пройденного пути от времени. Начальная координата тела равна нулю.

Решение

При $t \in [0, t_1]$ скорость изменяется по линейному закону $v(t) = v_0 + a_1 t$, где $v_0 = 0$ и $a_1 = \text{tg}\alpha_1 = \text{const} > 0$. Следовательно, движение является равнопеременным.

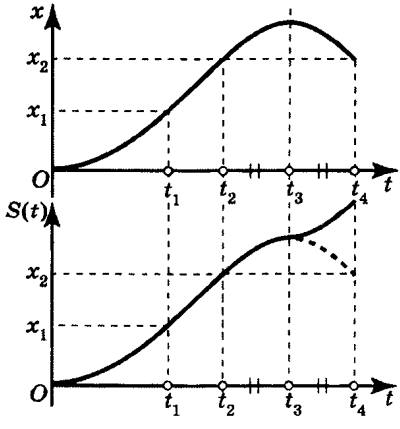


При $t \in [t_1;\ t_2]$ $v_1 = \text{const}$ (равномерное движение) и $a_2 = 0$. При $t \in [t_2;\ t_4]$ зависимость скорости от времени линейная. Если за начало отсчета времени принять момент времени t_2, то эта зависимость может быть представлена в виде $v(t) = v_1 + a_3 t$, где $a_3 = \text{tg}\alpha_2 = \text{const} < 0$ (так как $\alpha_2 > \pi/2$). Зависимость $a(t)$ представлена на рисунке. Построим график зависимости $x(t)$.

При $t \in [0,\ t_1]$ $x(t) = x_0 + v_{0x}t + a_{1x}t^2/2 = a_{1x}t^2/2$ — парабола.

При $t \in [t_1;\ t_2]$ $x(t) = x_1 - v_{1x}t$ (время отсчитывается от t_1) — прямая линия.

При $t \in [t_2;\ t_4]$ $x(t) = x_2 + v_{1x}t + a_{3x}t^2/2$ (время отсчитывается от t_2) — парабола, ветви которой направлены вниз, так как $a_{3x} < 0$.



По условию задачи $v(t)$ — непрерывная функция во всех точках, включая t_1 и t_2. Так как $v = x'(t)$, то функция $x(t)$ должна иметь производную в точках t_1 и t_2, поэтому прямая $x(t) = x_1 + v_1 t$ является касательной к параболам в точках t_1 и t_2. Так как $v = x'$ и $v(t_3) = 0$, то в точке t_3 функция $x(t)$ имеет экстремум (максимум). Зависимость $x(t)$ представлена на рисунке.

Для построения графика пройденного пути от времени надо учесть, что движение является прямолинейным, и пока тело удаляется от начала координат, $x(t)$ и $S(t)$ совпадают. При $t \in [t_3; t_4]$ координата уменьшается, но пройденный путь продолжает возрастать (пройденный путь — неубывающая функция времени). Так как $a_{1x} = \mathrm{tg}\alpha_1 < |\mathrm{tg}\alpha_2| = |a_2|$, то парабола на участке $t \in [t_2; t_4]$ проходит более круто, чем на участке $[0, t_1]$. Зависимость $S(t)$ представлена на рисунке.

12. Движение материальной точки описывается уравнениями $x(t) = 5\cos 2t$ см, $y(t) = 5\sin 2t$ см. Определить скорость, ускорение и траекторию уравнения точки.

Решение

Определим траекторию. Для этого необходимо получить зависимость, содержащую x и y и не содержащую время t. В каждой задаче этот вопрос решается с учетом конкретного вида зависимостей $x(t)$ и $y(t)$. В данной задаче эффективнее всего возвести каждое уравнение в квадрат и результаты сложить:

$$\begin{cases} x^2 = 25\cos^2 2t \\ y^2 = 25\sin^2 2t \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 25(\cos^2 2t + \sin^2 2t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 25.$$

Сравнивая полученный результат с уравнением окружности

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

приходим к выводу, что траектория движения точки — окружность с центром в начале координат $O(0;\ 0)$ и радиусом $R = 5$ см. Проекция скорости на оси X и Y

$$v_x = x'(t) = (5\cos 2t)' = -5\cdot 2\sin 2t = -10\sin 2t.$$
$$v_y = y'(t) = (5\sin 2t)' = 5\cdot 2\cos 2t = 10\cos 2t.$$

Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{10^2\cos^2 2t + 10^2\sin^2 2t} = 10 \text{ см/с} \approx 0{,}1 \text{ м/с}.$$

Проекции ускорения на оси X и Y

$$a_x = v_x' = (-10\sin 2t)' = -10\cdot 2\cos 2t = -20\cos 2t.$$
$$a_y = v_y' = (10\cos 2t)' = -10\cdot 2\sin 2t = -20\sin 2t.$$

Модуль ускорения

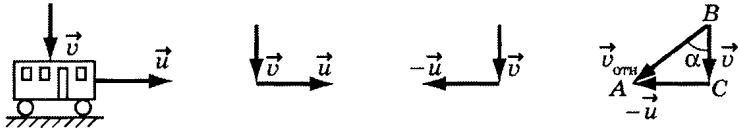
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{20^2\cos^2 2t + 20^2\sin^2 2t} = 20 \text{ см/с}^2 \approx 0{,}2 \text{ м/с}^2.$$

13. Капли дождя, падающие вертикально, падают на стекло окна вагона, движущегося со скоростью $u = 36$ км/ч, и оставляют на нем след под углом 60° к вертикали. Определите скорость падения капель v.

Решение

Рассмотрим движение капли в системе отсчета, связанной с движущимся вагоном. Пусть $v_{\text{отн.}}$ — скорость капли в этой подвижной системе отсчета. Скорость первоначальной системы отсчета (Земли) $\vec{u}' = -\vec{u}$. Используя закон сложения скоростей, получим

$$\vec{v} = \vec{u}' + \vec{v}_{\text{отн.}} \Rightarrow \vec{v}_{\text{отн.}} = \vec{v} + \vec{u}' = \vec{v} + (-\vec{u}).$$



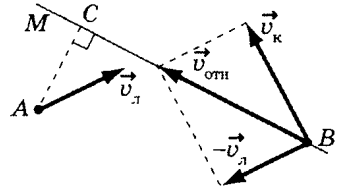
Построим вектор $\vec{v}_{\text{отн.}}$.

Итак, в системе отсчета с вагоном капля имеет скорость $\vec{v}_{\text{отн.}}$, направленную под углом α к вертикали. Модули векторов $\vec{u}$ и $-\vec{u}$ равны, поэтому из $\Delta\, ABC$

$$v = \frac{u}{\operatorname{tg}\alpha} = 20{,}8 \text{ км/ч} = 5{,}8 \text{ м/с}.$$

14. В точках A и B находятся моторная лодка и катер, движущиеся с заданными постоянными скоростями $\vec{v}_{\text{л}}$ и $\vec{v}_{\text{к}}$. Определить графически, каким будет наименьшее расстояние между лодкой и катером.

Решение



Перейдем в систему отсчета, связанную с лодкой. Скорость этой системы отсчета $\vec{u} = \vec{v}_{\text{л}}$, тогда скорость предыдущей системы отсчета (Земли) равна $\vec{v}_{\text{л}}$. Скорость катера относительно новой системы отсчета $\vec{v}_{\text{отн.}}$, тогда из закона сложения скоростей

$$\vec{v}_{\text{к}} = \vec{v}_{\text{л}} + \vec{v}_{\text{отн.}} \Rightarrow \vec{v}_{\text{отн.}} = \vec{v}_{\text{к}} - \vec{v}_{\text{л}} = \vec{v}_{\text{к}} + (-\vec{v}_{\text{л}}).$$

На рисунке построен вектор $\vec{v}_{\text{отн.}}$.

Итак, в системе отсчета, связанной с лодкой, лодка покоится, а катер движется относительно нее со скоростью $\vec{v}_{\text{отн.}}$, направленной вдоль прямой BM.

Из точки A опускаем перпендикуляр AC на BM, длина которого и есть кратчайшее расстояние между телами в системе отсчета, связанной с лодкой. В классической механике расстояние между точками не зависит от системы отсчета, поэтому длина AC есть минимальное расстояние между лодкой и катером в любых системах отсчета.

Задачи для самостоятельного решения

1. Автомобиль, двигаясь прямолинейно, прошел 1,5 км, затем свернул на дорогу, составляющую с первой угол 80°, и проехал по ней еще 1 км. Найдите перемещение автомобиля.

   Ответ: 1,9 км.

2. Тело совершает последовательно два одинаковых по величине перемещения по 10 м каждое под углом 30° и 60° соответственно к направлению оси OX. Определите модуль и направление полного перемещения тела.

   Ответ: 19,2 м; 45°.

3. Автомобиль проехал половину пути со скоростью 60 км/ч, оставшуюся часть пути он половину времени проехал со скоростью 15 км/ч, а последний участок — со скоростью 45 км/ч. Найдите среднюю скорость движения.

   Ответ: 40 км/ч.

4. По движущемуся эскалатору вниз бегут два человека: один со скоростью V, другой со скоростью $2V$. Первый насчитал n_1 ступенек, второй — n_2 ступенек. Найдите число ступенек и скорость эскалатора U.

   Ответ: $n = \dfrac{n_1 n_2}{2n_1 - n_2}$.

5. По поверхности стола движется с постоянной скоростью V черная доска. По доске движется кусок мела, пущенный по ней так, что в начальный момент скорость мела относительно стола перпендикулярна скорости доски и равна U. Какой формы след оставит мел при своем движении?

   Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg} U/V$.

6. С высоты 73,5 м сбрасывают два одинаковых по массе камня, связанных веревкой длиной l = 39,2 м. Первый камень начинает падать на τ = 2 с раньше второго. Через какое время после начала падения камни упадут на землю? Падение происходит без начальной скорости. Рассмотреть два случая: а) веревка абсолютно упругая; б) веревка абсолютно неупругая.

Ответ: а) 4,2 с и 4,3 с; б) 4,2 с и 4,3 с.

7. Упругий шар, падая с высоты 75,4 м, после удара о землю отскакивает вертикально вверх со скоростью, равной $^3/_4$ скорости его падения. На какую высоту поднимется шар? Сколько времени пройдет от начала движения шара до второго его удара о землю?

Ответ: 42,4 м; 9,8 с.

8. Тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью V_0. При этом на тело действует попутный горизонтальный ветер, сообщая телу постоянное ускорение a. Найдите наибольшую дальность полета.

Ответ: $\dfrac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{g}\left(1+\dfrac{a}{g}\operatorname{tg}\alpha\right)$.

9. С высоты 1 м на наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол 30°, свободно падает мяч. Он упруго отражается и второй раз падает на ту же плоскость. Найдите расстояние от места первого удара до второго. Сопротивление не учитывать.

Ответ: 4 м.

10. Камень, брошенный горизонтально с обрыва высотой 10 м, упал на расстояние 14 м от точки бросания. Какова начальная скорость камня? В какой момент времени у камня касательное ускорение равно нормальному? Сопротивление не учитывать.

Ответ: 9,8 м/с; 0,6 с.

ОСНОВЫ ДИНАМИКИ

Примеры решения задач с кратким или развернутым ответом

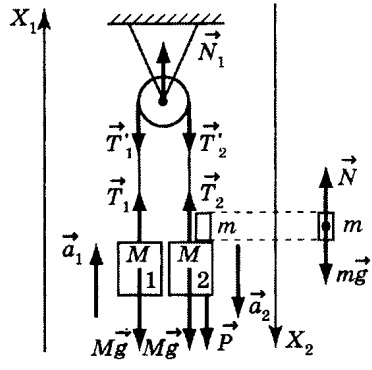
1. Через неподвижный блок переброшена нерастяжимая нить. На концах этой нити подвешены грузы равных масс M. На один из грузов поставили груз массой m. Определите ускорение движения грузов, силу натяжения нити, силу давления груза m на M, а также силу давления на ось блока. Массой блока и нити можно пренебречь.

Решение

1. Сделаем рисунок к данной задаче.

2. Укажем силы, приложенные к каждому телу системы. К телу 1 приложены: сила тяжести $M\vec{g}$, сила натяжения (упругости) нити T_1. К телу 2 приложены: сила тяжести $M\vec{g}$, сила натяжения нити T_2 и сила давления $\vec{P}$ со стороны тела m. Поскольку система движется с ускорением, то $P \neq mg$. Так как массой блока и нити можно пренебречь, то сила натяжения одинакова по модулю во всех точках нити, т.е. $T_1 = T_2 = T$.

К телу m (оно нарисовано отдельно) приложены: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$ со стороны тела 2. По третьему закону Ньютона $\vec{N} = -\vec{P}$, а модули этих сил равны, т.е. $P = N$.



3. Определяем направление движения каждого тела системы и выбираем соответствующие оси координат. В данной задаче очевидно, что тело 2 и тело m двигаются вертикально вниз с ускорением $\vec{a}_2$, а тело 1 поднимает-

ся вверх с ускорением $\vec{a}_1$, так как нить нерастяжима, то модули этих ускорений равны, т.е. $a_1 = a_2 = a$. В некоторых задачах сразу трудно указать, как направлены ускорения тел. Тогда делают предположение о направлении ускорений тел системы. В ходе решения задачи это предположение либо подтверждается, либо опровергается. Координатные оси, как правило, выбирают по направлению ускорений. В данной задаче выбраны вертикальные оси X_1 и X_2.

4. Для каждого тела системы записываем второй закон Ньютона, проецируя силы и ускорения на соответствующие оси:

$$\begin{array}{ll} \text{для тела 1} & \left\{\begin{array}{l} T - Mg = Ma, \\ -T + Mg + P = Ma, \\ \qquad\qquad \text{т.к. } P = N \Rightarrow \\ mg - N = ma. \end{array}\right. \end{array} \quad \left\{\begin{array}{ll} T - Mg = Ma, & (1) \\ & \\ -T + Mg + P = Ma & (2) \\ mg - N = ma. & (3) \end{array}\right.$$

для тела 2

для тела m

5. Из полученной системы уравнений (или одного уравнения) выражаем неизвестные физические величины.

Сложив все уравнения системы, найдем $mg = a\,(2M + m) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \; a = \frac{m}{2M+m}g.$$

Из уравнения (1) $T = Mg + Ma = \dfrac{2M(M+m)g}{2M+m}$.

Из уравнения (3) сила давления

$$P = mg - ma = mg - m\frac{mg}{2M+m} = \frac{2Mmg}{2M+m}.$$

Как отмечалось выше, $P \neq mg$, так как опора (тело 2) движется вниз с ускорением.

Для нахождения силы давления на ось блока рассмотрим силы, действующие на него. Взаимодействие блока с

нитью дает две силы натяжения $\vec{T}_1'$ и $\vec{T}_2'$, причем $\vec{T}_1' = \vec{T}_2' = T_1 = T_2 = T$. Кроме того, на блок действует сила реакции $\vec{N}_1$ со стороны оси. Запишем второй закон Ньютона для блока: проецируя силы на ось X_1, получим $N_1 - 2T = 0$ (так как у блока нет ускорения, его массой можно пренебречь). Значит, $N_1 = 2T$. По третьему закону Ньютона с такой же по модулю силой $\vec{N}_1$ блок давит на ось. Итак,

$$N_1' = 2T = \frac{4M(M+m)g}{2M+m}.$$

2. К пружине, коэффициент жесткости которой равен $k = 0{,}3$ кН/м, подвешена гиря массой $m = 0{,}6$ кг. Найдите удлинение пружины в случае подъема гири с постоянным ускорением $a = 0{,}2$ м/с^2. Как изменится деформация пружины в случае опускания гири с тем же по модулю ускорением?

Решение

Тело движется вверх с ускорением. На гирю действуют сила тяжести mg и сила упругости $F_{упр}$, возникающая вследствие удлинения пружины.

Для проекций сил на ось X по второму закону Ньютона $F_{упр} - mg = ma$. По закону Гука $F_{упр} = k\Delta l$, где Δl — удлинение пружины. Тогда $k\Delta l - mg = ma \Rightarrow \Delta l = m(g + a)/k = 0{,}02$ м. При движении гири вниз с ускорением пружина сжата на $\Delta l' > 0$, и получаем уравнение

$$mg - k\cdot\Delta l' = ma = \Delta l' = m(g - a)/k = 0{,}192 \text{ м}.$$

3. На наклонную плоскость, образующую угол α с горизонтом, положили тело массой m. Определите, с каким ускорением будет двигаться тело. Чему равна сила трения, действующая на него? Коэффициент трения между телом и плоскостью равен μ.

Решение

К телу приложены: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Очевидно, что при небольших углах тело на наклонной плоскости покоится и его ускорение $a = 0$. В этом случае на него действует сила трения покоя. По второму закону Ньютона, записанному для оси X, получаем $mg\ \sin\alpha - F_{тр} = 0$ $F_{тр} = mg\sin\alpha$. При увеличении угла тело начинает скользить вниз по наклонной плоскости с ускорением $\vec{a}$, причем на него действует сила трения скольжения $F_{тр} = \mu N$. Силу реакции N легко найти, записав второй закон Ньютона для оси Y:

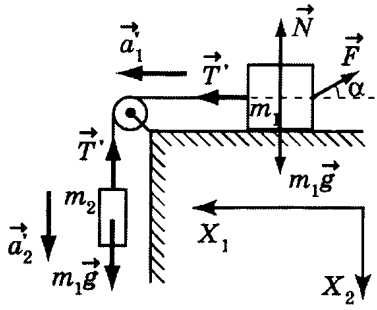
$N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = mg\cos\alpha \Rightarrow F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$. Для оси X в этом случае получим $mg\sin\alpha - F_{тр} = ma \Rightarrow mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma \Rightarrow a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$.

Тело будет покоиться на наклонной плоскости, если сила трения покоя не достигла своего максимального значения μN, т.е. $mg\sin\alpha < \mu mg\cos\alpha \Rightarrow \mathrm{tg}\alpha < \mu$. Если $\mathrm{tg}\alpha > \mu$, тело скользит ускоренно вниз по наклонной плоскости. При $\mathrm{tg}\alpha = \mu$ тело будет покоиться на наклонной плоскости, если ему не сообщена начальная скорость. Если тело обладает начальной скоростью, направленной вниз параллельно наклонной плоскости, то оно будет скользить равномерно.

4. Определите ускорение тел в системе, показанной на рисунке. Коэффициент трения между телом m_1 и плоскостью $\mu = 0{,}1$. Массой блока и нити можно пренебречь. Нить нерастяжима. Масса грузов $m_1 = 1{,}5$ кг, $m_2 = 0{,}5$ кг. Сила $\vec{F}$ образует угол $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, а ее модуль равен 10 Н. Начальная скорость грузов равна нулю.

Решение

При решении задач подобного типа мы не можем сразу определить, как направлена сила трения. Для решения этого вопроса поступают следующим образом. Предпола-



гают, что трения вообще нет, и решают более простую задачу. Тогда силы, приложенные к грузам, будут соответствовать (T' — модуль силы натяжения нити). Так как трения нет, то можно сделать произвольное предположение о направлении ускорений a_1' и a_2', например, как показано на рисунке. Учитывая, что $a_1' = a_2' = a'$, по второму закону Ньютона для осей X_1 и X_2 получаем систему

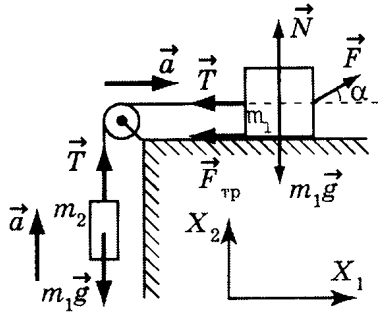
$$\begin{cases} T' - F\cos\alpha = m_1 a', \\ m_2 g - T' = m_2 a' \end{cases} \Rightarrow m_2 g - F\cos\alpha = a'(m_1 + m_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a' = \frac{m_2 g - F\cos\alpha}{m_1 + m_2}.$$

Подставив числовые значения, найдем $a' = -1{,}75$ м/с^2. Таким образом, если трения нет, то ускорения на самом деле направлены противоположно осям X_1 и X_2. Появление трения может уменьшить модуль ускорения или обратить ускорение в нуль, но не может изменить его на противоположное. Значит, грузы имеют одинаковые по модулю ускорения a, направленные, как показано на рисунке. Теперь можно указать направление силы трения. По второму закону Ньютона получаем систему:

$$\begin{cases} F\cos\alpha - T - F_{\text{тр}} = m_1 a, \\ T - m_2 g = m_2 a, \end{cases} \Rightarrow a = \frac{F\cos\alpha - m_2 g - F_{\text{тр}}}{m_1 + m_2},$$

где $F_{\text{тр}} = \mu N$.



По оси X_2 для груза m_1 получаем $N + F\sin - m_1g = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N = m_1g - F\sin$. Подставляя последнее выражение в уравнения для $F_{тр}$ и a, находим

$$a = \frac{F\cos\alpha - m_2g - \mu(m_1g - F\sin\alpha)}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - g(m_2 + \mu m_1)}{m_1 + m_2} = 1{,}4 \text{ м/с}^2.$$

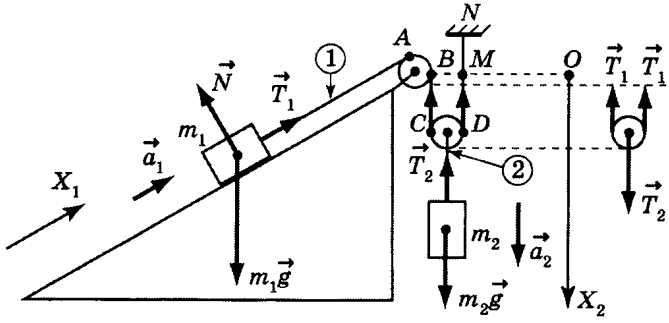
5. Определить ускорение каждого из тел в системе, изображенной на рисунке. Нити нерастяжимы. Массой блоков и нитей можно пренебречь. Трения нет. Масса грузов $m_1 = 0{,}1$ кг, $m_2 = 0{,}6$ кг. Угол $\alpha = 30°$.

Решение

Силы, приложенные к телам m_1 и m_2, изображены на рисунке. Модуль силы натяжения нити 1 равен T_1, а нити 2 — T_2. Предполагая, что ускорения тел $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ направлены, как показано на рисунке, введем оси координат X_1 и X_2 и запишем второй закон Ньютона.

$$\begin{cases} T_1 - m_1g\sin\alpha = m_1a, & (1) \\ m_2g - T_2 = m_2g. & (2) \end{cases}$$

В этой системе содержится 4 неизвестных: T_1, T_2, a_1, a_2. Запишем второй закон Ньютона для подвижного блока:



$T_2 - 2T_1 = 0$ (массой блока можно пренебречь), следовательно:

$$T_2 = 2T_1. \qquad (3)$$

Пусть $x_1(t)$ — координата первого тела; $x_A = \text{const}$ — координата точки A, в которой нить l начинает касаться блока; Δl — длина нити между точками касания A *и* B; $x_2(t)$ — координата центра подвижного блока; Δl_2 — длина нити между точками касания C и D, Δl_3 — длина нити между точками M и N; L — длина нити l. Тогда

$$L = (x_A - x_1(t)) + \Delta l_1 + 2x_2(t) + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \text{const}.$$

Производная

$$L'(t) = 0 \Rightarrow -x_1'(t) + 2x_2'(t) = 0.$$

Еще раз дифференцируя это равенство, получим

$$-x_1''(t) + 2x_2''(t) = 0.$$

Так как $x_1''(t) = a_1$, а $x_2''(t) = a_2$ то

$$a_1 = 2a_2. \qquad (4)$$

Это уравнение называют **уравнением кинематической связи.** В разобранных ранее задачах уравнение кинематической связи представляло собой простейшее равенство $a_1 = a_2$.

Подставляя (4) в (1) и (3) в (2), получим систему с двумя неизвестными:

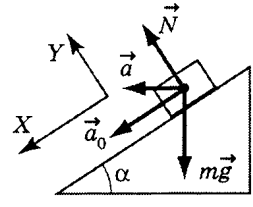
$$\begin{cases} T_1 - m_1 g \sin\alpha = 2m_1 a_2, \\ m_2 g - 2T_1 = m_2 a_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2T_1 - 2m_1 g \sin\alpha = 4m_1 a_2, \\ m_2 g - 2T_1 = m_2 a_2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(m_2 - 2m_1 \sin\alpha) = a_2(4m_1 + m_2) \Rightarrow a_2 = \frac{m_2 - 2m_1 \sin\alpha}{4m_1 + m_2} g.$$

$$a_2 = 4{,}9 \text{ м/с}^2, \ a_1 = 9{,}8 \text{ м/с}^2.$$

6. Клин с углом наклона α при основании движется в горизонтальном направлении с ускорением a. С каким ускорением a_0 относительно наклонной плоскости будет двигаться груз массой m, помещенный на нее? Трения нет. Найти силу давления груза на наклонную плоскость.

Решение



Ускорение груза $\vec{a}_1$ относительно системы отсчета, связанной с Землей, ускорение клина $\vec{a}$ и ускорение груза относительно клина $\vec{a}_0$ связаны соотношением $\vec{a}_\Gamma = \vec{a} + \vec{a}_0$, причем $\vec{a}_0$ все время направлено параллельно поверхности клина.

Приложенные к грузу силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$ — сообщают грузу ускорение $\vec{a}_\Gamma$ относительно Земли. Вводим координатные оси X и Y и записываем второй закон Ньютона для проекций сил и ускорений на эти оси:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha = ma_{\Gamma X}, \\ N - mg\cos\alpha = ma_{\Gamma Y}, \end{cases}$$

где $a_{\Gamma Y} = a_x + a_{0x}$, причем $a_x = a\cos\alpha$, $a_{0x} = a_0$; $a_{\Gamma Y} = a_y + a_{0y}$, где $a_y = a\sin\alpha$, $a_{0y} = 0$.

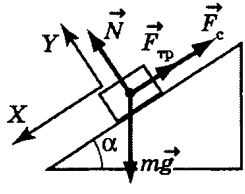
Тогда система приводится к виду

$$\begin{cases} mg\sin\alpha = m(a\cos\alpha + a_0), \\ N - mg\cos\alpha = ma\sin\alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = g\sin\alpha - a\cos\alpha, \\ N = m(g\cos\alpha + a\sin\alpha). \end{cases}$$

Сила давления груза на плоскость $P = N$. При достаточно больших ускорениях клина $a_0 = g\sin\alpha - a\cos\alpha < 0$, т.е. груз относительно клина будет подниматься вверх.

7. При скоростном спуске лыжник скользил вниз по склону с углом наклона $\alpha = 45^\circ$, не отталкиваясь палками. Коэффициент трения лыж о снег $\mu = 0{,}1$. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости: $F = kv^2$, где $k = 0{,}7$ кг/м. Какова максимальная скорость лыжника, если его масса $m = 100$ кг?

Решение



На лыжника действуют силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$, сила трения скольжения $\vec{F}_{тр} < \mu N$ и сила сопротивления $Fc = kv^2$, направленная в сторону, противоположную скорости.

Для проекций на оси X и Y получаем систему:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - F_{тр} - F_c = mg, \\ N - mg\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Так как $F_c = kv^2$, то ускорение лыжника при его разгоне не будет постоянным, т.е. $a = a(t)$. Так как ускорение есть производная от скорости, то максимальное значение скорости соответствует тому, что ускорение $a = v'(t) = 0$. Тогда система приводится к виду:

$$\begin{cases} N = mg\cos\alpha, \\ mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - kv_{max}^2 = 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения

$$v_{max} = \sqrt{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)/k} = 29{,}8 \text{ м/с}.$$

8. Поезд, подъезжая к станции со скоростью v_0 = 72 км/ч, начинает равномерно тормозить. Каково наименьшее время торможения поезда до полной остановки, при котором предметы не падают с полок (μ = 0,1)?

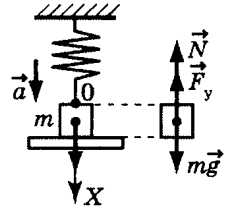
Решение

На тело массой m действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$. Тело, не падающее с полки, имеет ускорение относительно поезда, равное нулю. Ускорение предмета относительно системы отсчета, связанной с Землей, равно ускорению поезда $\vec{a}$. Так как оно направлено горизонтально, то его появление вызвано действием силы трения покоя между полкой и телом. По второму закону Ньютона — $F_{тр} = -ma \Rightarrow \Rightarrow a = F_{тр}/m$. Скорость поезда изменяется по закону $v(t) = v_0 - at$. В момент остановки $0 = v_0 - at_т$, где $t_т$ — время торможения поезда. Выражаем $t_Т = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{F_{тр}/m} = \frac{mv_0}{F_{тр}}$. Время торможения минимально, если сила трения покоя максимальна и равна $F_{тр} = \mu N = \mu mg$;

$$(t_т)_{min} = \frac{v_0}{\mu g} = 20{,}4 \text{ с}.$$

9. На подставке лежит тело, подвешенное к потолку с помощью пружины. В начальный момент времени пружина не деформирована. Подставку начинают опускать вниз с ускорением $\vec{a}$. Через какое время тело оторвется от подставки? Коэффициент жесткости пружины равен k, масса тела m.

Решение

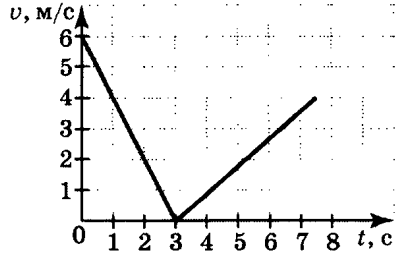


В начальный момент времени пружина не деформирована, поэтому сила упругости равна нулю. На тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$. Введем координатную ось X, начало которой совместим с положением тела в начальный момент времени. Когда подставка начнет двигаться вниз, пружина удлинится и возникнет сила упругости, модуль которой $F_{упр} = kx$, где x — деформация пружины, равная координате тела. По второму закону Ньютона $mg - N - F_{упр} = ma$. В момент отрыва тела от подставки $N = 0 = mg - kx_1 = ma_1$, где x_1 — координата тела в момент отрыва. Значит, $x_1 = (mg - ma)/k$. С другой стороны, координату подставки $x(t)$ можно выразить из законов равнопеременного движения $x(t) = x_0 + v_0t + at^2/2 \Rightarrow x(t) = at^2/2$. Получаем уравнение

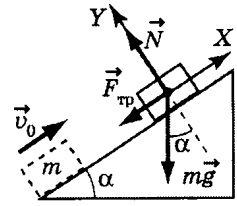
$$\frac{mg-ma}{k}=\frac{at^2}{2}\Rightarrow t=\sqrt{\frac{2m}{k}\left(\frac{g}{a}-1\right)}.$$

10. Шайба, брошенная вдоль наклонной плоскости, скользит по ней, двигаясь вверх, а затем возвращается к месту броска. График зависимости модуля скорости шайбы от времени приведен на рисунке. Найти угол наклона плоскости к горизонту и максимальную высоту подъема шайбы.

Решение



Из графика на рисунке следует, что начальная скорость шайбы $v_0 = 6$ м/с, время подъема шайбы $t_1 = 3$ с, время спуска $t_2 = 7{,}5 - 3 = 4{,}5$ с, конечная скорость шайбы $v_K = 4$ м/с. Рассмо-



трим движение шайбы вверх. Действующие на шайбу силы изображены на рисунке. Здесь $m\vec{g}$ — сила тяжести; $\vec{N}$ — сила реакции опоры; $\vec{F}_{тр}$ — сила трения скольжения. Эти силы определяют ускорение шайбы $\vec{a}_1$. Найдем его, используя второй закон Ньютона. Для этого введем стандартную в таких задачах координатную систему, направив ось X вверх вдоль наклонной плоскости, и спроецируем силы.

Получим систему уравнений:

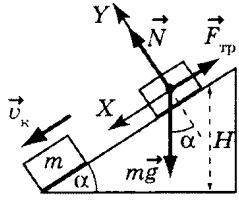
$$\begin{cases} -mg\sin\alpha - F_{тр} = ma_1, \\ N - mg\cos\alpha = 0, \\ F_{тр} = \mu N. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N = mg\cos\alpha, \\ F_{тр} = \mu mg\cos\alpha, \\ -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma_1, \end{cases}$$

где μ — коэффициент трения скольжения; a_1 — проекция ускорения.

Из этой системы находим $a_1 = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$. Знак минус указывает на то, что ускорение $\vec{a}_1$ направлено противоположно выбранной оси. Так как ускорение шайбы постоянно, то проекция скорости выражается формулой $v_x(t) = v_0 + a_1 t = v_Q - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)t$. В момент времени $t = t_1 = 3$ с $v_x = 0$ и получаем уравнение

$$v_0 - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)t_1 = 0. \qquad (1)$$

Рассмотрим движение шайбы вниз. На этом участке начало отсчета времени соответствует моменту, когда шайба начинает движение вниз. Силы, приложенные к шайбе, не изменились, лишь сила трения скольжения изменила направление. Координатные оси удобно направить, как показано на рисунке.



Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - F_{тр} = ma_2, \\ N - mg\cos\alpha = 0, \\ F_{тр} = \mu N, \end{cases} \Rightarrow a_2 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),$$

где a_2 — проекция ускорения при движении вниз.

Проекция скорости выражается формулой $v_x = v_{Ox} + a_2 t = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t$. В момент времени $t = t_2 = 4{,}5$ с $v_x = vk$. Получаем уравнение $g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t^2 = v_к$. Уравнения (1) и (2) образуют систему с двумя неизвестными α и μ:

$$\begin{cases} v_0 - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)t_1 = 0, \\ g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t_2 = v_к, \end{cases} \Rightarrow \pm\begin{cases} \sin\alpha + \mu\cos\alpha = v_0/(gt_1), \\ \sin\alpha - \mu\cos\alpha = v_к/(gt_2), \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\sin\alpha = \left(\dfrac{v_0}{t_1} + \dfrac{v_к}{t_2}\right)\dfrac{1}{g}, \\ 2\cos\alpha = \left(\dfrac{v_0}{t_1} + \dfrac{v_к}{t_2}\right)\dfrac{1}{g}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \arcsin\left(\left(\dfrac{v_0}{t_1} + \dfrac{v_к}{t_2}\right)\dfrac{1}{2g}\right), \\ \mu = \left(\dfrac{v_0}{t_1} + \dfrac{v_к}{t_2}\right)\dfrac{1}{2g\cos\alpha}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 8{,}5°;\ \mu = 0{,}06.$$

Рассмотрим движение шайбы вниз. Получаем $v^2_к = 2a_2(x_к - x_0)$, где $x_к - x_о = l$ — расстояние, пройденное шайбой вдоль наклонной плоскости, $l = v^2_K/2a_2$, а максимальная высота подъема

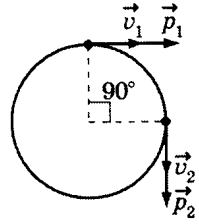
$$H = l\sin\alpha = \frac{v_к^2\sin\alpha}{2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} = \frac{v_к^2}{2g(1 - \mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha)} = 1{,}7\ \text{м}.$$

11. Материальная точка массой m движется с постоянной скоростью v по окружности. Определите изменение импульса точки за $^1/_4$ периода обращения.

Решение

Начальный импульс точки $\vec{p}_1$, его модуль $p_1 = mv_1 = mv$. За четверть периода радиус, соединяющий матери-

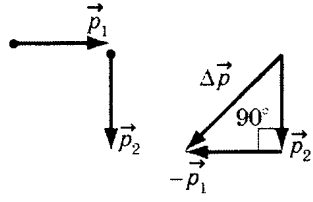
альную точку с центром окружности, поворачивается на 90°. Конечный импульс $\vec{p}_2$, его модуль $p_2 = mv_2 = mv$ ($v_1 = v_2 = v$). Изменение импульса точки



$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \neq 0.$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 - (-\vec{p}_1).$$

На рисунке показано построение вектора $\Delta\vec{p}$ по правилу треугольника. В образовавшемся прямоугольном треугольнике катеты равны mv, а гипотенуза



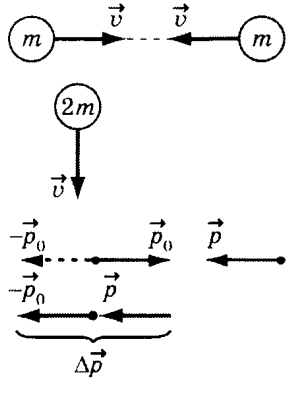
$$\Delta p = \sqrt{(mv)^2 + (mv)^2} = \sqrt{2}mv.$$

Вектор $\Delta\vec{p}$ направлен под углом 45° к вектору $\vec{p}_2$.

12. Две частицы, масса которых m и $2m$, движутся во взаимно перпендикулярных направлениях с одинаковыми скоростями, модуль которых равен v. На частицы в течение некоторого времени действуют одинаковые силы. При этом частица m начинает двигаться в обратном направлении со скоростью, модуль которой v. Как будет двигать частица массой $2m$?

Решение

Начальный импульс частицы m равен $\vec{p}_0$, причем $p_0 = mv$. Конечный ее импульс $\vec{p}$, причем $p = mv$. Изменение импульса частицы массой m:



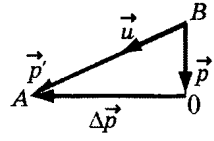
$$\Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = \vec{p} + (-\vec{p}_0).$$

Вектор $\Delta\vec{p}$ построен на рисунке.

Его модуль $\Delta p = 2mv$. По условию задачи импульсы сил, действовавших на частицы, равны, поэтому импульс частицы $2m$ изменится также на $\Delta\vec{p}$.

Начальный импульс ее $\vec{p}_0'(p_0' = 2mv)$. Конечный импульс $p' = 2mu$, где u — конечная скорость. Так как $\vec{p}' - \vec{p}_0' = \Delta\vec{p}$, то $\vec{p}' = \vec{p}_0' + \Delta\vec{p}$.

Вектор $\vec{p}'$ построен на рисунке.



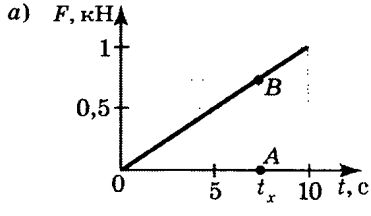
В $\Delta AOB(\angle AOB = 90^\circ)AO = BO = 2mv$, поэтому: $\angle OAB = \angle OBA = 45^\circ$ и $AB = p = AO\sqrt{2} = 2mv\sqrt{2}$. Скорость частицы $2m$ направлена под углом 45° к направлению первоначального движения. Модуль скорости находим из условия

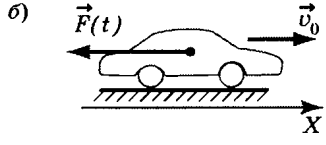
$$2mv\sqrt{2} = 2mu \Rightarrow u = v\sqrt{2}.$$

13. Автомобиль массой $m = 2\cdot10^3$ кг, который двигался со скоростью $v_0 = 72$ км/ч, в момент времени $t = 0$ начинает тормозиться силой F, модуль которой изменяется по линейному закону, как показано на рисунке (*а*). Через сколько времени автомобиль остановится?

Решение

Из рисунка (*а*) следует, что $F(t) = kt$, где $k = \dfrac{10^4\,H}{10\text{ с}} = 10^3$ Н/с. Проекция на горизонтальную ось X рисунок (*б*) начального импульса $p_0 = mv_0$, конечный импульс $p_к = 0$. Изменение импульса $\Delta p = p_к - p_0 = -mv$ вызвано





импульсом действовавшей на автомобиль силы $F(t)$. При этом модуль импульса переменной силы численно равен площади

$$\Delta AOB:\ S=\frac{1}{2}\cdot AO\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot t_x\cdot(kt_x)=\frac{1}{2}\cdot kt_x^2,$$

где t_x — время торможения. Проекция импульса силы на ось X равна $-\frac{1}{2}kt_x^2$; из основного уравнения динамики

$$-mv_0=-\frac{1}{2}kt_x^2\Rightarrow t_x=\sqrt{\frac{2mv_0}{k}}=8{,}9\text{ с}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. От поезда, идущего по горизонтальному участку пути с постоянной скоростью U_0, отцепляется $^1/_3$ состава. Считая, что сила тяги при разрыве состава не изменилась, определите скорость головной части поезда в момент, когда скорость отцепившихся вагонов уменьшилась в два раза. Сила сопротивления пропорциональна силе тяжести и не зависит от скорости движения.

   Ответ: $(5/4)U_0$.

2. Парашютист массой m = 80 кг падает при открытом парашюте с установившейся скоростью V = 5 м/с. Какой будет установившаяся скорость, если на том же парашюте спускается мальчик массой m_1 = 40 кг? Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости.

   Ответ: 3,5 м/с.

3. Шар массой m объемом V падает в жидкость с плотностью ρ с постоянной скоростью U. С какой силой нужно тянуть вверх этот шар, чтобы он поднимался в той же жидкости со скоростью U_1 = $4U$? Сопротивле-

ние вязкой жидкости движению шара пропорционально его скорости.

Ответ: $5g(m - \rho V)$.

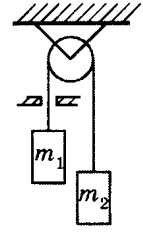
4. Шайба, пущенная вверх по наклонной плоскости с углом наклона α, со временем останавливается и соскальзывает вниз. Время спуска в 2 раза больше времени подъема. Определите коэффициент трения.

Ответ: $\dfrac{3\operatorname{tg}\alpha}{5}$.

5. Чтобы сдвинуть с места ящик массой M, человек тянет его к себе с силой F, направленной под углом α к горизонту. Определите величину силы, если масса человека m, коэффициент трения о пол человека и ящика одинаковы и равны μ. Считать $M > m$.

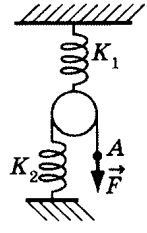
Ответ: $\dfrac{1}{2}g\sqrt{(M-m)^2+\mu^2(M+m)^2}$.

6. Нерастяжимая невесомая нить, перекинутая через блок с неподвижной осью, пропущена через щель. При движении нити на нее со стороны щели действует постоянная сила трения F. На концах нити подвешены грузы массой m_1 и m_2. Определите ускорение грузов.



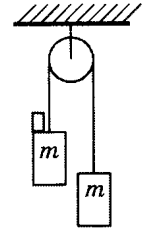
Ответ: $\dfrac{(m_1-m_2)g-F}{m_1+m_2}$.

7. На сколько переместится конец нити (точка A), перекинутой через неподвижный невесомый блок, если к концу нити приложить силу F? Жесткости пружин равны K_1 и K_2. Нить нерастяжима.



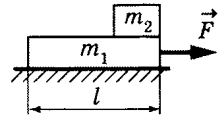
Ответ: $F(4K_2 + K_1)/K_1K_2$.

8. К концам невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый блок, подвешены два груза массой 100 г каждый. На один из грузов положен перегрузок массой 10 г. Найдите силу, с которой перегрузок давит на груз, а также силу давления на ось блока.



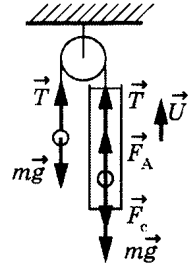
Ответ: 0,1 Н; 2,1 Н.

9. Брусок массой m_1 лежит на гладкой горизонтальной плоскости. На бруске лежит тело массой m_2. Коэффициент трения между телом и бруском равен k. При каком значении силы F, приложенной к бруску в горизонтальном направлении, тело начнет скользить по бруску? Через сколько времени тело упадет с бруска? Длина бруска l.



Ответ: $t = \sqrt{\dfrac{2lm_1}{F - kg(m_1 - m_2)}}$; $F > kg(m_1 + m_2)$.

10. Два одинаковых шарика связаны невесомой нитью, перекинутой через невесомый блок, причем один из шариков погружен в сосуд с жидкостью. С какой установившейся скоростью U будут двигаться шарики, если известно, что установившаяся скорость падения одиночного шарика в той же жидкости равна U_0? Сила сопротивления пропорциональна скорости. Плотность жидкости равна ρ_0, плотность материала шарика равна ρ.



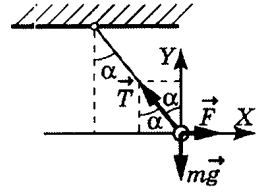
Ответ: $U = \dfrac{U_0\rho}{\rho - \rho_0}$.

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИКИ

Примеры решения задач с кратким или развернутым ответом

1. Груз массой m, подвешенный на проволоке, отклоняется на угол α от вертикального положения силой, действующей в горизонтальном направлении. Определить эту силу и силу натяжения проволоки.

Решение

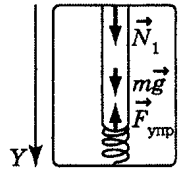


К грузу приложены: сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения проволоки $\vec{T}$ и сила $\vec{F}$. По условию задачи под действием этих сил груз находится в равновесии, поэтому сумма проекций этих сил на любые направления равна нулю. Удобно выбрать вертикальную и горизонтальную оси Y и X. Спроецировав силы на выбранные оси, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} F - T\sin\alpha = 0, \\ T\cos\alpha - mg = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T\sin\alpha = F, \\ T\cos\alpha = mg \end{cases} \Rightarrow \frac{T\sin\alpha}{T\cos\alpha} = \frac{F}{mg} \Rightarrow$$

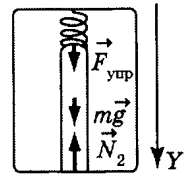
$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{mg} \Rightarrow F = mg\operatorname{tg}\alpha;\ T = \frac{mg}{\cos\alpha}.$$

2. Ручка стоит вертикально на пружине в закрытом пенале. При этом ручка давит на крышку пенала с силой N_1 = 1,96 Н. Когда пенал перевернули, сила давления ручки на крышку пенала возросла до N_2 = 2,36 Н. Какова масса ручки?



Решение

Прежде всего отметим, что по третьему закону Ньютона сила давления ручки на крышку пенала равна по модулю силе давления крышки на ручку.



На рисунках указаны силы, действующие на ручку в первом случае и втором случае.

Здесь $m\vec{g}$ — сила тяжести, $\vec{N}$ — сила давления крышки на ручку, $\vec{F}_{упр}$ — сила упругости пружины. Проецируя силы на вертикальное направление Y, получаем условие равновесия ручки:

$$N_1 + mg - F_{упр} = 0. \qquad (1)$$

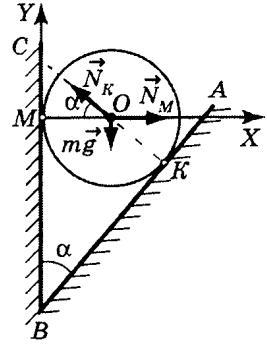
Отметим, что длина пенала и ручки неизменна, а потому неизменна и деформация пружины. Следовательно, модуль силы упругости во втором случае такой же, как и в первом. Условия равновесия запишутся в виде

$$mg + F_{упр} - N_2 = 0. \qquad (2)$$

Складывая уравнения (1) и (2), получаем

$$2mg + N_1 - N_2 = 0 \Rightarrow m = (N_2 - N_1)/2g = 0{,}02 \text{ кг}.$$

3. Шар лежит в щели ABC, образованной двумя плоскими стенками, причем ребро щели горизонтально. Найти угол между плоскостями, если сила давления шара на вертикальную стенку BC вдвое превышает силу тяжести, действующую на шар. Трением пренебречь.



Решение

В точке O (центр шара) на шар действует сила тяжести $m\vec{g}$, в точках M и K — силы реакции $\vec{N}_M$ и $\vec{N}_K$, направленные по радиусам шара. Запишем первое условие равновесия на горизонтальную и вертикальную оси X и Y:

$$\begin{cases} N_M - N_K \cos\alpha = 0, \\ N_K \sin\alpha - mg = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_M = N_K \cos\alpha, \\ mg = N_K \sin\alpha. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое, найдем, что $mg/N_M = \mathrm{tg}\alpha$. По условию задачи $mg/N_M = {}^1/_2$, поэтому $\mathrm{tg}\alpha = {}^1/_2 \Rightarrow \alpha = \mathrm{arctg}\,0{,}5 = 26{,}6°$.

4. Лестница длиной l = 3 м стоит, упираясь верхним концом в гладкую стену, а нижним — в пол. Лестница наклонена к полу под углом α = 60°; ее масса m = 15 кг. На лестнице на расстоянии a = 1 м от ее верхнего конца стоит человек массой M = 60 кг. Определить силы реакции стен и пола, действующие на лестницу. При каких значениях коэффициента трения лестницы о пол лестница не падает?

Решение

К лестнице приложены силы: в середине (точка C) — сила тяжести лестницы $m\vec{g}$; в точке D приложен вес человека, равный его силе тяжести $M\vec{g}$; в точке B — сила реакции стенки $\vec{N}_B$; точке A — сила реакции пола $\vec{N}_A$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Пока лестница не падает, $\vec{F}_{\text{тр}}$ — сила трения покоя. Запишем первое условие равновесия на осям:

$$\text{по оси } X \quad NB - F_{Tp} = 0,$$

$$\text{по оси } Y \quad NA - mg - Mg = 0.$$

Второе условие равновесия, записанное относительно точки A:

$$N_B l \sin\alpha - Mg(l-a)\cos\alpha - mg(l/2)\cos\alpha = 0.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} N_B = F_{\text{тр}}, \\ N_A = (M+m)g, \\ N_B \sin\alpha = gl\cos\alpha(M(1-a/l)+m/2). \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим

$$N_B = \frac{(M(1-a/l)+m/2)g\cos\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= \left(M\left(1-\frac{a}{l}\right)+\frac{m}{2}\right)g\,\mathrm{ctg}\,\alpha = F_{\text{тр}} = 275\ \text{Н}.$$

$$N_A = (m+M)g = 750\ \text{Н}.$$

Пол действует на лестницу с силой $\vec{Q} = \vec{N}_A + \vec{F}_{\text{тр}}$. По теореме Пифагора

$$Q = \sqrt{N_A^2 + F_{\text{тр}}^2} = \sqrt{(275)^2 + (750)^2} \approx 800\ \text{Н}.$$

Сила $\vec{Q}$ образует с вертикалью угол β, причем tg β = $= F_{\text{тр}}/N_A \approx 0{,}37 \Rightarrow \beta \approx 20^\circ$. Лестница не падает, если сила трения покоя не достигла своего максимального значения $F_{\text{тр.ск}} = \mu NA = \mu(m+M)g$, где μ — коэффициент трения, т.е. $F_{\text{тр}} < \mu(m + M)g$. Подставив $F_{\text{тр}}$, получим

$$\left(M\left(1-\frac{a}{l}\right)+\frac{m}{2}\right)g\,\mathrm{ctg}\,\alpha < \mu(m+M)g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu > \frac{(M(1-a/l)+m/2)\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{m+M}.$$

В данном случае $\frac{a}{l} = \frac{1}{3}$, поэтому

$$\mu > \frac{(2M/3+m/2)\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{m+M} = 0{,}22.$$

Лестница не будет падать при любом положении человека на ней (предельный случай $a = 0$),

$$\mu > \frac{(M+m/2)\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{m+M} = 0{,}54.$$

5. Контейнер в виде прямоугольного параллелепипеда высотой h и длиной l стоит на опорах малых размеров. Левая опора, в отличие от правой, сделана на роликах, которые обеспечивают пренебрежимо малое трение. Чтобы сдвинуть контейнер вправо, нужно толкать его с силой $\vec{F}_1$, приложенной к середине левой стороны, а чтобы сдвинуть влево, нужно толкать с силой $\vec{F}_2$, приложенной к центру правой стороны. Найти массу контейнера.

Решение

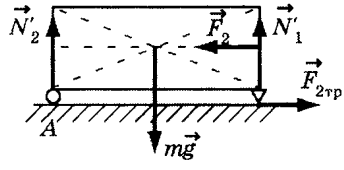
Рассмотрим первый случай. Силы, действующие на контейнер, представлены на рисунке. Здесь $\vec{N}_2$ и $\vec{N}_1$ — силы реакции опоры, $\vec{F}_{тр}$ — сила трения. Запишем условия равенства нулю суммы моментов сил относительно точки A:

$$F_1h/2 + mgl/2 - N_1l = 0. \qquad (1)$$

Спроецировав силы на горизонтальное направление, получаем $F_1 - F_{1тр} = 0 \Rightarrow F_1 = F_{1тр}$. Учитывая, что скольжение началось, $F_{1тр} = \mu N_1 \Rightarrow N_1 = F_{1тр}/\mu$.

Подставляя это выражение в уравнение (1), получим

$$F_1h/2 + mg_1/2 - F_1l/\mu = 0. \qquad (2)$$



Рассмотрим второй случай. Здесь $\vec{N}'_1$ и $\vec{N}'_2$ — силы реакции опоры, $\vec{F}_{2тр}$ — сила трения. Условие моментов относительно точки A запишется в виде:

$$mgl/2 - F_2h/2 - N'_1l = 0.$$

Так как $F_2 = F_{2тр} = \mu N'_1$, после подстановки получим уравнение

$$mgl/2 - F_2h/2 - F_2l/\mu = 0. \qquad (3)$$

Уравнения (2) и (3) образуют систему:

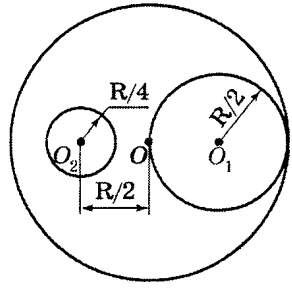
$$\begin{cases} F_1h/2+mgl/2-F_1l/\mu=0, \\ mg/2-F_2h/2-F_2l/\mu=0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_1F_2h/2+F_2mgl/2-F_1F_2l/\mu=0, \\ F_1mgl/2-F_1F_2h/2-F_1F_2l/\mu=0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2F_1F_2\frac{h}{2}=F_1mg\frac{l}{2}-F_2mg\frac{l}{2} \Rightarrow m=\frac{2F_1F_2h}{gl(F_1-F_2)}.$$

6. В однородном диске радиусом R проделаны два отверстия радиусами $R/2$ и $R/4$, как показано на рисунке. Определите положение центра тяжести диска.

Решение



Из соображений симметрии ясно, что центр тяжести расположен на оси симметрии диска левее точки O. Если бы отверстий не было, то центр тяжести диска располагался бы в точке O. Диск можно представить состоящим из трех частей: из диска с центром в точке O_1 радиусом $R/2$, диска радиусом $R/4$ с центром в точке O_2 и оставшейся части, центр тяжести которой отстоит от точки O на расстоянии x.

Масса первого диска

$$m_1=\rho V_1=\rho S_1h=\rho\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2h=\rho\pi\frac{R^2}{4}h,$$

где ρ — плотность диска, h — его толщина. Момент, создаваемый первым диском относительно точки O:

$$M_1=m_1g\frac{R}{2}=\rho\frac{\pi R^2}{4}hg\frac{R}{2}=\rho\pi hg\frac{R^3}{8}.$$

Масса второго диска

$$m_1 = \rho V_2 = \rho S_2 h = \rho\pi\left(\frac{R}{4}\right)^2 h = \rho\pi\frac{R^2}{16}h.$$

Его момент относительно точки O

$$M_2 = -m_2 g\frac{R}{2} = -\rho\frac{\pi R^2}{16}hg\frac{R}{2} = \rho\pi hg\frac{R^3}{32}.$$

Масса оставшейся части

$$m_3 = \rho V_3 = \rho\left(\pi R^2 - \pi\frac{R^2}{4} - \pi\frac{R^2}{16}\right)gh = \rho\pi\frac{11R^2}{16}gh,$$

а момент этой части $M_3 = -m_3 gx = -\rho\pi\dfrac{11R^2}{16}ghx.$

При равновесии $M_1 + M_2 + M_3 = 0$,

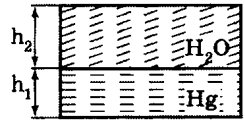
$$\rho\pi\frac{R^3}{8}gh - \rho\pi\frac{R^3}{32}gh - \rho\pi\frac{11R^2}{16}ghx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4R - R = 22x \Rightarrow x = \frac{3R}{22}.$$

7. В цилиндрический сосуд налиты равные массы ртути и воды. Общая высота двух слоев жидкости H = 29,2 см. Определить давление жидкостей на дно сосуда. Плотность ртути ρ_1 = 13,6·10^3 кг/м^3, плотность воды ρ_2 = = 10^3 кг/м^3.

Решение

Пусть h_1 — высота столба ртути, а h_2 — высота столба воды. По условию задачи $h_1 + h_2 = H$. Масса ртути в цилиндре $m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 S h_1$, где S — площадь основания цилиндра. Масса воды $m_2 = \rho_2 S h_2$. По условию задачи $m_1 = m_2 \Rightarrow \rho_1 S h_1 = \rho_2 S h_2$.



Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} h_1 + h_2 = H, \\ \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_2 = (\rho_1 / \rho_2) h_1, \\ h_1 = (1 + \rho_1 / \rho_2) H, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{H}{1 + \rho_1 / \rho_2}; \; h_2 = \frac{H\rho}{\rho_1 + \rho_2}.$$

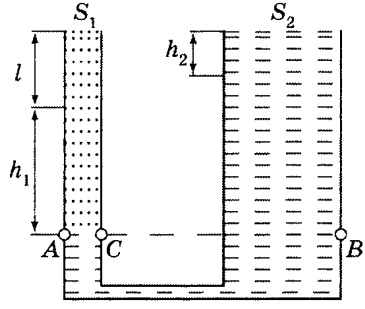
Давление ртути $p_1 = \rho_1 g h_1 = \dfrac{H\rho_2\rho_1 g}{\rho_1 + \rho_2}$; давление воды

$$p_2 = \rho_2 g h_2 = \frac{H\rho_2\rho_1 g}{\rho_1 + \rho_2};$$

давление жидкостей на дно сосуда

$$p_1 = p_1 + p_2 = \frac{2H\rho_2\rho_1 g}{\rho_1 + \rho_2} = 5{,}3 \cdot 10^3 \text{ Па}.$$

8. Ртуть находится в U-образной трубке, площадь сечения левого колена которой в три раза меньше, чем правого. Уровень ртути в узком колене расположен на расстоянии l = 30 см от верхнего конца трубки. На сколько поднимется уровень ртути в правом колене, если левое колено доверху заполнить водой?



Решение

После доливания воды уровень ртути в левом колене опустится на h_1; над границей раздела ртуть—вода (AC) будет находиться столбик воды высотой $l + h_1$. В то же время уровень ртути в правом колене поднимется на h_2. На любом уровне давления должны быть одинаковы, и в частности на уровне ACB.

В левом колене давление на этом уровне $p_1 = \rho bg \times (l + h_1)$, где $\rho b = 10^3$ кг/м^3, а в правом — $p_2 = \rho_p \times (h_2 + h_1)$, где $\rho_p = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3 — плотность ртути. Тогда

$$p_1 = p_2 = \rho_B g(l + h_1) = \rho_p g(h_2 + h_1).$$

Поскольку жидкости несжимаемы, то уменьшение объема ртути в левом колене равно его увеличению в правом, т.е. $S_1 h_1 = S_2 h_2$.

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \rho_B g(l + h_1) = \rho_p g(h_2 + h_1), \\ S_1 h_1 = S_2 h_2. \end{cases} \Rightarrow$$

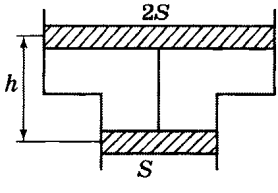
$$\Rightarrow h_2 = \frac{\rho_B l}{\rho_p(1 + (\rho_p / \rho_B - 1) S_2 / S_1)} = 0{,}06 \text{ см}.$$

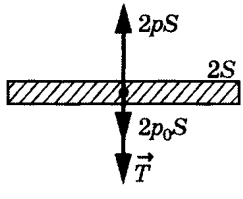
9. В вертикально расположенном сосуде с сечениями $2S$ и S находятся два невесомых поршня. Поршни соединены тонкой проволокой длиной h. Найти силу натяжения проволоки, если пространство между поршнями заполнено водой. Трением пренебречь. Концы сосуда открыты в атмосферу. Плотность воды равна ρ.

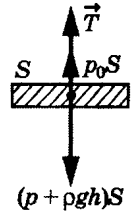
Решение

Силы, действующие на поршни, представлены на рисунках.

На верхний поршень действуют: сила натяжения проволоки T, сила атмосферного давления $p_0 2S = 2p_0 S$ и сила







давления со стороны воды $p2S = 2pS$, где p — давление воды под верхним поршнем. Условия равновесия этого поршня

$$2pS - 2p_0S - T = 0. \quad (1)$$

Давление воды над нижним поршнем отличается от давления воды под верхним поршнем на величину ρgh. Поэтому сила давления воды на нижний поршень равна $(p + \rho gh)S$. Кроме того, на этот поршень действует сила атмосферного давления p_0S и сила натяжения проволоки T. Условия равновесия

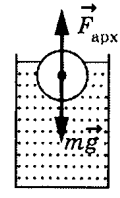
$$T + p_0S - (p + \rho gh)S = 0. \quad (2)$$

Перепишем уравнения (1) и (2) в виде системы

$$\begin{cases} 2pS = 2p_0S + T, \\ pS + \rho ghS = p_0S + T, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2pS = 2p_0S + T, \\ 2pS + 2\rho hgS = 2p_0S + 2T. \end{cases}$$

После вычитания этих уравнений находим $T = 2\rho ghS$.

10. Однородное тело плавает в керосине так, что объем погруженной части составляет 0,92 всего объема тела. Определить объем погруженной части при плавании тела в воде. Плотность керосина $\rho_к = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 10^3$ кг/м^3.



Решение

На тело, плавающее в керосине, действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и выталкивающая сила $\vec{F}_{арх}$. Так как тело плавает, то $mg = F_{арх}$.

Пусть V — объем всего тела. Выразим выталкивающую силу $F_{арх} = m_кg$, где $m_к$ — масса керосина в объеме 0,92 V. Поэтому $F_{арх} = \rho к\ 0{,}92\ Vg$. Обозначим объем погруженной части тела при плавании в воде V_x. В воде на

тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и выталкивающая сила $\vec{F}'_{арх}$. Из условия плавания получаем $mg = F'_{арх}$, где $F_{арх} = m_В g = \rho_B V_x g$.

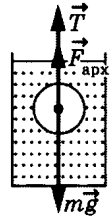
Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} mg = \rho_к \cdot 0{,}92Vg, \\ mg = \rho_В Vg, \end{cases} \Rightarrow \rho_В V_x g = \rho_к g \cdot 0{,}92V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_x = \frac{0{,}92V\rho_к}{\rho_В} = 0{,}92\frac{\rho_к}{\rho_В}V = 0{,}74V.$$

11. Вес тела в воде в три раза меньше, чем в воздухе. Какова плотность тела?

Решение



Вес тела в воздухе численно равен силе тяжести, действующей на тело (выталкивающей силой воздуха мы здесь пренебрегаем). Для определения веса в воде тело, подвешенное, например, на динамометре, погружается в воду. В воде на тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$, выталкивающая сила $\vec{F}_{арх}$ и сила упругости (натяжения) $\vec{T}$.

Из условия равновесия можно записать:

$$T + F_{арх} - mg = 0 \Rightarrow T = mg - F_{арх}.$$

По третьему закону Ньютона с такой же силой тело действует на подвес (динамометр). По определению это и есть вес тела. Значит, вес в жидкости есть разность между силой тяжести и выталкивающей силой.

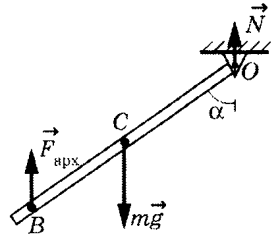
По условию задачи

$$mg = 3(mg - F_{арх}). \qquad (1)$$

Пусть ρ_x — плотность тела, а V — его объем, тогда $m = \rho_x V$. Выталкивающая сила $F_{арх} = m_В g = \rho_В Vg$, где $\rho_В$ — плотность воды. После подстановки значений $F_{арх}$ в (1) получаем $\rho_x Vg = 3(\rho_x Vg - \rho_В Vg) \Rightarrow \rho x = 3(\rho_x - \rho_В) \Rightarrow$ $\Rightarrow 3\rho_В = 2\ \rho_x \Rightarrow \rho_x = 3\rho_В/2 = 1{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3.

12. Тонкая однородная палочка плотностью $\rho = 0{,}64\times$ $\times 10^3$ кг/м^3 закреплена шарнирно одним концом и опущена в воду. Палочка находится в равновесии, отклонившись на некоторый угол от вертикали. Какая часть палочки находится в воде?

Решение



В точке C (середина палочки) приложена сила тяжести $m\vec{g}$. В точке B (середина погруженной части) приложена выталкивающая сила $\vec{F}_{арх}$. В точке O приложена сила $\vec{N}$, действующая на палочку со стороны шарнира. Пусть O — точка вращения, тогда сумма моментов сил относительно этой точки равна нулю. Момент силы N равен нулю. Момент силы тяжести $M_{mg} = -mg\frac{l}{2}\sin\alpha$, где l — длина палочки. Момент выталкивающей силы $M_{арх} = F_{арх}(l - x/2)\sin\alpha$, где x — длина погруженной части. Получаем уравнение

$$F_{арх}\left(l-\frac{x}{2}\right)\sin\alpha - mg\frac{l}{2}\sin\alpha = 0. \qquad (1)$$

Выталкивающая сила $F_{арх} = m_В g = \rho_в V_п g = \rho_в Sxg$, где S — площадь поперечного сечения палочки. Массу палочки представим в виде $m = \rho Sl$. Подставим это в уравнение (1) и получим

$$\rho_В Sxg\left(l-\frac{x}{2}\right)\sin\alpha - \rho gS\frac{l^2}{2}\sin\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_В xl - \rho_В\frac{x^2}{2} - \rho\frac{l^2}{2} = 0 \Rightarrow \rho_В x^2 - 2\rho_В xl + \rho l^2 = 0 \Rightarrow$$

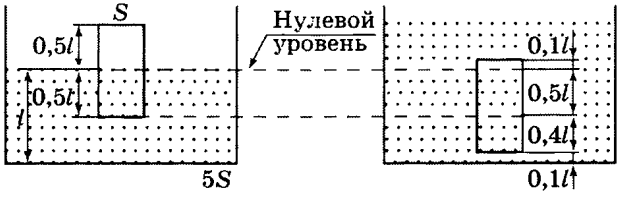
$$\Rightarrow x^2 - 2lx + \frac{\rho l^2}{p_В} = 0.$$

Отсюда

$$x_{1,2} = l \pm l\sqrt{1-\rho/\rho_B} = l\left(1 \pm \sqrt{0,64}\right) = l(1 \pm 0,8);\ x_1 = 1,8l > l,$$

что противоречит условию задачи; $x_2 = 0,2l$, что и является ответом задачи.

13. В цилиндрическом стакане с водой плавает брусок высотой l и сечением S. При помощи тонкой спицы брусок медленно опускают на дно стакана. Какая работа при этом была совершена? Сечение стакана $5S$, начальная высота воды в стакане l, плотность бруска $\rho = 0,5\rho_0$, ρ_0 — плотность воды.



Решение

Пусть брусок плавает в воде (левый рисунок). Вертикально вниз на него действует сила тяжести $mg = \rho Slg$, а вертикально вверх действует выталкивающая сила $F_{арх} = \rho_0 Sl_п g$, где $l_п$ — высота погруженной части бруска. Из условия плавания следует, что $mg = F_{арх} \Rightarrow \rho Slg = \rho_0 Sl_п g \Rightarrow l_п = (\rho/\rho_0)l = 0,5l$, что и отражено на левом рисунке.

Пусть на брусок подействовали силой F, направленной вниз. Под действием этой силы брусок сместится на расстояние x от нулевого уровня (правый рисунок). При этом брусок вытеснил объем воды, равный Sx. В результате уровень воды в стакане повысится на y, причем y находим из уравнения $Sx = (5S - S)y \Rightarrow y = x/4$. Следовательно, смещение бруска на x приведет к тому, что длина погруженной части бруска возрастет на $y + x = 5x/4$. Для того чтобы весь брусок оказался под водой, надо выпол-

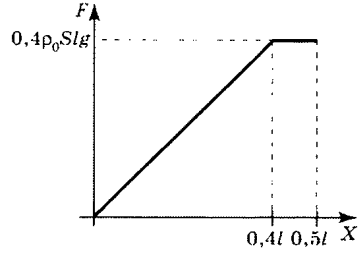
нить условие $5x/4 = l/2 \Rightarrow x = 2l/5 = 0{,}4l$. Уровень воды при этом поднимется на $y = x/4 = 0{,}1l$, что и отображено на правом рисунке.

Как уже отмечалось, для погружения бруска к нему надо приложить силу F, причем при медленном равномерном погружении модуль этой силы равен разности между выталкивающей силой, действующей на брусок, и силой его тяжести:

$$F = F_{\text{арх}} - mg = \rho_0 S(l/2 + x)g - \rho Slg =$$
$$= \rho_0 S(l/2 + x)g - 0{,}5\rho_0 Slg = \rho_0 Sxg.$$

Как видно, эта сила линейно зависит от x — смещения бруска. При полном погружении бруска $F = F(0{,}4l) = 0{,}4\rho_0 Slg$.

После того как брусок погружен, дальнейшее погружение бруска на $0{,}1l$ не приводит к изменению силы F. График зависимости силы F приведен на рисунке.

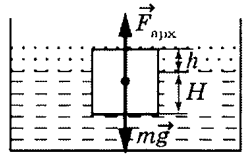


Как известно, работа переменной силы равна площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком $F(x)$.

Окончательно получаем

$$A = \frac{0{,}1l + 0{,}5l}{2} 0{,}4\rho_0 Slg = 0{,}12\rho_0 Sl^2 g.$$

14. Стальной кубик (плотность $\rho_1 = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3) плавает в ртути (плотность $\rho_2 = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3). Поверх ртути наливается вода так, что она покрывает кубик. Какова высота h слоя воды? Длина ребра кубика $a = 10$ см.



Решение

На кубик действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и выталкивающая сила $\vec{F}_{арх}$. Из условия плавания получаем $mg = F_{арх}$, где $m = \rho_1 a^3$, $F_{арх} = (mB + m_p)g$, где mB и $m_р$ — соответственно масса воды и ртути, содержащаяся в объеме, вытесненном кубиком;

$$m_В = \rho_В V_В = \rho_В a^2 h,\ m_p = \rho_2 Sh = \rho_2 a^2 H,\ F_{арх} = a^2 g(\rho_В h + \rho_2 H).$$

Заметим, что $h + H = a$, поэтому получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} h + H = a, \\ (\rho_В h + \rho_2 H)a^2 g = \rho_1 a^3 g, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h + H = a, \\ \rho_В h + \rho_2 H = \rho_1 a, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H = a - h, \\ \rho_В h + \rho_2 (a - h) = \rho_1 a, \end{cases} \Rightarrow h = \frac{a(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2 - \rho_В} \approx 4{,}6 \text{ см}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Определите положение центра тяжести проволочной рамки, имеющей форму равностороннего треугольника, если две его стороны сделаны из алюминиевой проволоки, а третья — из медной. Проволоки имеют одинаковое сечение. Сторона треугольника 1 м. Плотность меди 8,9 г/см^3, алюминия — 2,7 г/см^3.

   Ответ: 16 см от медной стороны.

2. Железный прут массой M изогнут так, что его части образуют прямой угол. Прут подвешен за один край на шарнире. Найдите угол α, который образует с вертикалью верхняя часть прута в положении равновесия.

   Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

3. Пять шаров, масса которых соответственно m, $2m$, $3m$, $4m$, $5m$, укреплены на стержне так, что их центры находятся на расстоянии l друг от друга. Найдите положение центра масс системы, массой стержня пренебречь.

Ответ: $\frac{8}{3}l$ от центра шара массой m.

4. Шар висит на нити, опираясь на стенку. При каком минимальном коэффициенте трения между шаром и стенкой точка подвеса будет находиться на одной вертикали с центром тяжести?

Ответ: $k = 1$.

5. Кубик стоит у стены так, что одна из его граней образует угол α с полом. При каком значении коэффициента трения кубика о пол это возможно, если трение о стенку мало?

Ответ: $k = (\mathrm{ctg}\alpha - 1)/2$.

6. В сосуд с водой опущена трубка сечением 2 см^2. В трубку налито 72 г масла плотностью 0,9 г/см^3. Найдите разность уровней масла и воды.

Ответ: 4 см.

7. В двух сообщающихся трубках разного сечения налита сначала ртуть, а потом в широкую трубку сечением 8 см^2 налито 272 г воды. На сколько выше будет стоять ртуть в узком колене? Плотность ртути 13,6 г/см^3.

Ответ: 2,5 см.

8. Кусок льда массой 1,9 кг плавает в цилиндрической банке, наполненной жидкостью плотностью 950 кг/м^3. Площадь дна банки 40 см^2. На сколько изменится уровень жидкости, когда лед растает?

Ответ: 2,5 см.

9. В цилиндре высотой h_1 = 20 см с площадью основания S_1 = 100 см^2 налита вода, объем которой V_1 = 1 дм^3. В цилиндр опускают стержень сечения S_2 = 40 см^2, высота которого равна высоте цилиндра. Какую минимальную массу должен иметь стержень, чтобы он опустился на дно цилиндра?

Ответ: 667 г.

10. Плотность раствора соли с глубиной h меняется по закону $\rho = \rho_0 - Ah$, где ρ_0 = 1 г/см^3, A = 0,01 г/см^4. В раствор опущены два шарика, связанные нитью такой, что расстояние между центрами шариков не может превышать L = 5 см. Объем каждого шарика V = = 1 см^3, массы m_1 =1,2 г и m_2 = 1,4 г. На какой глубине в равновесии находится каждый шарик?

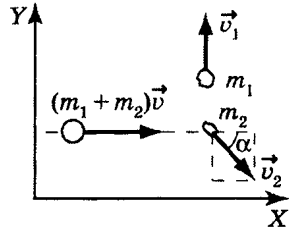
Ответ: 27,5 см; 32,5 см.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Примеры решения задач с кратким или развернутым ответом

1. Снаряд, который летел в горизонтальном направлении со скоростью v, разрывается на два осколка массой m_1 и m_2. Скорость осколка массой m_1 равна v_1 и направлена вертикально вверх. Определите модуль и направление скорости осколка массой m_2 (см. рис.).

Решение



На систему, состоящую из двух осколков массой m_1 и m_2, в горизонтальном направлении X внешние силы не действуют, поэтому импульс системы в горизонтальном направлении сохраняется, т.е. P_{1x} = = P_{2x}. В вертикальном направлении

Y на систему действует внешняя сила — сила тяжести. Но поскольку время разрыва снаряда мало, сохраняется импульс системы и в вертикальном направлении, т.е. $P_{1y} = P_{2y}$. Начальный импульс системы в направлении X: $P_{1x} = (m_1 + m_2)v$, конечный импульс $P_{2x} = m_2v_2\cos\alpha$. Начальный импульс системы в направлении Y: $P_{1y} = 0$, конечный $P_{2y} = m_1v_1 - m_2v_2\sin\alpha$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases}(m_1+m_2)v = m_2v_2\cos\alpha,\\ 0 = m_1v_1 - m_2v_2\sin\alpha,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m_2v_2\cos\alpha = (m_1+m_2)v, & (1)\\ m_2v_2\sin\alpha = m_1v_1. & (2)\end{cases}$$

После деления уравнения (2) системы на (1) найдем, что

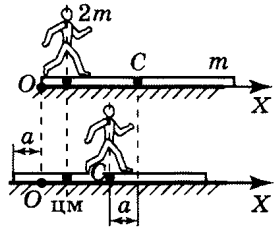
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_1v_1}{(m_1+m_2)v} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\frac{m_1v_1}{(m_1+m_2)v}.$$

Возведя в квадрат уравнения (1) и (2) системы, а затем их складывая, найдем, что

$$(m_2v_2)^2\cos^2\alpha + (m_2v_2)^2\sin^2\alpha = ((m_1+m_2)v)^2 + (m_1v_1)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (m_2v_2)^2 = ((m_1+m_2)v)^2 + (m_1v_1)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{(m_1+m_2)^2v^2 + m_1^2v_1^2}\,/\,m_2.$$

2. На гладкой горизонтальной поверхности лежит однородная доска массой m и длиной L. Человек, масса которого $2m$, переходит с одного конца доски на ее середину. На сколько при этом сместится доска?

Решение



В горизонтальном направлении на систему человек—доска внешние силы не действуют, поэтому центр масс этой системы остается на месте. Введем горизонтальную ось X,

связанную с Землей, ее начало поместим в точку O. Тогда $x_ч = 0$, $x_с = L/2$, где $x_ч$ — координата человека, $x_с$ — координата центра масс (ЦМ) доски. Найдем положение ЦМ системы человек—доска:

$$x_{ЦМ} = \frac{x_ч 2m + x_с m}{3m} = \frac{(L/2)m}{3m} = \frac{L}{6}.$$

Во втором случае $x'_ч = \frac{L}{2} - a$, $x'_с = \frac{L}{2} - a$, где a — смещение доски.

$$x'_{ЦМ} = \frac{x'_ч 2m + x'_с m}{3m} = \frac{(L/2 - a)2m + (L/2 - a)m}{3m} =$$
$$= \frac{3(L/2 - a)m}{3m} = \frac{L}{2} - a.$$

Так как центр масс системы остался на месте, то

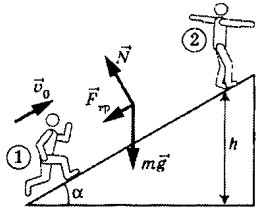
$$x_{ЦМ} = x'_{ЦМ} \Rightarrow \frac{L}{6} = \frac{L}{2} - a \Rightarrow a = \frac{L}{2} - \frac{L}{6} = \frac{1}{3}L.$$

3. Конькобежец, разогнавшись до скорости v_0, въезжает на ледяную гору. На какую высоту от начального уровня въедет конькобежец, если склон горы составляет угол α с горизонтом и коэффициент трения коньков о лед равен μ?

Решение

В точке 1 (см. рис.) начальная механическая энергия конькобежца $W_1 = W_{p1} + W_{k1} = mv^2/2$. В точке 2 механическая энергия конькобежца $W_2 = W_{p2} + W_{k2} = mgh$.

В процессе движения на конькобежца действуют силы: сила тяжести $m\vec{g}$ (консервативная сила), сила реакции опоры $\vec{N}$ (сразу отметим, что работа этой силы $A_N = NS\cos 90^\circ = 0$), сила трения скольжения $\vec{F}_{тр}$ (некон-



сервативная сила). Механическая энергия конькобежца изменяется, причем

$$W_2 - W_1 = A_{тр}. \qquad (1)$$

$F_{тр} = \mu N$, где $N = mg\cos\alpha \Rightarrow F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$.

Определим работу силы трения

$$A_{тр} = F_{тр}S\cos180^\circ = -F_{тр}S =$$
$$= -(\mu mg\cos\alpha)h/\sin\alpha = -\mu mgh\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

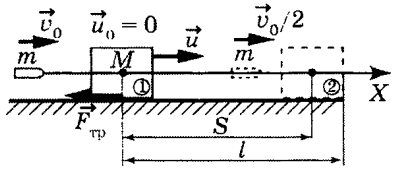
Подставив в (1), получим уравнение относительно h:

$$mgh - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgh\,\mathrm{ctg}\,\alpha \Rightarrow gh(1+\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha) = \frac{v_0^2}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g(1+\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha)}.$$

4. Из духового ружья стреляют в спичечный коробок, лежащий на расстоянии l = 30 см от края стола. Пуля массой m = 1 г, летящая с горизонтальной скоростью v_0 = 150 м/с, пробивает коробок и вылетает из него со скоростью $v_0/2$. Масса коробка M = 50 г. При каких значениях коэффициента трения μ между коробком и столом коробок упадет со стола?

Решение

После попадания пули в коробок он приобретает скорость $\vec{u}$. Найдем эту скорость, используя сохранение импульса системы коробок—пуля в горизонтальном направлении. До попадания пули импульс системы $P_{1x} = mv_0$, сразу после попадания $P_{2x} = mv_0/2 + Mu$; $P_{1x} = P_{2x} \Rightarrow mv_0 = mv_0/2 + Mu \Rightarrow u = mv_0/(2M)$.



Рассмотрим отдельно движение коробка. В положе-

нии 1 его механическая энергия $W_1 = Mu^2/2$ (нулевое значение потенциальной энергии здесь выбрано на поверхности стола). В положении 2: $W_2 = 0$ (коробок остановился). Механическая энергия коробка изменилась на значение работы силы трения

$$W_2 - W_1 = A_{тр}. \qquad (1)$$

Вычислим работу силы трения при движении по горизонтальной поверхности. В данном случае $F_{тр} = \mu N = \mu Mg \Rightarrow A_{тр} = F_{тр}S\cos 180^\circ = -\mu MgS$, где S — путь, пройденный коробком до остановки. Подставив в (1), получим

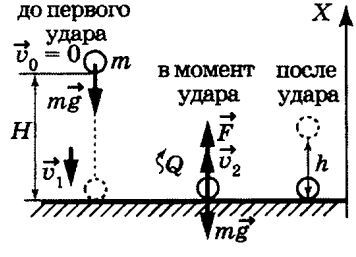
$$0 - \frac{Mu^2}{2} = -\mu MgS \Rightarrow S = \frac{u^2}{2\mu g} = \frac{(mv_0/2M)^2}{2\mu g} = \frac{m^2v_0^2}{8M^2\mu g}.$$

Коробок упадет со стола, если

$$S \ge l \Rightarrow \frac{m^2v_0^2}{8M^2\mu g} \ge l \Rightarrow \mu \le \frac{v_0^2}{8gl}\left(\frac{m}{M}\right)^2;\ \mu \le 0{,}38.$$

5. Шарик массой m свободно падает с высоты H на горизонтальную плоскость и отскакивает от нее. При ударе о плоскость выделяется количество теплоты, равное Q. Найти высоту, на которую подпрыгнет шарик после удара, а также среднюю силу, с которой шарик действует на плоскость, если время удара равно Δt.

Решение



На высоте H механическая энергия шарика равна его потенциальной энергии, $W_1 = mgH$. Пусть шарик подпрыгивает после удара на высоту h, тогда его механическая энергия в этой точке $W_2 = mgh$. За-

кон сохранения энергии с учетом выделившейся теплоты запишем в виде

$$W_1 = W_2 + Q \Rightarrow mgH = mgh + Q \Rightarrow h = H - Q/(mg).$$

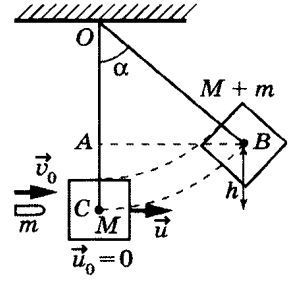
Пусть скорость шарика перед ударом равна v_1, тогда его механическая энергия перед ударом $W_1' = mv^2/2$. По закону сохранения механической энергии $W_1 = W_1' \Rightarrow$ $\Rightarrow mgH = mv^2{}_1/2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gH}$. Пусть $\vec{v}_2$ — скорость шарика после удара, тогда его механическая энергия после удара $W_2 = mv^2{}_2/2$. Так как $W_2 = W_2'$, то $v_2 = \sqrt{2gh}$.

Импульс шарика перед ударом $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$, а его проекция на вертикальное направление X равна $p_{1x} = -mv_1$. Импульс шарика после удара $\vec{p}_2 = m\vec{v}_2$, его проекция $p_{2x} =$ $= mv_2$. В соответствии с основным уравнением динамики изменение импульса тела равно импульсу действующей силы. Во время удара на шарик действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции со стороны плоскости $\vec{F}$. Проекция этих сил $F - mg$, а ее импульс

$$(F - mg)\Delta t = p_{2x} - p_{1x} = (F - mg)\Delta t = mv_2 - (-mv_1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F = m(v_1 + v_2)/\Delta t + mg =$$
$$= m\left(\left(\sqrt{2gH} + \sqrt{2g(H - Q/mg)}\right)/\Delta t\right) + g\Big).$$

По третьему закону Ньютона с такой же по модулю средней силой шарик действует на плоскость.

6. Пуля, летевшая горизонтально со скоростью $v_0 = 400$ м/с, попадает в брусок, подвешенный на нити длиной $l = 4$ м, и застревает в нем. Определить угол α, на который отклонится брусок, если масса пули $m = 20$ г, а бруска $M = 5$ кг. Определите количество теплоты, выделившееся при попадании пули в брусок.



Решение

Попадание пули в брусок — это пример неупругого столкновения. После попадания пули скорость бруска и пули $\vec{u}$. Найдем ее, используя сохранение импульса системы пуля—брусок в горизонтальном направлении X. Получим $mv_0 = (m + M)u \Rightarrow u = mv_0/(m + M)$.

В состоянии 1 механическая энергия системы $W_1 = (M + m)u^2/2$, а в состоянии 2: $W_2 = (m + M)gh$. После попадания пули на участке 1—2 механическая энергия сохраняется, т.е.

$$W_1 = W_2 \Rightarrow (M + m)u^2/2 = (m + M)gh \quad \Rightarrow h = u^2/(2g).$$

Проведем $AB \perp OC$. В $\Delta\ AOB$ $AO = l - h$, $OB = l$, поэтому

$$\cos\alpha = \frac{AO}{OB} = \frac{l-h}{l} = 1 - \frac{h}{l} = 1 - \frac{u^2}{2gl} =$$
$$= 1 - \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \frac{v_0^2}{2gl} = 0{,}97 \Rightarrow \alpha = 14°.$$

До попадания пули в брусок механическая энергия системы $W' = mv_0^2/2 > W_1$ (так как столкновение неупругое). Поэтому количество выделившейся теплоты

$$Q = W' - W_1 = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{(M+m)u^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{(M+m)}{2}\left(\frac{mv_0}{M+m}\right)^2 =$$
$$= \frac{mv_0^2}{2}\left(\frac{M}{M+m}\right) = \frac{mv_0^2}{2}\left(\frac{1}{1-m/M}\right).$$

При $m << M$ $Q = \dfrac{mv_0^2}{2} = 1600$ Дж.

7. Пружина, массой которой можно пренебречь, стоит на столе вертикально. Длина пружины l. С высоты H над столом ($H > l$) падает небольшой шарик массой m и

попадает на пружину. Максимальная скорость шарика при движении вниз равна v_m. Найдите коэффициент жесткости пружины k.

Решение

До попадания на пружину шарик свободно падает с ускорением свободного падения g. Скорость шарика при этом возрастает. Когда шарик оказался на пружине, на него действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости $F_y = k\Delta x$, где Δx — сжатие пружины. По второму закону Ньютона ускорение шарика $a = (mg - F_y)/m = g - (F_y/\ m) < g$, причем ускорение шарика непостоянно. Пока проекция ускорения на ось X положительна, скорость шарика возрастает. Скорость достигает максимального значения в тот момент, когда ее производная, т.е. ускорение, обращается в нуль. Из условия $a = 0$ находим

$$mg - F_y = 0 \Rightarrow mg = F_y = k(l - h), \qquad (1)$$

где h — высота, на которой оказался шарик в момент, когда его скорость максимальна.

В начальной точке движения механическая энергия шарика равна его потенциальной энергии в поле тяжести Земли $W_1 = mgH$. На высоте h механическая энергия состоит из потенциальной энергии в поле тяжести Земли, кинетической энергии и потенциальной энергии упругой деформации: $W_2 = mgh + mv_2m/2 + k(l - h)^2/2$. По закону сохранения механической энергии

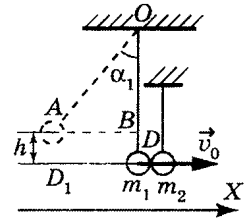
$$W_1 = W_2 \Rightarrow mgH = mgh + mv_m^2/2 + k(l - h)^2/2. \qquad (2)$$

Выразим из уравнения (1) $h = l - mg/k$ и подставим в уравнение (2).

Получим

$$mgH = mgh + \frac{mv_m^2}{2} + \frac{(mg)^2}{2k} \Rightarrow k = \frac{mg^2}{-v_m^2 + 2g(H - l)}.$$

8. Два небольших упругих шарика подвешены на нитях $l_1 = 10$ см и $l_2 = 5$ см так, что они соприкасаются, линия их центров горизонтальна, а нити вертикальны. Масса шариков $m_1 = 4$ г и $m_2 = 20$ г. Шарик массой m_1 отклоняют на угол $\alpha = 60^\circ$ от вертикали и отпускают. На какие углы отклонятся нити после абсолютно упругого соударения шариков?



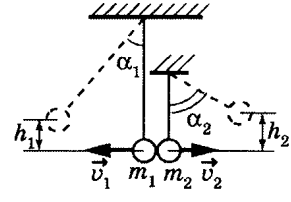
Решение

При отклонении нити с первым шариком на угол α он поднимется на высоту h от начального уровня. Найдем связь между α и h. Из $\Delta\ AOB$ $OB = l_1\cos\alpha$,

$$BD = OD - OB =$$
$$= l_1 - l_1\cos\alpha = l_1(1 - \cos\alpha) = h. \qquad (1)$$

Выберем нулевое значение потенциальной энергии на уровне DD_1. Механическая энергия шарика в точке A равна его потенциальной энергии в этой точке: $W_A = m_1gh$. Механическая энергия шарика m_1 в точке D равна его кинетической энергии в этой точке: $W_D = m_1v_0^2/2$, где v_0 — скорость перед столкновением со вторым шариком. По закону сохранения механической энергии $W_D = W_A \Rightarrow m_1gh = mv_0^2/2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}$.

Скорости шариков после столкновения равны v_1 и v_2 соответственно. Рассмотрим систему, состоящую из двух шариков. Механическая энергия этой системы перед столкновением равна кинетической энергии шарика m_1: $W_0 = m_1v^2{}_0/2$; механическая энергия системы сразу после столкновения равна сумме кинетических энергий шариков: $W_k = m_1v^2/2 + m_2v^2/2$.



Импульс системы перед столкновением шариков равен импульсу шарика m_1, его проекция на горизонтальное направление X: $P_0 = m_1 v_0$. Импульс системы после столкновения $P_k = m_2 v_2 + (-m_1 v_1) = m_2 v_2 - m_1 v_1$. Так как столкновение абсолютно упругое, то механическая энергия и импульс сохраняются, т.е. $W_0 = W_k$ и $P_0 = P_k$. Получаем систему уравнений относительно v_1 и v_2:

$$\begin{cases} m_1 v_0^2/2 = m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2, \\ m_1 v_0 = m_2 v_2 - m_1 v_1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1(v_0^2 - v_1^2) = m_2 v_2^2, \\ m_1(v_0 + v_1) = m_2 v_2. \end{cases}$$

После деления первого уравнения системы на второе находим $v_0 - v_1 = v_2$. Подставляя это выражение во второе уравнение, получим

$$m_1(v_0 + v_1) = m_2(v_0 - v_1) \Rightarrow (m_1 + m_2)v_1 = (m_2 - m_1)v_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_0 \text{ и } v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0.$$

Так как $m_2 > m_1$, то $v_1 > 0$ и, следовательно, предположение о направлении скорости $\vec{v}_1$ верно.

Далее рассматриваем движение каждого шарика отдельно. Используя закон сохранения механической энергии, получаем $m_1 v_1^2/2 = m_1 g h_1$, где h_1 — наибольшая высота подъема шарика m_1 после столкновения. Находим $h_1 = v_1^2/(2g)$. По формуле (1) находим

$$\cos\alpha_1 = 1 - \frac{h_1}{l_1} = 1 - \frac{v_1^2}{2gl} = 1 - \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right)\frac{v_0^2}{2gl_1} =$$
$$= 1 - \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right)^2 \frac{2gh}{2gl_1} = 1 - \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right)^2 (1 - \cos\alpha) = \frac{7}{9} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = \arccos\frac{7}{9} = 38{,}9°.$$

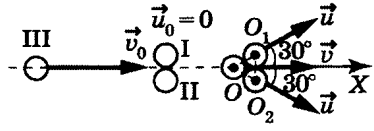
Аналогично находим

$$\cos\alpha_2 = 1 - \frac{h_2}{l_2} = 1 - \frac{v_2^2}{2gl_2} = 1 - \left(\frac{2m_1}{m_2+m_1}\right)^2 \frac{v_0^2}{2gl_2} =$$

$$= 1 - \left(\frac{m_1}{m_2+m_1}\right)^2 \frac{2}{gl_2} 2gh = 1 - 4(1-\cos\alpha)\frac{l_1}{l_2}\left(\frac{m_1}{m_2+m_1}\right) = \frac{89}{90} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \arccos\frac{89}{90} = 8{,}5^\circ.$$

9. Два идеально гладких шара одинаковых радиуса и массы покоятся, касаясь друг друга, на гладкой горизонтальной поверхности. Третий шар того же радиуса и массы налетает на них со скоростью v_0, двигаясь по той же поверхности вдоль прямой, касающейся обоих шаров. Найти скорость шаров после столкновения.



Решение

Пусть v — скорость третьего шара, а u — модуль скорости первого и второго шаров после столкновения; ΔOO_1O_2 — равносторонний, поэтому $\angle OO_1O_2 = 60^\circ$.

При абсолютно упругом столкновении сохраняется механическая энергия системы и ее импульс. Механическая энергия системы до столкновения есть кинетическая энергия первого шара $W_1 = mv^2{}_0/2$. Механическая энергия системы после столкновения

$$W_2 = \frac{mv^2}{2} + 2\frac{mu^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mu^2.$$

Импульс системы до столкновения в направлении X: $P_{1x} = mv_0$, после столкновения: $P_{2x} = mv + 2mu\cos 30^\circ = mv + \sqrt{3}mu$. Так как $W_1 = W_2$ и $P_{1x} = P_{2x}$, то получаем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{mv^2}{2} + mu^2, \\ mv_0 = mv + \sqrt{3}mu, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_0^2 - v^2 = 2u^2, \\ v_0 - v = \sqrt{3}u, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (v_0 - v)(v_0 + v) = 2u^2, \\ v_0 - v = \sqrt{3}u, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_0 + v = \dfrac{2}{\sqrt{3}}u, \\ v_0 - v = \sqrt{3}u, \end{cases} \Leftrightarrow$$

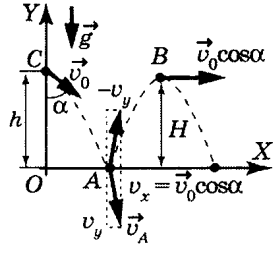
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2v_0 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right)u, \\ 2v = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right)u, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{2\sqrt{3}v_0}{5}, \\ v = -\dfrac{v_0}{5}. \end{cases}$$

Итак, третий шар после столкновения изменяет направление движения на противоположное.

10. Упругий шарик бросают с высоты h вниз на горизонтальную плоскость со скоростью v_0 под углом $\alpha = 45^\circ$ к вертикали. На какую максимальную высоту поднимется шарик после абсолютно упругого удара о плоскость?

Решение

Падение шарика с высоты h происходит с постоянным ускорением $\vec{g}$. Движение шарика по параболе раскладываем на два независимых прямолинейных движения: по горизонтали (ось OX) движение равномерное ($a_x = 0$) и по вертикали (ось OY) — равноускоренное ($a_y = -g = \text{const}$).



Скорость движения по горизонтали $v_x(t) = \text{const}$. При абсолютно упругом ударе в точке A скорость по горизонтали не изменяется ни по величине, ни по направлению, а скорость движения по вертикали сохраняется по модулю, но изменяет знак. В итоге после удара в точке A ша-

рик отскакивает с такой же по модулю скоростью v_A. Потери механической энергии шарика не происходит. Его дальнейшее движение — движение по параболе с сохранением проекции скорости на ось X. Поэтому в точке B — точке наивысшего подъема — полная скорость $v_B = v_x = v_0\cos\alpha$.

В точке C — начальной точке движения — полная механическая энергия $W_c = mgh + mv^2_0/2$. В точке B: $W_B = mgH + m(v_0\cos\alpha)^2/2$, где H — наибольшая высота подъема. По закону сохранения механической энергии

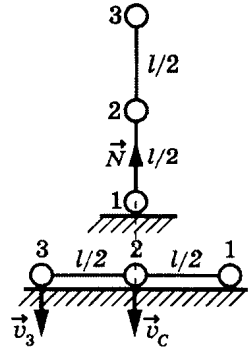
$$W_c = W_B \Rightarrow mgh + \frac{mv_0^2}{2} = mgH + \frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = h + \frac{v_0^2}{2g}(1-\cos^2\alpha) = h + \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha = h + \frac{v_0^2}{4g}.$$

11. На концах и в середине невесомого стержня длиной l расположены одинаковые шарики. Стержень ставят вертикально и отпускают. Считая, что трение между плоскостью и нижним шариком отсутствует, найдите скорость верхнего шарика в момент удара о горизонтальную поверхность.

Решение

Найдем положение центра масс системы. Вводим ось OY, координаты шариков $y_1 = 0$, $y_2 = l/2$, $y_3 = l$. Координата центра масс $y_c = (my_1 + my_2 + my_3)/(3m) = l/2$, т.е. центр масс этой системы находится посередине стержня. Внешние силы, приложенные к системе: сила тяжести $3m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$ — направлены в любой момент времени вертикально. По этой причине центр масс системы двигается только по вертикали, по верти-



кали направлена и скорость $\vec{v}_c$ центра масс в момент падения. Тогда $v_{cx} = 0$, где v_{cx} — проекция скорости $\vec{v}_c$ на горизонталь.

С другой стороны, $v_{cx} = (mv_{3x} + mv_{2x} + mv_{1x})/(3m)$, где v_{1x}, v_{2x}, v_{3x} — проекции скоростей шариков на ось X, причем $v_{2x} = v_{cx} = 0$. Тогда $0 = (v_{3x} + v_{1x})/3 \Rightarrow v_{3x} = -v_{1x}$. Так как длина стержня неизменна, последнее равенство возможно лишь при $v_{3x} = -v_{1x} = 0$. Следовательно, в момент падения скорости всех шариков направлены вертикально вниз, причем $v_{1y} = v_1 = 0$, $v_{3y} = -v_3$, $v_{2y} = v_{cy} = -v_c$. Так как $v_{2y} = (mv_{1y} + mv_{2y} + mv_{3y})/(3m)$, то $-v_c = (-v_3 - v_c)/3 \Rightarrow v_3 = 2v_c$.

Начальная механическая энергия системы есть потенциальная энергия центра масс системы $W_1 = mgl/2$. Механическая энергия системы в момент падения есть сумма кинетических энергий второго и третьего шариков $W_2 = mv^2{}_3/2 + mv^2{}_2/2 = m\,(2v_c)^2/2 + mv_c{}^2/2 = 5mv_c{}^2/2$.

По закону сохранения механической энергии

$$W_1 = W_2 \Rightarrow 3mgl/2 = 5mv_c{}^2/2 \Rightarrow v_c = \sqrt{3gl/5}.$$

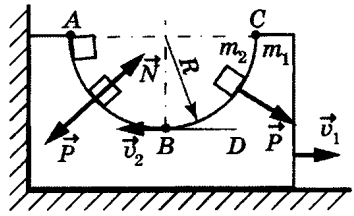
Искомая скорость верхнего шарика

$$v_3 = 2v_c = 2\sqrt{3gl/5}.$$

12. На гладкой горизонтальной поверхности около стенки стоит симметричный брусок массой m_1 с углублением полусферической формы радиусом R. Из точки A без трения соскальзывает маленькая шайба массой m_2. Найти максимальную скорость бруска при его последующем движении.

Решение

При движении по дуге AB на шайбу со стороны бруска действует сила реакции $\vec{N}$; по третьему закону Ньютона шайба действует на брусок с такой же по модулю силой



$\vec{P}$, которая прижимает брусок к стенке, и он остается неподвижным. После прохождения бруском точки B на участке BC сила $\vec{P}$ имеет ненулевую проекцию на горизонтальное направление. В результате у бруска появляется ускорение, направленное от стенки, и после первого прохождения точки B брусок отрывается от стенки. При этом движение бруска является ускоренным (но не равноускоренным), и такая ситуация сохраняется до тех пор, пока шайба, спускаясь по дуге BC, второй раз не пройдет точку B. После этого движение бруска становится замедленным. Таким образом, максимум скорости бруска соответствует второму прохождению шайбой через точку B. Нулевое значение потенциальной энергии выбираем на горизонтальном уровне BD. В начале движения в точке A шайба обладает механической энергией $W_A = m_2gR$. При первом прохождении шайбы через точку B механическая энергия шайбы $W_B = m_2v^2_0/2$, где v_0 — скорость шайбы в этот момент. Так как трения нет, а брусок еще неподвижен, то механическая энергия шайбы сохраняется: $W_A = W_B \Rightarrow m_2gR = m_2v^2_0/2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gR}$. Рассмотрим теперь систему движущихся тел шайба—брусок. Начальная механическая энергия системы $W_1 = m_2v^2_0/2$, а проекция импульса на горизонтальное направление X: $P_{1x} = m_2v_0$. Когда шайба второй раз проходит точку B, механическая энергия системы $W_2 = m_1v^2_1 + m_2v_2^2/2$, а ее импульс $P_{2x} = -m_2v_2 + m_1v_1$, где v_2 и v_1 — скорости шайбы и бруска. После отрыва бруска от стенки в горизонтальном направлении внешние силы на систему не действуют, поэтому проекция импульса системы на горизонтальное направление сохраняется. Из-за отсутствия трения сохраняется и механическая энергия системы:

$$\begin{cases} P_{1x} = P_{2x}, \\ W_1 = W_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_2 v_0 = -m_2 v_2 + m_1 v_1, \\ \dfrac{m_2 v_0^2}{2} = \dfrac{m_2 v_2^2}{2} + \dfrac{m_1 v_1^2}{2}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_2(v_0 + v_2) = m_1 v_1, \\ m_2(v_0 - v_2)(v_0 + v_2) = m_1 v_1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_0 - v_2 = v_1, \\ m_2(v_0 + v_2) = m_1 v_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2(v_0 + v_2) = m_1(v_0 - v_2) \Rightarrow v_2 = v_0 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2 = v_0 - v_1 = \frac{2m_1 v_0}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1\sqrt{2gR}}{m_1 + m_2}.$$

Это и есть максимальная скорость бруска.

Задачи для самостоятельного решения

1. Тело массой m, брошенное под углом к горизонту, упало на расстоянии S от места бросания. Зная, что максимальная высота подъема H, найдите работу бросания. Сопротивление не учитывать.

   Ответ: $mg(H + S^2/16H)$.

2. Небольшое тело массой $m = 10$ г соскальзывает с высоты $H = 1{,}2$ м по наклонному желобу, переходящему в «мертвую петлю» радиуса $R = 0{,}4$ м. Найдите величину работы силы трения, если известно, что сила давления тела на желоб в верхней точке петли равна нулю.

   Ответ: 0,02 Дж.

3. Однородная цепочка длиной 2 м лежит на столе. Когда часть цепочки длиной 0,2 м опускают со стола, она начинает скользить вниз. Масса цепочки 0,5 кг, сила трения между столом и цепочкой составляет 0,1 веса цепочки. Какая работа против силы трения совершается при соскальзывании цепочки?

   Ответ: 0,4 Дж.

4. Колодец, имеющий глубину H и площадь дна S, наполовину заполнен водой. Насос выкачивает воду и подает ее на поверхность земли через цилиндрическую трубу радиуса R. Какова мощность насоса, если он выкачивает всю воду за время t.

Ответ: $\frac{3}{8}\frac{\rho_0 gSH^2}{t}+\frac{\rho_0 S^3 H^3}{16\pi^2 R^4 t^3}$.

5. На мяч с высоты 1 м падает кирпич, подскакивающий затем почти на 1 м. На какую высоту подскакивает мяч?

Ответ: 0,25 м.

6. Гантель длиной l стоит в углу, образованном гладкими плоскостями. Нижний конец гантели смещают на очень маленькое расстояние, и гантель начинает двигаться. Найдите скорость нижнего шарика в тот момент, когда верхний шарик оторвется от вертикальной плоскости.

Ответ: $u_{\max}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2gl}{3}}$.

7. С верхней точки сферического купола радиуса R вниз скользит без трения небольшое тело. На какой высоте тело оторвется от купола?

Ответ: $2R/3$.

8. Лягушка массой m сидит на конце доски массой M и длиной l. Доска плавает на поверхности пруда. Лягушка прыгает под углом α к горизонту вдоль доски. Какой должна быть скорость лягушки V, чтобы после прыжка лягушка оказалась на другом конце доски? Сопротивлением воды пренебречь.

Ответ: $\sqrt{l\cdot g/(1+m/M)\sin 2\alpha}$.

9. Между двумя шарами с массами m_1 и m_2 находится сжатая пружина. Если один из шаров (массой m_2) удержать на месте, а другой освободить, то он отлетает со скоростью V_0. С какой скоростью будет двигаться шар массой m_1, если оба шара освободить одновременно? Деформации пружины в обоих случаях одинаковы.

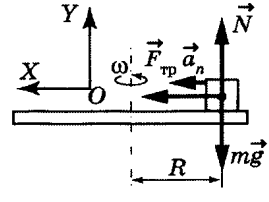
Ответ: $V_1 = V_0\sqrt{\dfrac{m_2}{m_1+m_2}}$.

10. На гладком столе покоятся два маленьких шарика массами $5m$ и $3m$, скрепленных невесомым легким стержнем длины L. На шарик массой $3m$ налетает и прилипает к нему кусочек пластилина массой $2m$, двигавшийся вдоль стола со скоростью V_0 перпендикулярно стержню. Определите силу упругости, возникающую в стержне, при дальнейшем движении шариков.

ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Примеры решения задач с кратким или развернутым ответом

1. На горизонтальном диске, который может вращаться вокруг вертикальной оси, находится тело массой m. Расстояние тела от оси вращения равно R. Коэффициент трения тела о диск равен μ. Диск начинают медленно раскручивать вокруг горизонтальной оси. Построить график зависимости силы трения, действующей на тело, от угловой скорости вращения ω.



Решение

На тело действуют следующие силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции со стороны диска $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$. Пока тело покоится относительно диска, $\vec{F}_{тр}$ — сила трения покоя. В системе отсчета, связанной с Землей, тело движется по окружности радиусом R и, следовательно, обладает центростремительным ускорением $\vec{a}_n$, направленным по радиусу к центру окружности. Введем систему координат XOY, ось Y направлена вертикально, а ось X — по радиусу окружности. Запишем второй закон Ньютона для проекций на оси Y и X:

по оси Y $$N - mg = 0, \quad (1)$$

по оси X $$F_{тр} = ma_n, \quad (2)$$

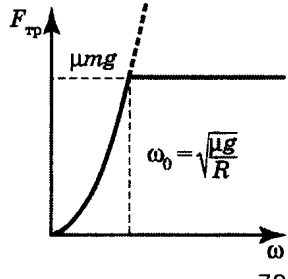
где $a_n = \omega^2/R$.

Как видно, в данном случае центростремительное ускорение сообщается телу силой трения покоя. Из уравнения (2) находим

$$F_{тр} = m\omega^2 R. \quad (3)$$

Отсюда видно, что с ростом угловой скорости вращения ω должна возрастать сила трения покоя, сообщая телу центростремительное ускорение, необходимое для движения по окружности радиусом R. Известно, что сила трения покоя — ограниченная величина, поэтому при определенных значениях угловой скорости тело не сможет удерживаться на окружности радиусом R и начнет скользить по диску. При этом на него будет действовать сила трения скольжения

$$F_{тр} \le \mu N = \mu mg. \quad (4)$$



Формула (3) — это квадратичная зависимость $F_{тр}$ от ω, график

этой зависимости — парабола. Формула (4) представляет собой зависимость вида $y = b = \text{const}$, поэтому ее график — прямая.

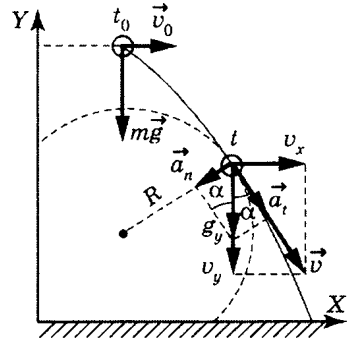
Угловая скорость ω_0, при которой начинается скольжение, может быть найдена из условия, что сила трения покоя достигла своего максимального значения, равного силе трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = \mu mg \Rightarrow m\omega_0^2 R = \mu mg \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\mu g / R}.$$

2. С самолета, летящего горизонтально со скоростью v_0 = 720 км/ч, отделяется тело. Найти центростремительное и тангенциальное ускорения тела, а также радиус кривизны траектории движения тела в точке, которую оно достигнет через 5 с после начала движения; сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Решение

После отделения от самолета начальная скорость тела равна v_0. Движение происходит под действием только одной силы — силы тяжести $m\vec{g}$, которая сообщает телу полное ускорение $\vec{g}$. Траектория движения тела — парабола. Проекции полного ускорения $\vec{g}$ на горизонтальную и вертикальную оси X и Y: $a_x = 0$ и $a_y = -g$, поэтому скорость по оси X: $v_x(t) = v_0$, а скорость по оси Y: $v_y(t) = v_{0y} + a_y t = -gt$. Через $t = 5$ с полная скорость тела $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}$. Разложим вектор полного ускорения тела $\vec{g}$ на направление, перпендикулярное скорости $\vec{v}$, и направление, совпадающее с направлением скорости. Получим соответственно центростремительное $\vec{a}_n$ и тангенциальное $\vec{a}_\tau$



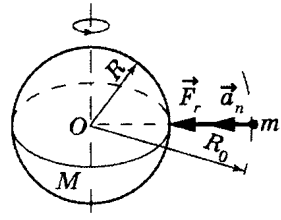
ускорения, причем $\vec{a}_n + \vec{a}_\tau = \vec{g}$ и $\vec{a}_n \perp \vec{a}_\tau$. Тогда $a_n = g\sin\alpha$, где $\sin\alpha = v_x/v$. Итак,

$$a_n = g(v_x / v) = g\left(v_0 / \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}\right) = 9{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Тангенциальное ускорение $a_\tau = \sqrt{g^2 - a_n^2} = 2{,}4$ м/с^2. Так как центростремительное ускорение $a_n = v^2 / R$, то

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_0^2 + (gt)^2}{g\left(v_0 / \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}\right)} = \frac{\left(v_0^2 + (gt)^2\right)^{3/2}}{gv_0} = 4455 \text{ м}.$$

3. Найти высоту орбиты спутника, висящего над одной точкой экватора планеты. Продолжительность суток на планете T, ее масса M, а радиус R.



Решение

Радиус орбиты спутника R_0. Для того чтобы спутник все время находился над одной точкой экватора, его период обращения по орбите вокруг планеты должен равняться времени оборота планеты вокруг своей оси, т.е. T. Центростремительное ускорение a_n спутнику на орбите сообщает гравитационная сила $F_г = GmM/R^2_0$, где m — масса спутника, R_0 — расстояние от центра планеты O (см. рисунок). По второму закону Ньютона

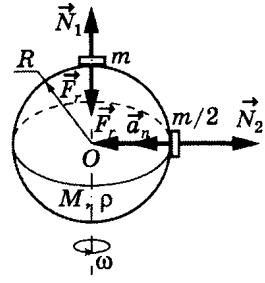
$$F_Г = ma_n \Rightarrow F_Г = G\frac{mM}{R_0^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_0 \Rightarrow R_0 = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}.$$

Высота спутника над поверхностью планеты

$$h = R_0 - R = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} - R.$$

4. На экваторе некоторой планеты тела весят вдвое меньше, чем на полюсе. Плотность вещества планеты равна ρ. Определить, каков период обращения этой планеты вокруг собственной оси.

Решение



На полюсе на тело массой m действуют силы: гравитационная сила $F_г = G(Mm^2R^2)$ (M — масса планеты, R — ее радиус), $\vec{N}_1$ — сила реакции, равная по модулю весу на полюсе. Так как тело покоится, то $F_г - N_1 = 0 \Rightarrow N_1 = F_г$. На экваторе гравитационная сила и сила реакции опоры N_2 сообщают телу центростремительное ускорение $a_n = \omega^2R = (2\pi/T)^2$, где T — продолжительность суток на планете. По второму закону Ньютона $F_г - N_2 = ma_n \Rightarrow \Rightarrow N_2 = F_г - ma_n$.

Модуль N_2 равен весу на экваторе. По условию

$$N_1 = 2N_2 \Rightarrow F_Г = 2(F_Г - ma_n) \Rightarrow F_Г = 2ma_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G\frac{Mm}{R^2} = 2m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R \Rightarrow G\frac{M}{R^3} = \frac{8\pi^2}{T^2}.$$

Учитывая, что $M = \rho V$, где $V = (^4/_3)\pi R^3$ — объем планеты, после подстановки получаем

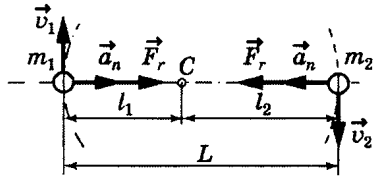
$$T = \sqrt{6\pi/(\rho G)}.$$

5. Две звезды движутся вокруг общего центра масс с постоянными по модулю скоростями v_1 и v_2 и периодом T. Найти массу звезд и расстояние между ними.

Решение

Определим положение центра масс двух тел массой m_1 и m_2, расположенных на расстоянии L. Тогда

$$l_1 = \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}, \text{ а } l_2 = \frac{m_1 L}{m_1 + m_2}.$$



Когда речь идет о вращении планеты вокруг звезды, то масса звезды много больше массы планеты,

$$m_1 >> m_2 \Leftrightarrow \frac{m_2}{m_1} \to 0.$$

Поэтому

$$l_1 = \frac{(m_2/m_1)L}{1+(m_2/m_1)} \to 0,$$

т.е. центр масс такой системы совпадает со звездой, и вращение планеты происходит вокруг звезды. В нашей задаче массы звезд сравнимы, поэтому вращение происходит вокруг точки C, удаленной от звезд на расстояния l_1 и l_2. Итак, звезда массой m_1 движется по окружности радиусом l_1 с центром в точке C. За период T звезда совершает полный оборот, проходя путь, равный длине окружности $2\pi l_1$. Модуль ее скорости $v_1 = 2\pi l_1/T = l_1 = v_1 T/(2\pi)$. Аналогично находим радиус окружности, по которой движется звезда массой m_2: $l_2 = v_2 T/(2\pi)$. Расстояние между звездами

$$L = l_1 - l_2 = (T/2\pi)(v_1 - v_2).$$

На звезду массой m_1 действует гравитационная сила $F_\text{Г} = G\frac{m_1 m_2}{L^2}$, которая сообщает ей центростремительное ускорение $a_n = v_1^2/l_1$. По второму закону Ньютона

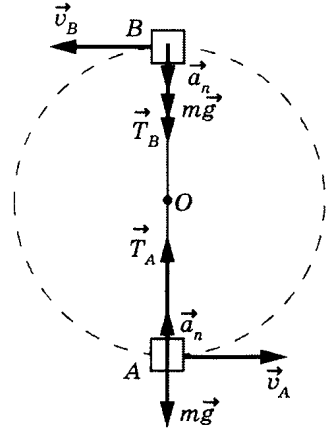
$$F_\text{Г} = m_1 a_n \Rightarrow G\frac{m_1 m_2}{L^2} = m_1\frac{v_1^2}{l_1} \Rightarrow m_2 = v_1^2\frac{L^2}{l_1 G} = \frac{v_1 T}{2\pi G}(v_1 + v_2)^2.$$

На звезду массой m_2 действует такая же по модулю гравитационная сила $G\frac{m_1 m_2}{L^2}$, которая сообщает ей центростремительное ускорение $\frac{v_2^2}{l_2}$. Получаем уравнение

$$G\frac{m_1 m_2}{L^2} = m_2\frac{v_2^2}{l_2} \Rightarrow m_1 = v_1^2\frac{L^2}{l_2 G} = \frac{v_2 T}{2\pi G}(v_1 + v_2)^2.$$

6. Груз массой m, привязанный к нерастяжимой нити, вращается в вертикальной плоскости. Найти разность сил натяжения нити в нижней и верхней точках траектории (см. рис.).

Решение



В нижней точке окружности (точка A) к грузу приложены сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}_A$, которые сообщают ему центростремительное ускорение $a_n = v^2{}_A/R$, где v_A — скорость груза в точке A; R — длина нити. По второму закону Ньютона $T_A - mg = m(v^2{}_A/R) \Rightarrow T_A = mg + m(v^2{}_A/R)$.

В точке B к грузу приложены силы: сила натяжения нити $\vec{T}_B$ и сила тяжести $m\vec{g}$, сообщающие грузу центростремительное ускорение $a_n = v^2{}_B/R$. По второму закону Ньютона $T_B + mg = m(v^2B/R) \Rightarrow T_B = m(v^2B/R) - mg$.

Поэтому

$$T_A - T_B = 2mg + m\frac{v_A^2}{R} - m\frac{v_B^2}{R} = 2mg + \frac{m}{R}(v_A^2 - v_B^2). \qquad (1)$$

В точке A механическая энергия груза равна его кинетической энергии: $W_A = m(v^2{}_A/2)$. В точке B механическая энергия есть сумма потенциальной и кинетической энергий: $W_B = mg{\cdot}2R + m(v^2{}_B/2)$. В процессе движения на груз действуют консервативная сила $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Ее модуль изменяется от точки к точке, но на любом бесконечно малом перемещении вектор силы натяжения перпендикулярен вектору перемещения. Работа силы натяжения нити при перемещении по любой дуге окружности равна нулю. Следовательно, механическая энергия груза сохраняется:

$$W_A = W_B \Rightarrow m\frac{v_A^2}{2} = 2mgR + m\frac{v_B^2}{2} \Rightarrow m\frac{v_A^2}{2} - m\frac{v_B^2}{2} = 2mgR \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow v_A^2 - v_B^2 = 4gR.$$

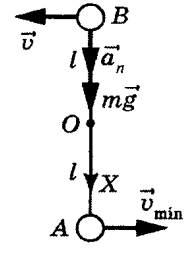
Подставив последнее выражение в (1), найдем

$$T_A - T_B = 2mg + \frac{m}{R}(v_A^2 - v_B^2) = 2mg + \frac{m}{R}(4gR) = 6mg.$$

7. Какой минимальной скоростью должен обладать в нижней точке шарик, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити длиной l, чтобы он мог совершить полный оборот в вертикальной плоскости?

Решение

Шарик должен достигнуть точки B, имея при этом скорость v, достаточную для движения по окружности радиуса l. Механическая энергия шарика



в точке A: $W_A = \dfrac{mv_{min}^2}{2}$,

в точке B: $W_B = \dfrac{mv^2}{2} + mg \cdot 2l.$

По закону сохранения механической энергии

$$W_A = W_B \Rightarrow \frac{mv_{\min}^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mg \cdot 2l. \qquad (1)$$

В самом общем случае в точке B на шарик действуют сила тяжести и сила натяжения нити T. По второму закону Ньютона для проекции на ось X находим, что

$$T + mg = ma_n = m(v^2/l). \qquad (2)$$

Из уравнения (1) следует, что минимум скорости в точке A соответствует минимуму скорости v в точке B. Из уравнения (2) следует, что минимум v соответствует минимуму модуля силы натяжения, который равен нулю. Уравнение (2) при этом приводится к виду $mg = mv^2/l \Rightarrow$ $\Rightarrow mv^2 = mgl$.

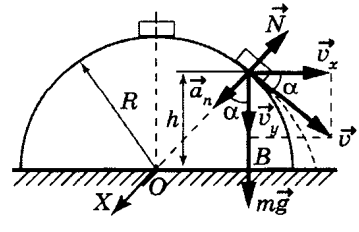
Подстановка в уравнение (1) дает

$$\frac{mv_{\min}^2}{2} = \frac{mgl}{2} + mg \cdot 2l \Rightarrow v_{\min} = \sqrt{5gl}.$$

8. На горизонтальной поверхности находится гладкая полусфера радиусом R. С верхней ее точки без начальной скорости соскальзывает тело. Определить время движения тела после отрыва от полусферы.

Решение

Во время скольжения тела по полусфере на него действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$, направленная вдоль продолжения радиуса. Равнодействующая этих сил сообщает телу центростремительное ускорение $a_n = v^2/R$, направленное к центру полусферы (v — скорость в какой-либо точке полусферы). Спроецировав силы на ось X, по второму закону Ньютона получаем



$$mg\cos\alpha - N = m(v^2/R) \Rightarrow N = mg\cos\alpha - m(v^2/R). \qquad (1)$$

Так как скорость тела возрастает, то в некоторой точке A сила $\vec{N}$ обратится в нуль, т.е. тело оторвется от поверхности полусферы.

Пусть высота, на которой происходит отрыв, равна h. Механическая энергия тела в верхней точке движения $W_1 = mgR$. Механическая энергия в точке отрыва $W_2 = mgh + mv^2/2$. Так как трения нет, то

$$W_1 = W_2 \Rightarrow mgR = mgh + mv^2/2 \Rightarrow v^2 = 2g(R-h). \qquad (2)$$

В Δ OAB $OA = R$, а $AB = h$, поэтому

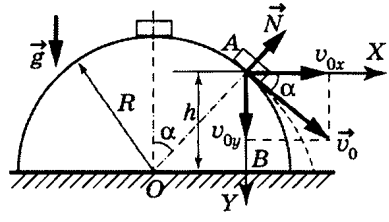
$$\cos\alpha = AB/OA = h/R. \qquad (3)$$

Подставив значения v^2 и $\cos\alpha$ из уравнений (2) и (3) в уравнение (1), получим: $0 = mg(h/R) - m(2g(R - h)/R)$ (в точке отрыва $N = 0$) $\Rightarrow 2(R - h) = h \Rightarrow h = (^2/_3)R$.

В момент отрыва скорость тела

$$v = \sqrt{2g(R-h)} = \sqrt{2g\frac{1}{3}R} = \sqrt{\frac{2}{3}gR}.$$

$$\cos\alpha = \frac{h}{R} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$



После отрыва от полусферы движение происходит только под действием силы тяжести, причем скорость тела $\vec{v} = \vec{v}_0$ сначала направлена под углом α к горизонту (см. рисунок). Значит, тело движется по параболе.

Начальные координаты тела $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Начальные скорости $v_{0x} = v_0\cos\alpha$, $v_{0y} = v_0\sin\alpha$. Закон движения по оси Y: $y(t) = y_0 + v_{0y} + a_y t^2/2 = v_0\sin\alpha t + gt^2/2$.

В момент падения $y(t_n) = h \Rightarrow v_0 \sin\alpha t_n + gt^2_n/2 = h$, где t_n — искомое время. Получаем квадратное уравнение $gt^2_n + 2v_0 \sin\alpha t_n - 2h = 0$, корни которого

$$t_n = (-v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{(v_0 \sin\alpha)^2 + 2gh})/g.$$

Берем положительный корень

$$t_n = \frac{-v_0 \sin\alpha + \sqrt{(v_0 \sin\alpha)^2 + 2gh}}{g} =$$

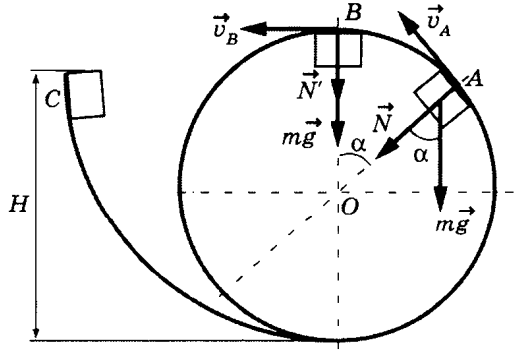
$$= \frac{v_0 \sin\alpha}{g}\left(\sqrt{1 + \frac{2gh}{(v_0 \sin\alpha)^2}} - 1\right) = 0{,}7\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

9. Тележка массой m совершает «мертвую петлю», скатываясь с минимально необходимой для этого высоты. С какой силой тележка давит на рельсы в точке A, радиус-вектор которой составляет угол α с вертикалью? Трением пренебречь.

Решение

Прежде всего выясним, какова минимальная высота, необходимая для совершения тележкой «мертвой петли». Для этого должны выполняться следующие условия:

1. Тележка должна оказаться в точке B. Механическая энергия в начальной точке движения $W_c = mgH$.



В точке B механическая энергия $W_B = mg^2R + mv^2_B/2$. Так как трения нет, то

$$W_c = W_B \text{ или } mgH = mg \cdot 2R + mv^2_B/2. \qquad (1)$$

2. В точке B тележка должна обладать центростремительным ускорением, необходимым для движения по окружности радиусом R. В точке B на тележку действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}'$, которые сообщают тележке центростремительное ускорение a_n. По второму закону Ньютона

$$mg + N' = ma_n = m(v^2_B/R). \qquad (2)$$

3. Как видно из уравнений (1) и (2), минимум высоты соответствует $N' = 0$. Из уравнения (2) $mv^2B = mgR$. После подстановки в уравнение (1) получим

$$mgH = 2mgR + mgR/2 \Rightarrow H = 5R/2.$$

Из рисунка следует, что точка A находится на высоте

$$R + R\cos\alpha = R(1 + \cos\alpha).$$

Механическая энергия тележки в точке A:

$$W_A = mgR(1 + \cos\alpha) + mv^2_A/2,$$

а в точке C:

$$W_c = mgH = mg(^5/_2)R. \text{ Так как } W_c = W_A,$$

то

$$mg(^5/_2)R = mgR(1 + \cos\alpha) + mv^2_A/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2_A = gR(3 - 2\cos\alpha). \qquad (3)$$

В точке A на тележку действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$, направленная по радиусу к центру. Эти силы сообщают тележке центростремительное ускорение a_n. Спроецировав силы на ось, направленную по радиусу к центру, получаем

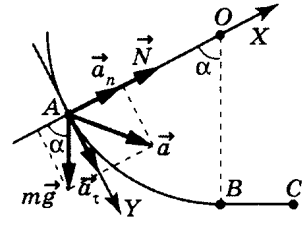
$$mg\cos\alpha + N = ma_n = m(v_A^2/R) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = m\frac{v_A^2}{R} - mg\cos\alpha = \frac{mgR(3-2\cos\alpha)}{R} - mg\cos\alpha =$$

$$= 3mg(1-\cos\alpha) = 6mg\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

По третьему закону Ньютона с такой же по модулю силой тележка давит на рельсы.

10. Спуск с горы представляет собой дугу AB окружности радиусом R = 10 м плавным выездом на горизонтальную поверхность BC. Поверхность горы гладкая, а горизонтальная поверхность шероховатая с коэффициентом трения μ = 0,15. На каком расстоянии от конца горы остановятся санки, если в точке A их полное ускорение равно по модулю g? Радиус, проведенный в точку A, образует с вертикалью угол α = 60°.



Решение

В точке A на санки действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$. В направлении X (по радиусу к центру) эти силы сообщают санкам центростремительное ускорение a_n ($a_n = v^2_A/R$). В направлении Y (по касательной к окружности) эти силы сообщают санкам тангенциальное ускорение a_τ, причем $mg\sin\alpha = ma_\tau \Rightarrow a_\tau = g\sin\alpha$.

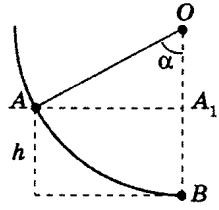
Так как модуль полного ускорения $a^2 = a^2_n + a^2_\tau$, то

$$a_n = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{g^2 - g^2\sin^2\alpha} = g\sqrt{1-\sin^2\alpha} = g\cos\alpha.$$

С другой стороны, $a_n = v^2A/R \Rightarrow v^2_A/R = g\cos\alpha$; находим квадрат скорости в точке A: $v^2_A = Rg\cos\alpha$.

В точке A механическая энергия равна сумме кинетической $W_{kA} = mv^2_A/2$ и потенциальной $W_{pA} = mgH$. Опреде-

ляем $h = A_1B = OB - OA_1 = R - R\cos\alpha = R(1 - \cos\alpha)$.



Итак, механическая энергия в точке A:

$$W_A = mv^2_A/2 + mgR\,(1 - \cos\alpha) = (mgR\cos\alpha)/2 + mgR(1 - \cos\alpha) = mgR((\cos\alpha)/2 + 1 - \cos\alpha) = mgR(1 - (\cos\alpha)/2).$$

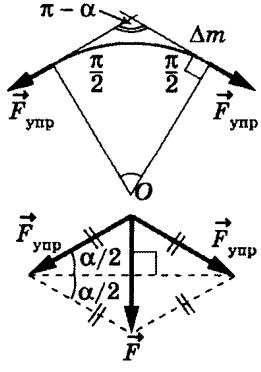
В момент остановки конечная механическая энергия $W = 0$. Изменение механической энергии равно работе силы трения на горизонтальном участке BC: $\Delta W = A_{тр}$, где $A_{тр} = -\mu mgx$ (x — расстояние, пройденное санками). Получаем уравнение

$$-mgR\,(1 - (\cos\alpha)/2) = -\mu mgx \Rightarrow x = (R/\mu)\,(1 - (\cos\alpha)/2) = 3R/(4\,\mu) = 50 \text{ м}.$$

11. Резиновый жгут, длина которого l и масса m, имеет коэффициент жесткости k. Кольцо, изготовленное из этого жгута, вращается с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца. Определить радиус вращающегося кольца.

Решение

Увеличение длины кольца $\Delta x = 2\pi R - l$, где R — радиус вращающегося кольца. Модуль силы упругости, возникающей в кольце, $F_{упр} = k\Delta x = k(2\pi R - l)$. Выберем элемент кольца, соответствующий малому центральному углу α и вращающийся с угловой скоростью ω.



Центральному углу в 1 радиан соответствует масса жгута, равная $m/(2\pi)$, поэтому масса выделенного элемента

$\Delta m = m\alpha/(2\pi)$. Центростремительное ускорение этому элементу сообщают силы упругости, приложенные со стороны других частей кольца. Находим равнодействующую этих сил $\vec{F}$, проводя векторное сложение по правилу параллелограмма (см. рисунок). Построенный параллелограмм — ромб, поэтому $(^1/_2)F = F_{упр}\sin(\alpha/2) \Rightarrow F = 2F_{упр}\sin(\alpha/2)$. При малых углах, выраженных в радианах, выполняется равенство $\sin\alpha = \alpha$. Поэтому $F = 2F_{упр}(\alpha/2) = F_{упр}\alpha$. По второму закону Ньютона $F = \Delta m a_n$, где центростремительное ускорение $a_n = \omega^2 R$. После подстановки имеем

$$F_{упр}\alpha = \Delta m \cdot \omega^2 R \Rightarrow k(2\pi R - l)\alpha = \frac{m}{2\pi}\alpha\omega^2 R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{2\pi k l}{4\pi^2 k - m\omega^2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Каков должен быть коэффициент трения резины о внутреннюю поверхность конуса с углом у вершины 2α, чтобы мотоциклист мог двигаться по окружности радиуса R с угловой скоростью ω?

   Ответ: $\mu = \dfrac{g + \omega^2 R \operatorname{tg}\alpha}{\omega^2 R - g\operatorname{tg}\alpha}$.

2. Полусферическая чаша радиусом 2 м вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью 3,13 $с^{-1}$. В чаше лежит маленький шарик, вращающийся вместе с ней. В каком месте чаши он находится?

   Ответ: 60°.

3. Круговой цилиндр радиуса R = 1 м, ось которого расположена горизонтально, вращается вокруг своей оси с угловой скоростью 1 $с^{-1}$. На цилиндр положили неболь-

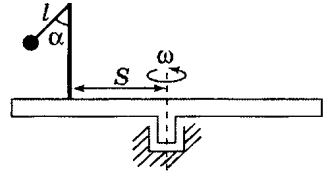
шой груз. При повороте груза на угол $\alpha = 30^\circ$ от вертикали он начинает соскальзывать с цилиндра. Определите коэффициент трения груза о цилиндр, если угловая скорость цилиндра при наличии на нем груза не изменилась.

Ответ: 0,65.

4. В вагоне поезда, идущего равномерно по криволинейному пути со скоростью 72 км/ч, производится взвешивание груза на пружинных весах (динамометром). Масса груза 5 кг, радиус закругления пути $R = 200$ м. Определите показания динамометра.

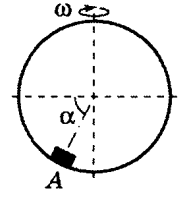
Ответ: 51 Н.

5. На диске, вращающемся вокруг вертикальной оси, укреплен вертикальный стержень. К верхнему концу стержня привязана нить, а к ней — металлический шарик. С какой угловой скоростью вращается диск, если нить составляет с вертикалью угол $\alpha = 45^\circ$? Длина нити 6 см. Расстояние стержня от оси вращения 10 см.



Ответ: 8,3 рад/с.

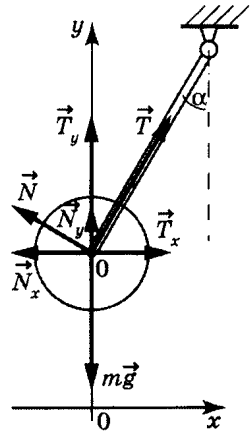
6. На внутренней поверхности полого шара радиуса R, вращающегося вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω, находится маленькая шайба A (см. рис.). Считая угол α известным, найдите минимальный коэффициент трения k, при котором шайба не скользит вниз.



Ответ: $\dfrac{g-\omega^2 R\,\mathrm{tg}\,\alpha}{g\,\mathrm{tg}\,\alpha+\omega^2 R\cos\alpha}$.

7. Стержень длиной $l = 1$ м закреплен жестко на вертикальной оси под углом $\alpha = 30^\circ$ к ней и вращается вместе с осью с угловой скоростью $\omega = 10$ с$^{-1}$. К нижнему концу стержня прикреплен шарик массой 1 кг. Найдите силу, с которой стержень действует на шарик.

Ответ: 50 Н.



МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Примеры решения задач с кратким или развернутым ответом

1. Грузик на пружине колеблется вдоль прямой с амплитудой $A = 2$ см и периодом $T = 2$ с. В начальный момент времени грузик проходил положение равновесия. Определить скорость и ускорение грузика через $t_1 = 0{,}25$ с; трения нет.

Решение

Так как трения нет, то грузик совершает гармонические колебания, уравнение которых

$$x(t) = A\sin(\omega_0 + \varphi_0) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right),$$

где φ_0 — начальная фаза колебаний. По условию задачи при $t = 0$ $x = 0$. Тогда $A\sin\varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$. Окончательно уравнение колебаний грузика записывается в виде

$$x(t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

Мгновенная скорость

$$v(t)=\bar{x}'(t)=\left(A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right)'=\frac{2\pi}{T}A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

В момент времени $t = t_1$:

$$v(t_1)=\frac{2\pi}{T}A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t_1\right)=6{,}28\cdot10^{-2}\cos\frac{\pi}{4}=4{,}4\cdot10^{-2}\text{ м/с}.$$

Ускорение грузика в любой момент времени $t = t_1$

$$a(t_1)=-\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t_1\right)=-\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2A\sin\frac{\pi}{4}=$$
$$=-13{,}9\cdot10^{-2}\text{ м/с}^2.$$

2. Точка совершает гармонические колебания вдоль некоторой прямой с периодом T = 0,6 с и амплитудой A = = 10 см. Найти среднюю скорость точки за время, в течение которого она проходит путь $A/2$: 1) из положения равновесия; 2) из крайнего положения.

Решение

Запишем уравнение гармонических колебаний точки:

$$x(t)=A\sin(\omega t+\varphi_0)=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_0\right),$$

где φ_0 — начальная фаза колебаний.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ точка находится в начале координат $x_0 = 0$. Тогда для определения начальной фазы колебаний получаем уравнение $A\sin\varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$. Следовательно,

$$x(t)=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

Пусть в момент времени $t = t_1$ после прохождения начала координат точка имеет координату $x(t_1) = A/2$. Определяем время t_1:

$$\frac{A}{2} = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t_1\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{T}t_1\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{12}.$$

Время движения из точки с координатой $x_0 = 0$ до точки с координатой $x = A$ составляет $T/4$, поэтому время движения из точки с координатой $x = A/2$ до точки с координатой

$$x = A:\ t_2 = \frac{T}{4} - t_1 = \frac{T}{4} - \frac{T}{12} = \frac{T}{6}.$$

Средняя скорость на первом участке пути

$$v_1 = \frac{S_1}{t_1} = \frac{A/2}{T/12} = \frac{6A}{T} = 0{,}1 \text{ м/с}.$$

Средняя скорость на втором участке пути

$$v_2 = \frac{S_2}{t_2} = \frac{A/2}{T/6} = \frac{3A}{T} = 0{,}05 \text{ м/с}.$$

3. Груз лежит на платформе, совершающей горизонтальные колебания с частотой $\nu = 2$ Гц и амплитудой $A = 1$ см. Будет ли груз скользить по платформе, если коэффициент трения груза о платформу равен 0,2?

Решение

Пусть груз покоится относительно платформы, совершая вместе с ней гармонические колебания, задаваемые формулой

$$x(t) = A\sin 2\pi\nu t.$$

Скорость груза

$$v(t) = x'(t) = (A\sin 2\pi\nu t)' = 2\pi\nu A\cos 2\pi\nu t.$$

Ускорение груза

$$a(t) = v'(t) = (2\pi\nu A\cos 2\pi\nu t)' = -(2\pi\nu)^2 A\sin 2\pi\nu t =$$
$$= (2\pi\nu)^2 A\sin(2\pi\nu t + \pi) = a_m \sin(2\pi\nu t + \pi),$$

где $a_m = (2\pi\nu)^2 A$ — амплитуда. Ясно, что эта величина есть максимальное значение ускорения, которым обладает груз, совершающий колебания вместе с платформой.

В вертикальном направлении на груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$ со стороны платформы, причем $N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$. Ускорение груза вызвано действием на него в горизонтальном направлении силы трения покоя со стороны платформы. По второму закону Ньютона $F_{тр}(t) = ma(t)$. Максимальное значение силы трения покоя соответствует максимальному значению ускорения $F_m = ma_m$. Если груз относительно платформы покоится, то $F_m < \mu N \Rightarrow ma_m < \mu mg \Rightarrow (2\pi\nu)^2 A < \mu g$.

Подставив числовые значения, проверим справедливость полученного неравенства:

$$2\ (3{,}14 \cdot 2)^2 \cdot 10^{-2} < 0{,}2 \cdot 9{,}8 \Rightarrow 1{,}58 < 1{,}96.$$

Груз по платформе скользить не будет.

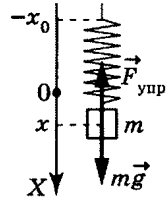
4. Определить период колебания тела массой m, подвешенного вертикально на пружине с коэффициентом жесткости k.

Решение

Пусть груз находится в равновесии. К нему приложены сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{упр}$, модуль которой равен kx_0, где $x_0 > 0$ — модуль деформации пружины. Из условия равновесия получаем уравнение

$$mg - kx_0 = 0 \Rightarrow x_0 = mg/k. \qquad (1)$$

Поместим начало координат оси X в точку, соответствующую положению равновесия груза, тогда при колебаниях в любой момент времени деформация пружины равна $x + x_0$ (где x — текущая координата) и, следовательно, проекция силы упругости на ось X: $F_x = -k(x + x_0)$. По второму закону



Ньютона получим $m\vec{g}+\vec{F}_{упр}=m\vec{a}$, а для проекций на ось X: $mg - k(x + x_0) = ma_x$. Учитывая, что ускорение есть вторая производная от координаты $a_x = x''$, получаем $mg - k(x + x_0) = mx'' \Rightarrow mg - kx_0 = mx'' + kx$.

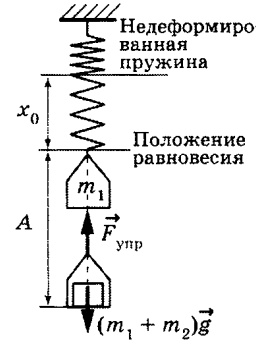
В соответствии с равенством (1) $mg - kx_0 = 0$, поэтому $mx'' + kx = 0 \Rightarrow x'' + (k/m)x = 0 \Rightarrow x'' + \omega^2 x = 0$, где $\omega^2 = k/m$.

Таким образом, получили уравнение гармонических колебаний. Следовательно, собственная частота колебаний груза $\omega=\sqrt{k/m}$, а период колебаний $T=2\pi\sqrt{m/k}$. Как видно, частота и период колебаний груза на вертикальной пружине оказываются такими же, как и при колебаниях на горизонтальной плоскости.

5. Чашка пружинных весов массой m_1 совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой A. Когда чашка находилась в крайнем нижнем положении, на нее положили груз массой m_2. В результате колебания прекратились. Определить первоначальный период колебаний чашки.

Решение

Первоначально колебания чашки происходят с периодом $T=2\pi\sqrt{m/k}$, где k — коэффициент жесткости пружины. При этом чашка колеблется около положения равновесия, в котором пружина деформирована на $x_0 = m_1g/k$.



При гармонических колебаниях чашки в крайнем нижнем положении ее скорость равна нулю, а модуль ускорения максимален. Однако когда на чашку положили дополнительный груз и колебания прекратились, ускорение груза обратилось в нуль. По второму закону Ньютона получаем

уравнение $F_y - (m_1 + m_2)g = 0$, где модуль силы упругости $F_y = k(x_0 + A)$. После подстановки имеем

$$k(x_0 + A) - (m_1 + m_2)g = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow kx_0 + kA - m_1g - m_2g = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow kA = m_2g \Rightarrow k = m_2g/A.$$

Подставляя k в формулу для периода колебаний, находим

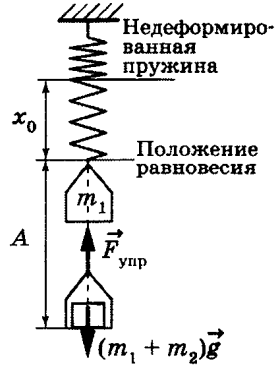
$$T = 2\pi\sqrt{m_1A/(m_2g)}.$$

6. На вертикально расположенной пружине с коэффициентом жесткости k подвешен груз массой m. Грузу сообщают начальную скорость v, направленную вертикально вниз. Определить период и амплитуду колебаний груза (см. рис.).

Решение

В задании **5** было показано, что груз в вертикальном направлении совершает гармонические колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Колебания происходят относительно нового равновесного положения $x_0 = mg/k$. Найдем амплитуду колебаний.

В положении равновесия груз обладает кинетической энергией $Wk_1 = mv^2_0/2$ и потенциальной энергией упругой деформации $W_{y1} = kx^2_0/2$. Нулевое значение потенциальной энергии в поле тяжести выберем на уровне, соответствующем положению равновесия, т.е. $W_{p1} = 0$. Полная механическая энергия тела $W_1 = Wk_1 + W_{y1} + W_{p1} = mv^2_0/2 + kx^2_0/2$.



Пусть тело отклонилось от положения равновесия вниз на расстояние, равное амплитуде колебаний, тогда $v = 0$ и кинетическая энергия тела $Wk_2 = 0$. Потенциальная энергия упругой деформации $W_{y2} = k(x_0 + A)^2/2$, а потенциальная энергия в поле тяжести $W_{p2} = -mgA$. Полная механическая энергия

$$W_2 = Wk_2 + W_{y2} + W_{p2} = k(x_0 + A)^2/2 - mgA.$$

По закону сохранения энергии

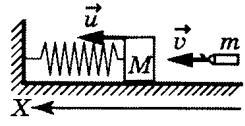
$$W_1 = W_2 \Rightarrow mv_0^2/2 + kx_0^2/2 = k(x_0 + A)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow mv_0^2 + kx_0^2 = kx_0^2 + 2kx_0A + kA^2 - 2mgA.$$

Учитывая, что $x_0 = mg/k$, находим $2kx_0A = 2mgA$. В итоге приходим к уравнению

$$kA^2 - mv_0^2 = 0 \Rightarrow A/v_0\sqrt{m/k}.$$

7. К горизонтальной пружине прикреплено тело массой $M = 10$ кг, лежащее на абсолютно гладком столе. В это тело попадает и застревает в нем пуля массой $m = 10$ г, летящая со скоростью $v = 500$ м/с, направленной вдоль оси пружины. Амплитуда возникших при этом колебаний $A = 0{,}1$ м. Найти период колебаний.

Решение



Пусть u — скорость тела сразу после попадания пули. В горизонтальном направлении X начальный импульс системы тело—пуля равен mv, а конечный импульс (сразу после попадания пули) — $(M + m)u$. По закону сохранения импульса $mv - (M + m)u \Rightarrow u = mv/(m + M)$.

После попадания пули механическая энергия системы

$$W_1 = \frac{(M+m)u^2}{2}.$$

При отклонении тела на расстояние, равное амплитуде A, скорость тела обращается в нуль, и механическая энергия системы W_2 равна потенциальной энергии упругой деформации, т.е. $W_2 = kA^2/2$, где k — коэффициент жесткости пружины. Так как трения нет, то механическая энергия при колебаниях сохраняется:

$$W_1 = W_2 \Rightarrow (M+m)u^2 = kA^2 \Rightarrow k = \frac{(M+m)u^2}{A^2} =$$

$$= \frac{(M+m)(mv/(M+m))^2}{A^2} =$$

$$= \frac{(mv)^2}{A^2(M+m)}.$$

Период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}} = \frac{2\pi}{A}\left(\frac{M+m}{mv}\right) = 1{,}26 \text{ с}.$$

8. На какую часть длины надо уменьшить длину математического маятника, чтобы период колебаний маятника на высоте 10 км был равен периоду его колебаний на поверхности Земли? Радиус Земли $R_з$ = 6400 км.

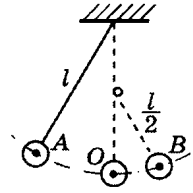
Решение

Период колебаний математического маятника длиной l на поверхности Земли равен $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Известно, что ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = GM_з/R^2$, где G — гравитационная постоянная, а $M_з$ — масса Земли. С увеличением расстояния от поверхности Земли ускорение свободного падения уменьшается, и на высоте h = 10 км оно составляет $g_1 = GM/(R_з + H)^2$. Чтобы период колебаний остался неизменным, надо уменьшить длину маятника, сделав ее l_1. Тогда период колебаний $T_1 = 2\pi\sqrt{l_1/g_1}$. Так как по условию задачи $T_1 = T$, то

$l_1/g_1 = l/g = l_1 = lg_1/g$. Уменьшение длины нити $l - l_1 = l(1 - g_1/g)$, и искомое отношение

$$\frac{l-l_1}{l}=1-\frac{g_1}{g}=1-\left(\frac{R_3}{R_3+H}\right)^2=3\cdot10^{-3}.$$

9. Математический маятник длиной l совершает колебания вблизи вертикальной стенки. Под точкой подвеса маятника, на расстоянии $^1/_2$ от нее по вертикали, в стене забит гвоздь. Найти период T колебаний маятника (см. рис.).



Решение

На участке AO маятник совершает колебания на нити длиной l.

Период таких колебаний $T=2\pi\sqrt{l/g}$, а время, затрачиваемое на прохождение дуги AO, $t_1 = T_1/4$. На участке OB маятник совершает колебания на нити длиной $l/2$ с периодом $T_2=2\pi\sqrt{(l/2)/g}=2\pi\sqrt{l/2g}$, причем время прохождения OB: $t_2 = T_2/4$.

Пусть T — искомый период колебаний маятника, тогда

$$\frac{T}{2}=\frac{T_1}{4}+\frac{T_2}{4}=\frac{T_1+T_2}{4}\Rightarrow T=\frac{T_1+T_2}{2}=\pi\sqrt{l/g}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

10. При какой скорости поезда маятник длиной l = 20 см, подвешенный в вагоне, особенно сильно раскачивается, если расстояние между стыками рельсов L = 20 м?

Решение

При прохождении колесами стыков на вагон и на маятник действует внешняя сила. Ее период равен прохождению вагоном расстояния между стыками, т.е. $T = L/v$, где v — скорость поезда. Частота колебаний этой внеш-

ней силы $\omega = 2\pi / T = 2\pi(v / L)$. Собственная частота колебаний маятника $\omega_0 = \sqrt{g / l}$. Маятник особенно сильно раскачивается, когда наступает резонанс:

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow 2\pi \frac{v}{L} = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow v = \frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = 22{,}3 \text{ м/с} \approx 80 \text{ км/ч}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Определите амплитуду и циклическую частоту гармонических колебаний тела, если на расстояниях x_1 и x_2 от положения равновесия скорость тела равна соответственно V_1 и V_2.

   Ответ: $A = \sqrt{\dfrac{x_2^2 V_1^2 - x_1^2 V_2^2}{V_1^2 - V_2^2}}$; $\omega = \sqrt{\dfrac{V_1^2 - V_2^2}{x_2^2 - x_1^2}}$.

2. В покоящейся на Земле ракете математический маятник колеблется с периодом $T = 1$ с. При движении ракеты вертикально вверх период колебаний маятника уменьшается на $n = 2$ раза. Определите ускорение ракеты.

   Ответ: 29,4 м/с^2.

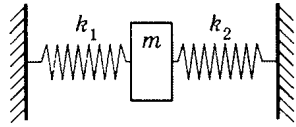
3. Тонкий абсолютно жесткий невесомый стержень, на конце которого закреплен точечный шарик, отклонили от положения равновесия на небольшой угол α и отпустили. В момент, когда стержень составляет угол $\beta < \alpha$ с вертикалью, произошло абсолютно упругое соударение шарика с вертикальной стенкой. Определите отношение периодов T_1/T колебаний такого маятника к периоду математического маятника той же длины.

   Ответ: $T_1/T = 1 - (1/\pi)\cdot\arccos(\beta/\alpha)$.

4. Набухшее бревно длиной L, сечение которого одинаково по всей длине, плавает в воде в вертикальном положении. Если выступающую из воды часть бревна немного погрузить в воду, а затем отпустить, то бревно начнет совершать колебания. Какую длину должен иметь математический маятник, чтобы периоды колебаний бревна и маятника были одинаковы? Плотность воды ρ и набухшей древесины ρ_1 считать постоянными.

Ответ: $(\rho_1/\rho)L$.

5. Определите период колебаний тела массой m = 200 г, прикрепленного к стенкам двумя пружинами с жесткостями k_1 = = 80 Н/м и k_2 = 40 Н/м. В положении равновесия пружина не деформирована. Силу тяжести не учитывать.

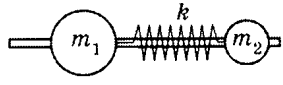


Ответ: $2\pi\sqrt{m/(k_1+k_2)} = 0{,}26$ с.

6. На горизонтальной поверхности лежат два груза массой 100 г и 200 г, соединенные невесомой пружиной с жесткостью 1000 Н/м. Трение отсутствует. Каков период колебания такой системы?

Ответ: 0,05 с.

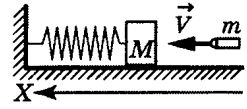
7. Два шара массами m_1 и m_2 могут скользить без трения по тонкому горизонтальному стержню. Шарики связаны невесомой пружиной с жесткостью k. Первоначально система неподвижна и пружины не напряжены, их отпускают без толчка. Определите период возникших колебаний.



Ответ: $2\pi\sqrt{m_1m_2/(k(m_1+m_2))}$.

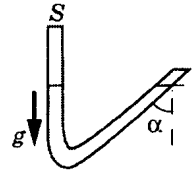
8. Брусок массой M под действием пружины совершает на гладком столе гармонические колебания с амплитудой A и периодом T. Вдоль оси движения летит

пуля массой m. Попав в брусок, она застревает в нем. В результате соударения колебания прекратились. Определите скорость пули.



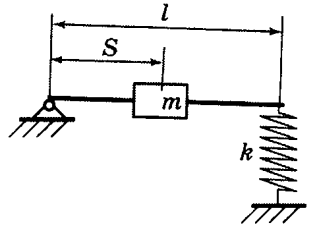
Ответ: $(M/m)\cdot 2\pi A/T$.

9. Жидкость объемом V налита в изогнутую трубку с площадью поперечного сечения канала S. Одно колено трубки вертикально, а другое составляет угол α с вертикалью. Пренебрегая вязкостью, найдите период малых колебаний жидкости в трубке.



Ответ: $2\pi\sqrt{V/gS(1+\cos\alpha)}$.

10. Невесомая штанга длиной L одним концом закреплена в идеальном шарнире, а другим опирается на пружину с жесткостью k. На расстоянии S от шарнира на штанге закреплен груз массой m. Определите: 1) период малых колебаний штанги; 2) циклическую частоту малых колебаний штанги; 3) жесткость пружины k, если известны период колебаний T и расстояние равно $S/2$; 4) массу груза m, если период малых колебаний T, расстояние равно S.



Ответ:

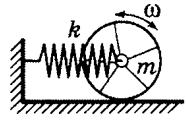
$$(2\pi S/L)\cdot\sqrt{m/k},\ L/S\cdot\sqrt{k/m},\ k=\pi^2 m/T^2,\ m=\frac{T^2L^2k}{4\pi^2S^2}.$$

11. Математический маятник длиной l и массой m раскачивается так, что каждый раз, когда маятник проходит положение равновесия, на него в течение корот-

кого промежутка времени t действует сила F, направленная параллельно скорости. Через сколько колебаний маятник отклонится на 90°?

Ответ: $m\sqrt{2gl}/(2Ft)$.

12. Пружина с жесткостью k присоединена к оси колеса массой m, которое способно катиться без проскальзывания. Какова частота малых колебаний системы? Считать массу колеса однородно распределенной по ободу.



Ответ: $\omega = \sqrt{k/2m}$.

13. Пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью V, попадает в брусок массой M и застревает в нем. Брусок лежит на гладкой горизонтальной плоскости и соединен с вертикальной стенкой пружиной с жесткостью k. Найдите период T колебаний бруска и частоту колебаний бруска.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{(M+m)/k}$; $\omega = \sqrt{k/(M+m)}$.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Примеры решения задач с кратким или развернутым ответом

1. Баллон, содержащий азот N_2 под давлением $p_1 = 15 \cdot 10^4$ Па и при температуре $t_1 = 27°C$, имеет массу $M_1 = 97$ кг. Когда часть азота была израсходована, при температуре $t_2 = -3°C$ давление в баллоне стало равным $p_2 = 6 \cdot 10^4$ Па, а масса баллона оказалась $M_2 = 93{,}5$ кг. Сколько молей азота осталось в баллоне?

Решение

В состоянии 1 азот в баллоне имел следующие параметры: p_1, V, T_1, где V — объем баллона. Масса азота в баллоне m_1. Свяжем эти параметры уравнением Менделеева—Клапейрона: $p_1V = m_1RT_1/\mu$. В состоянии 2 параметры газа: p_2, V, T_2, а масса газа m_2, поэтому $p_2V = m_2RT_2/\mu$. Отметим, что объем газа не изменился, однако переход из состояния 1 в состояние 2 нельзя назвать изохорным, так как изменяется масса газа. Разделив первое уравнение на второе, найдем, что

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2}\frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2}\frac{T_2}{T_1}.$$

Изменение общей массы баллона происходит за счет уменьшения массы азота, поэтому $M_1 - M_2 = m_1 - m_2$. Получаем систему уравнений, в которой задано отношение масс m_1 и m_2 и их разность:

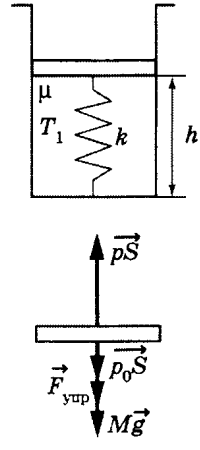
$$\begin{cases} \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{p_1}{p_2}\dfrac{T_1}{T_2}, \\ m_1 - m_2 = M_1 - M_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = m_2 \dfrac{p_1}{p_2}\dfrac{T_2}{T_1}, \\ m_2\left(\dfrac{p_1}{p_2}\dfrac{T_2}{T_1} - 1\right) = M_1 - M_2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2 = \frac{M_1 - M_2}{\dfrac{p_1}{p_2}\dfrac{T_2}{T_1} - 1}.$$

Отметим, что T_1 = (273 + 27) К = 300 К; T_2 = = (273 – 3) К = 270 К. Находим, что m_2 = 2,8 кг. Молярная масса азота $N_2\mu = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Значит, в баллоне осталось $\upsilon^2 = m_2/\mu$ = 100 молей азота.

2. В вертикально расположенном цилиндре находится газ массой m. Газ отделен от атмосферы поршнем, соединенным с дном цилиндра пружиной с жесткостью k. При температуре T_1 поршень расположен на расстоянии h от дна цилиндра. До какой температуры T_2 надо нагреть газ, чтобы поршень поднялся до высоты H? В обоих случаях пружина растянута. Молярная масса газа равна μ.

Решение



Силы, действующие на поршень, представлены на рисунке. На поршень действуют: сила тяжести $M\vec{g}$, где M — масса поршня; сила атмосферного давления $\overrightarrow{p_0S}$, где p_0 — атмосферное давление, S — площадь поршня; сила упругости $\vec{F}_{упр}$, причем ее модуль по закону Гука $F_{упр}$ = = $k(l - x_0)$, где x_0 — длина нерастянутой пружины, l — ее длина в деформированном состоянии; сила давления газа под поршнем $\overrightarrow{pS}$, где p — давление газа.

При равновесии поршня $pS - p_0 S - Mg - F_{упр} = 0$. Когда поршень расположен на высоте h, $F_{упр} = k(h - x_0)$, $p = p_1$, получаем уравнение

$$p_1 S - p_0 S - Mg - k(h - x_0) = 0. \quad (1)$$

Когда поршень находится на высоте H,

$$p_2 S - p_0 S - Mg - k(H - h) = 0. \quad (2)$$

После вычитания уравнений (1) и (2) находим

$$(p_1 - p_2)S - k(H - h) = 0. \quad (3)$$

Запишем уравнение Менделеева—Клапейрона в состоянии 1:

$$p_1 V_1 = p_1 Sh = mRT_1 / \mu \Rightarrow p_1 = mRT_1 / (Sh\mu).$$

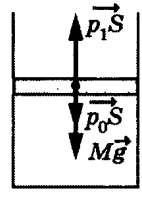
Аналогично можно выразить давление p_2 в состоянии 2:

$$p_2 = \frac{m}{\mu SH} RT_2.$$

После подстановки значений давления в уравнение (3) получим

$$\frac{m}{S\mu} RS\left(\frac{T_1}{h} - \frac{T_2}{H}\right) = k(H - h) \Rightarrow T_2 = T_1 \frac{H}{h} + \frac{kh(H - h)\mu}{mR}.$$

3. В цилиндре с площадью сечения $S = 5$ см^2 под поршнем массой $M = 1$ кг находится некоторый газ. При увеличении абсолютной температуры газа в $n = 1{,}5$ раза поршень поднимается вверх и упирается в уступы. При этом объем газа по сравнению с первоначальным увеличивается в $k = 1{,}2$ раза. Определить силу, с которой



поршень давит на уступы. Атмосферное давление p_0 =100 кПа.

Решение

Рассмотрим силы, действующие на поршень в положении 2: $M\vec{g}$ — сила тяжести; $\overrightarrow{p_2S}$ — сила давления газа под поршнем; $\overrightarrow{p_0S}$ — сила атмосферного давления; F — результирующая сила со стороны уступов (см. рис.). Так как поршень находится в равновесии, то, спроецировав силы на вертикальное направление Y, получим

$$p_2S - F - Mg - p_0S = 0 \Rightarrow F = p_2S - Mg - p_0S. \qquad (1)$$

Для определения давления газа в состоянии 2 сравним параметры состояний 1 и 2 газа: p_1, V_1, T_1; p_2, V_2, T_2. Переход газа из состояния 1 в состояние 2 происходит при m = const, поэтому можно применить уравнение Менделеева—Клапейрона:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} \Rightarrow p_2 = p_1\frac{T_2}{T_1}\frac{V_1}{V_2} = p_1n\frac{1}{k} = p_1\frac{n}{k}.$$

Для определения давления газа в состоянии 1 придется еще раз рассмотреть равновесие поршня.

$$p_1S - p_0S - Mg = 0 \Rightarrow p_1 = p_0 - Mg/S.$$

Значит,

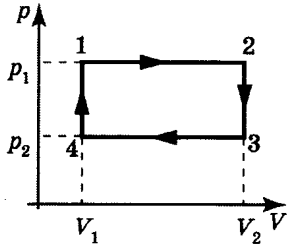
$$p_2 = \left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right)\frac{n}{k}.$$

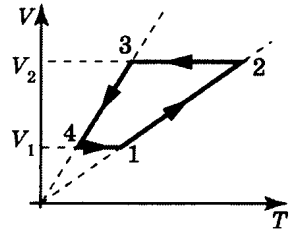
Подставив это в уравнение (1), найдем

$$F = \left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right)\frac{n}{k}S - Mg - p_0S = (p_0S + Mg)\frac{n}{k} - (p_0S + Mg) =$$

$$= \left(\frac{n}{k} - 1\right)(p_0S + Mg) = 15H.$$

4. На рисунке представлен график изменения состояния идеального газа в осях V, p. Изобразить этот график в осях T, V.

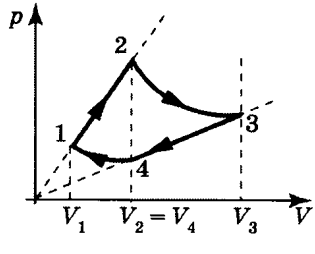


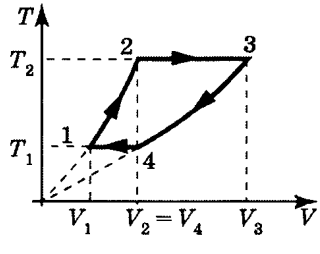


Решение

Участки 1—2 и 3—4 — изобары. По закону Гей-Люссака в изобарном процессе объем пропорционален абсолютной температуре, $V = cT$, где c = const. Поэтому графики участков 1—2 и 3—4 — прямые, продолжения которых проходят через начало координат. Так как $p_1 > p_2$, то изобара 1—2 располагается ниже, чем изобара 3—4. Участки 2—3 и 4—1 — изохоры, V_2 = const и V_1 = const. Их графиками в осях T, V являются прямые, параллельные оси T. Окончательный вид графика представлен на рисунке.

5. Моль идеального газа участвует в процессе, изображенном на рисунке. Продолжения отрезков прямых 1—2 и 3—4 проходят через начало координат, а кривые 1—4 и 2—3 являются изотермами. Изобразить этот процесс в координатах T, V (T — ось ординат) и найти объем V_3, если известны объемы V_1 и $V_2 = V_4$.





Решение

На участке 1—2 давление линейно зависит от объема $p = \alpha_1 V$, где $\alpha_1 = \text{const}$.

Кроме того, в любом состоянии на этом участке выполняется уравнение Менделеева—Клапейрона $pV = RT$ (по условию задан один моль). Подставляя в это уравнение $p = \alpha_1 V$, получаем $\alpha_1 V^2 = RT \Rightarrow T(V) = \alpha_1 V^2 / R$. Графиком этого процесса в осях V, T является парабола 1—2. Аналогично на участке 3—4 $p = \alpha_2 V$, где $\alpha_2 = \text{const}$, причем $0 < \alpha_2 < \alpha_1$, поэтому $T(V) = \alpha_2 V^2/R$. График этого процесса — парабола, изображенная на рисунке. По условию задачи участки 2—3 и 4—1 — изотермы, причем, как следует из рисунка, $T_2 > T_1$. Графики этих процессов в осях V, T — прямые. Окончательный вид процесса представлен на рисунке.

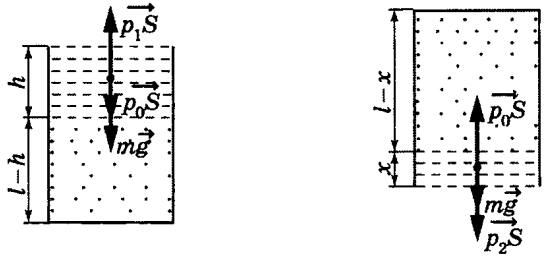
Так как точки 2 и 3 расположены на одной изотерме, то по закону Бойля—Мариотта $p_2V_2 = p_3V_3$. Аналогично получаем, что $p_1V_1 = p_4V_4$. После деления этих равенств находим

$$\frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_3}{p_4} \cdot \frac{V_3}{V_4}. \qquad (1)$$

Так как на участке 1—2 $p = \alpha_1 V$, то $p_2/p_1 = V_2/V_1$. Аналогично находим, что $p_3/p_4 = V_3/V_4$. Заменяя в равенстве (1) отношение давлений отношением объемов, получаем

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^2 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \Rightarrow V_3 = \frac{V_2V_4}{V_1} = \frac{V_2^2}{V_1}.$$

6. В запаянной с одного конца стеклянной трубке длиной $l = 0{,}9$ м находится столбик воздуха, ограниченный сверху столбиком ртути высотой $h = 30$ см. Ртуть доходит до верхнего края трубки. Трубку осторожно поворачивают открытым концом вниз, при этом часть



ртути выливается. Какова высота оставшегося столбика ртути? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па (см. рис.).

Решение

Укажем параметры состояния воздуха: в состоянии 1: p_1, $V_1 = S(l - h)$, T; в состоянии 2: p_2, $V_2 = S(l - x)$, T. Здесь S — площадь поперечного сечения трубки, T — температура воздуха, которую во всех задачах данного типа считают одинаковой, равной температуре окружающей среды, x — высота оставшегося столбика ртути. Так как масса воздуха в трубке не изменяется, то переход из 1 в 2 является изотермическим, и по закону Бойля—Мариотта

$$p_1V_1 = p_2V_2 \Rightarrow p_1(l-h) = p_2(l-x). \qquad (1)$$

Выразим p_1 и p_2. В состоянии 1 на столбик ртути действуют силы: $m\vec{g}$ — сила тяжести столбика ртути, p_0S — сила атмосферного давления и p_1S — сила давления воздуха. Получаем, что $p_1S - p_0S - mg = 0$. Выразив $m = \rho V = \rho Sh$ (ρ — плотность ртути), находим

$$p_1 = p_0 + mg/S = p_0 + \rho gh.$$

В состоянии 2 условия равновесия столбика ртути запишутся в виде:

$$p_0S - p_2S - mg = 0 \Rightarrow p_2 = p_0 - mg/S = p_0 - \rho gx.$$

Подставив в (1), получим $(p_0 + \rho gh)(l - h) = (p_0 - \rho gx)\times$ $\times(l - x)$. Раскрыв скобки, приходим к квадратному уравнению $\rho gx^2 - (p_0 + \rho gl)x + h(\rho gh + p_0 - \rho gl) = 0$.

Вынесем из последних двух членов этого уравнения множитель ρgl, получим

$$\rho gx^2 - \rho gl\left(\frac{p_0}{\rho gl}+1\right)x + \rho ghl\left(\frac{h}{l}+\frac{p_0}{\rho gl}-1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - lx\left(\frac{p_0}{\rho gl}+1\right) + hl\left(\frac{h}{l}+\frac{p_0}{\rho gl}-1\right) = 0.$$

Заметим, что ρgl — это давление столбика ртути высотой l, поэтому, если его выражать в мм рт. ст., оно будет численно равно l, выраженному в миллиметрах. В данном случае $\rho gl = 900$ мм рт. ст. Давление $p_0 = 10^5$ Па $=$ $= 760$ мм рт. ст., поэтому

$$\frac{p_0}{\rho gl} = \frac{760}{900} = \frac{38}{45}, \quad \frac{h}{l} = \frac{1}{3}.$$

Подставляя в последнее уравнение $h = 30$ см и $l =$ $= 90$ см, получаем $x^2 + 166x + 480 = 0$, корни которого $x_1 = 163$ см и $x_2 = 3$ см. Первый корень явно противоречит условию задачи, поэтому окончательно $x = 3$ см.

7. Два баллона соединены трубкой с краном. В первом находится газ при давлении $p_1 = 10^5$ Па, во втором — при $p_2 = 0{,}6\cdot 105$ Па. Объем первого баллона $V_1 =$ $= 10^{-3}$ м^3, а второго $V_2 = 3\cdot 10^{-3}$ м^3. Какое давление установится в баллонах, если открыть кран? Температура постоянна. Объемом трубки можно пренебречь.

Решение

Газ, находившийся в сосуде объемом V_1, имел параметры состояния p_1, V_1, T_1, а газ, находившийся в сосуде объемом V_2, — p_2, V_2, T_1. После того как открыли кран,

образовалась смесь газов, причем каждая составляющая будет создавать парциальное давление p_1' и p_2' соответственно. По закону Дальтона давление смеси

$$p = p_1' + p_2'. \qquad (1)$$

Для определения p_1' рассмотрим конечное состояние газа, находившегося в сосуде объемом V_1. Параметры его состояния p', $V' = (V_1 + V_2)$, T. Так как масса газа и температура не изменялись, то переход из начального в конечное состояние является изотермическим. По закону Бойля—Мариотта

$$p_1V_1 = p_1'(V_1 + V_2) \Rightarrow p_1' = p_1V_1/(V_1 + V_2).$$

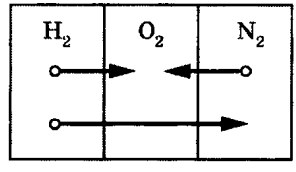
Аналогично можно определить парциальное давление газа, находившегося во втором сосуде: $p_2' = p_2V_2/(V_1 + V_2)$. Подставляя в (1), найдем давление, установившееся в сосуде:

$$p = \frac{p_1V_1}{V_1 + V_2} + \frac{p_2V_2}{V_1 + V_2} = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2} = 0{,}7 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

8. Сосуд объемом $V = 30$ дм^3 разделен на три равные части неподвижными полупроницаемыми перегородками. В левую часть вводят $m_1 = 30$ г водорода, в среднюю $m_2 = 160$ г кислорода и в правую $m_3 = 70$ г азота. Через левую перегородку может диффундировать только водород, через правую — водород и азот. Какое давление установится в каждой части сосуда, если в нем поддерживается постоянная температура $T = 300$ К?

Решение

На рисунке показано начальное распределение газов в сосуде и направление диффузии газов. На втором рисунке представлено окончательное распределение газов в сосуде.



Как следует из второго рисунка, после установления равновесия водород распределен по всему сосуду, поэтому

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT,$$

где p_1 — давление водорода, а $\mu_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — его молярная масса. Находим

$$p_1 = \frac{m_1}{\mu_1} \frac{RT}{V} = 1{,}3 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

H_2	O_2 H_2 N_2	N_2 H_2

Таким будет давление в левой части сосуда.

После установления равновесия азот распределен в объеме $2\ V/3$. Из уравнения состояния

$$p_3 \frac{2}{3} V = \frac{m_3}{\mu_3} RT$$

находим давление азота

$$p_3 = \frac{3m_3}{2\mu_3} \frac{RT}{V},$$

где $\mu_3 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса азота. После подстановки находим $p_3 = 0{,}31 \cdot 10^6$ Па. Давление в правой части сосуда есть сумма парциальных давлений водорода и азота: $p_2 = p_1 + p_3 = 1{,}6 \cdot 10^6$ Па.

Кислород распределен только в $V/3$. Из уравнения состояния находим его давление

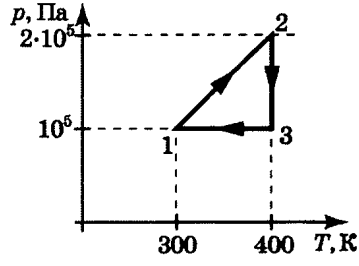
$$p_2 = \frac{3m_2}{\mu_2} \cdot \frac{RT}{V},$$

где $\mu_2 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. После подстановки находим $p_2 = 1{,}3 \cdot 10^6$ Па. Давление в средней части сосуда равно сумме парциальных давлений всех газов: $p_3 = p_1 + p_2 + p_3 = 2{,}9 \cdot 10^6$ Па.

9. На рисунке изображен замкнутый процесс, который совершает некоторая масса кислорода. Известно, что максимальный объем, который занимал газ в этом процессе, V_{max} = 16,4 дм^3. Определите массу газа и его объем в точке 1.

Решение

Из условия задачи



$$\frac{p_2}{p_1} = 2, \text{ а } \frac{T_2}{T_1} = \frac{4}{3}, \text{ т.е. } \frac{p_2}{p_1} \neq \frac{T_2}{T_1}.$$

Значит, процесс 1—2 не является изохорным, продолжение прямой 1—2 не проходит через начало координат. Из уравнения Менделеева—Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu}RT \Rightarrow V = \frac{m}{\mu}R\frac{T}{p}.$$

Следовательно, объем максимален в состоянии, где максимально отношение T/p, т.е. в точке 3. Итак, V_{max} = = V_3. Применив уравнение Менделеева—Клапейрона к состоянию в точке 3, получим

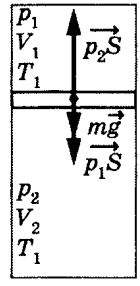
$$p_3V_3 = \frac{m}{\mu}RT_3 \Rightarrow m = \frac{p_3V_3\mu}{RT_3},$$

где $\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса кислорода. После подстановки найдем $m = 16 \cdot 10^{-3}$ кг. Так как 1—3 — изобара, то по закону Гей-Люссака $V_1/T_1 = V_3/T_3 \Rightarrow V_1 = T_1/T_3 = 12{,}3$ дм^3.

10. Вертикально расположенный цилиндр, закрытый с обеих сторон, разделен тяжелым теплонепроницаемым поршнем на две части; обе части сосуда содержат оди-

наковое количество воздуха. При одинаковой температуре воздуха в обеих частях $T_1 = 400$ К давление p_2 в нижней части сосуда вдвое больше давления p_1 в верхней части. До какой температуры T_2 надо нагреть воздух в нижней части сосуда, чтобы объемы верхней и нижней частей стали одинаковыми (см. рис.)?

Решение



Параметры состояния воздуха в нижней части сосуда связаны уравнением $p_2V_2 = \nu RT_1$. Для верхней части сосуда получаем уравнение $p_1V_1 = \nu RT_1$ (здесь ν — одинаковое количество вещества в обеих частях сосуда; V_2, V_1 — объемы нижней и верхней частей, p_2 и p_1 — давления в них). Приравнивая правые части уравнений, находим, что $p_2V_2 = p_1V_1$. По условию $p_2 = 2p_1$, поэтому $2p_1 \cdot V_2 = p_1V_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow V_1 = 2V_2$. Пусть V — объем всего сосуда, тогда $V_1 + V_2 =$ $= V \Rightarrow V_2 = V/3$, $V_1 = 2V/3$. Из условия равновесия поршня под действием сил давления p_2S, p_1S и силы тяжести поршня Mg находим

$$p_2S - p_1S - Mg = 0 \Rightarrow p_2 - p_1 = Mg/S. \qquad (1)$$

Отметим, что уравнение (1) будет выполняться для любых значений давлений.

Когда поршень делит объем цилиндра на две равные части, параметры состояния воздуха под поршнем p'_2; $V'_2 = V/2$; T_2 связаны с начальными параметрами p_2; $V_2 = V/3$; T_1 уравнением Клапейрона

$$\frac{p_2V_2}{T_1} = \frac{p'_2V'_2}{T_2} \Rightarrow p'_2 = \frac{T_2}{T_1}\frac{V_2}{V_1}p_2 = \frac{2}{3}p_2\frac{T_2}{T_1}.$$

Так как поршень теплонепроницаем, а нагревают воздух в нижней части сосуда, то температура в верхней части

$$T_1 \text{ — const} \Rightarrow p_1V_1 = p_1'V_1',\ V_1' = \frac{1}{2}V \Rightarrow p_1' = p_1\frac{V_1}{V_1'} = \frac{4}{3}p_1.$$

Подставляя в уравнение (1) p_1' и p_2', получим

$$\frac{2}{3}p_2\frac{T_2}{T_1} - \frac{4}{3}p_1 = \frac{Mg}{S}. \qquad (2)$$

Приравнивая левые части уравнений (1) и (2), находим

$$p_2 - p_1 = \frac{2}{3}p_2 \cdot \frac{T_2}{T_1} - \frac{4}{3}p_1.$$

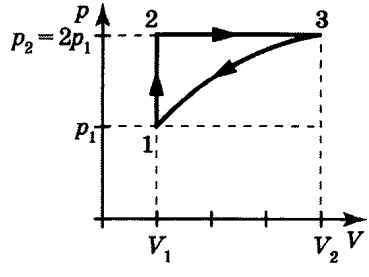
Подставляя $p_2 = 2p_1$, получим

$$2p_1 - p_1 = \frac{2}{3}2p_1\frac{T_2}{T_1} - \frac{4}{3}p_1 \Rightarrow \frac{7}{3} = \frac{4}{3}\frac{T_2}{T_1} \Rightarrow T_2 = \frac{7}{4}T_1 = 700 \text{ K}.$$

11. Некоторая масса газа занимает объем V_1 при давлении p_1 и температуре T_1. Затем газ при постоянном объеме нагревают до температуры $T_2 = 2T_1$. После этого происходит расширение газа при постоянном давлении до объема $V_2 = 4V_1$. Из получившегося состояния газ возвращают в начальное в ходе процесса $pV^n = \text{const}$. Найти показатель степени n.

Решение

Наглядное представление об этом замкнутом процессе дает рисунок.



На участке 1—2 $V_1 = \text{const} \Rightarrow p \sim T \Rightarrow p_2 = 2p_1$, $T_2 = 2T_1$.

На участке 2—3 $p_2 = \text{const} \Rightarrow V \sim T \Rightarrow T_3 = 4T_2 = 8T_1$, $V_2 = 4V_1$.

На участке 3—1

$$p_1'V_1^n = p_3V_3^n \Rightarrow p_1V_1^n = 2p_1(4V_1)^n \Rightarrow V_1^n = 2\cdot 2^{2n}V_1^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = 2^{2n+1} \Rightarrow 2n+1 = 0 \Rightarrow n = -\frac{1}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. В комнате объема V = 60 м^3 испарили капельку духов, содержащую m = 10^{-4} г ароматического вещества. Сколько молекул ароматического вещества попадает в легкие человека при каждом вздохе? Объем вдыхаемого воздуха V_B =1 дм^3. Молярная масса ароматического вещества μ = = 1 кг/моль.

   Ответ: 10^{12}.

2. При взрыве атомной бомбы (M = 1 кг плутония ^{242}Pu) получается одна радиоактивная частица на каждый атом плутония. Предполагая, что ветры равномерно перемешивают эти частицы во всей атмосфере, подсчитайте число радиоактивных частиц, попадающих в объем V = 1 дм^3 воздуха у поверхности Земли. Радиус Земли принять равным $R_з$ = $6\cdot10^6$ м.

   Ответ: $700\ \frac{1}{\text{дм}^3}$.

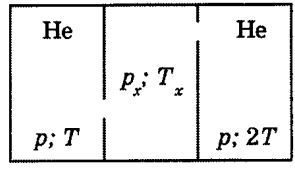
3. Спутник сечения S = 1 м^2 движется с первой космической скоростью V = 7,9 км/с по околоземной орбите. Давление воздуха на высоте орбиты (h = 200 км) p = $1{,}37\cdot10^{-4}$ Па, температура T = 1226 К. Определите число столкновений спутника с молекулами воздуха в единицу времени.

   Ответ: $6\cdot10^{19}$ c^{-1}.

4. Некоторая масса водорода занимает объем 10 дм^3 при давлении $p = 10^7$ Па и температуре $t = 20°C$. Какая масса водорода израсходована, если при сжигании оставшегося водорода образовалось 0,5 дм^3 воды?

Ответ: $m = 28$ г.

5. Теплоизолированная полость с небольшими одинаковыми отверстиями соединена с двумя объемами, содержащими газообразный гелий. Давление гелия в этих объемах поддерживается постоянным и равным p, а температуры поддерживаются равными T в одном из объемов и $2T$ — в другом. Найдите установившееся давление и температуру внутри полости.



Ответ: $T_x = T\sqrt{2} = 1{,}47T$. $p_x = p\left(\sqrt{2}+1\right)/2\sqrt[4]{2} \approx p$.

6. Для приготовления газовой смеси с общим давлением 5 кПа к сосуду с объемом 10 дм^3 присоединили баллон объемом 1 дм^3, в котором находится гелий под давлением 4 кПа, и баллон с неоном под давлением 1 кПа. Найдите объем баллона с неоном. Температура постоянна.

Ответ: 3 дм^3.

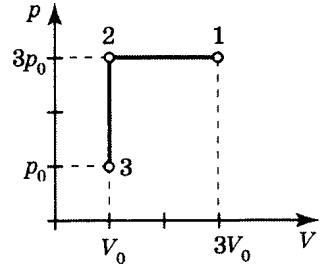
7. Одинаковые по массе количества водорода и гелия находятся в сосуде объемом V_1, который отделен от пустого сосуда объемом V_2 полупроницаемой перегородкой, свободно пропускающей молекулы водорода и не пропускающей гелий. После установления равновесия давление в первом сосуде упало в 2 раза. Определите отношение V_1/V_2. Температура постоянна. Молярная масса водорода 2 г/моль, гелия — 4 г/моль.

Ответ: $V_1/V_2 = {}^1/_3$.

8. Сосуд объемом 2 дм^3 разделен на две равные части полупроницаемой перегородкой. В первую половину сосуда введена смесь аргона массой 20 г и водорода массой 2 г, во второй половине — вакуум. Через перегородку может диффундировать только водород. Какое давление установится в первой половине сосуда после окончания процесса диффузии? Во время процесса поддерживалась температура 20°С. Перегородка неподвижна.

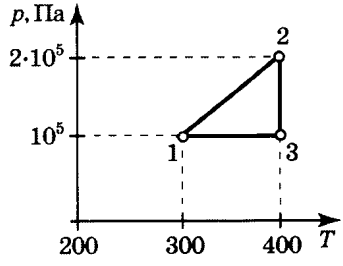
Ответ: $2{,}4 \cdot 10^6$ Па.

9. Моль аргона, имеющий температуру T_1 = 900 К в состоянии 1, последовательно переводят в состояние 3. Считая аргон идеальным газом, определите среднюю квадратичную скорость его атомов в состоянии 3. μ = 40 г/моль.



Ответ: 249 м/с.

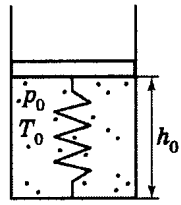
10. На pT-диаграмме изображен замкнутый процесс, который совершает некоторая масса кислорода. Известно, что максимальный объем, который занимал газ в этом процессе, V_{max} = 16,4 дм^3. Определите массу газа и его объем в точке 1.



Ответ: 12,3 дм^3; 0,016 кг.

11. В цилиндре под поршнем находится газ при давлении p_0 и температуре T_0. Поршень удерживается упругой пружиной. Во сколько раз нужно увеличить темпера-

туру газа, чтобы его объем увеличился в 1,5 раза? Если газ полностью откачать из-под поршня, поршень будет находиться в равновесии у дна цилиндра.



Ответ: 2,25.

12. В баллоне находится некоторое количество газа при атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па. При открытом вентиле баллон был нагрет, после чего вентиль закрыли и газ остыл до начальной температуры $t_0 = 10°C$, давление в баллоне упало до $p = 0{,}7 \cdot 10^5$ Па. Каково максимальное изменение температуры баллона?

Ответ: $\Delta T = 121{,}7$ К.

13. Некоторая масса газа занимает объем при давлении p_1 и температуре T_1, равный V_1. Затем газ при постоянном объеме нагревают до температуры $T_2 = 2T_1$; после чего происходит расширение газа при постоянном давлении до объема $V_2 = 4V_1$. Из получившегося состояния газ возвращают в начальное (p_1, V_1, T_1), причем так, что во время этого процесса $pV^n = \text{const}$. Определите показатель степени n.

Ответ: $n = -{}^1/_2$.

ТЕРМОДИНАМИКА

Примеры решения задач с кратким или развернутым ответом

1. Идеальный газ, масса которого m и молярная масса μ, расширяется изобарно при некотором давлении. Начальная температура газа T_1, конечная T_2. Определить работу, совершаемую газом.

Решение

Работа в изобарном процессе

$$A = p\Delta V = p(V_2 - V_1) = pV_2 - pV_1.$$

Из уравнения Менделеева—Клапейрона

$$pV_1 = \frac{m}{\mu}RT_1 \text{ и } pV_2 = \frac{m}{\mu}RT_2 \Rightarrow A = \frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu}R\Delta T.$$

Оказалось, что работу в изобарном процессе можно выразить не только через изменение объема по формуле $A = p\Delta V$, но и через изменение температуры: $A = \frac{m}{\mu}R\Delta T$.

Полученный результат следует иметь в виду, так как он часто используется при решении более сложных задач.

2. Гелий (He) нагревается при постоянном давлении. При этом ему сообщено Q = 20 кДж теплоты. Определить изменение внутренней энергии газа и совершенную им работу.

Решение

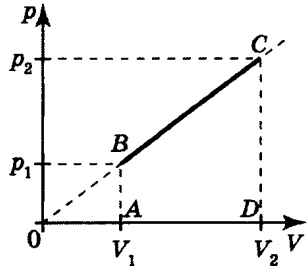
Так как по условию задачи p = const, то совершаемая газом работа $A = p\Delta V = (m/\mu)R\Delta T$, где m — масса газа, μ — его молярная масса, ΔT — изменение температуры.

Гелий — одноатомный газ, поэтому его внутренняя энергия $U = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT$, а ее изменение $\Delta U = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$. Сравнивая формулы для работы A и изменения внутренней энергии ΔU, получаем, что $\Delta U = \frac{3}{2}A$. Запишем первый закон термодинамики для этого процесса:

$$Q = \Delta U + A = \frac{3}{2}A + A = \frac{5}{2}A.$$

Следовательно, работа $A = (^2/_5)Q = 8$ кДж. Изменение внутренней энергии $\Delta U = (^3/_2)A = 12$ кДж.

3. Температура некоторой массы m идеального газа с молярной массой μ меняется по закону $T = \alpha V^2$, где $\alpha = \text{const} > 0$. Найти работу, совершенную газом при увеличении объема от V_1 до V_2. Поглощается или выделяется теплота при таком процессе?



Решение

Процесс $T = \alpha V^2$ не является ни изобарным, ни изохорным, ни тем более изотермическим. Запишем для любого состояния в этом процессе уравнение Менделеева—Клапейрона: $pV = (m/\mu)RT$. Так как $T = \alpha V^2$, то после подстановки получим зависимость давления от объема в виде $p(V) = \alpha(m/\mu)RV$. График этой зависимости представлен на рисунке.

Совершенная газом работа

$$A = S_{ABCD} = (p_1 + p_2)(V_2 - V_1)/2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\alpha\frac{m}{\mu}RV_1 + \alpha\frac{m}{\mu}RV_2\right)(V_2 - V_1) = \frac{\alpha}{2}\frac{m}{\mu}R(V_2^2 - V_1^2).$$

Для ответа на второй вопрос задачи воспользуемся первым законом термодинамики: $Q = \Delta U + A$. Так как газ расширяется, то его работа $A > 0$. Изменение внутренней энергии идеального газа пропорционально изменению температуры: $\Delta U \sim \Delta T$. Так как $T = \alpha V^2$ и объем возрастает, то возрастает и температура, поэтому $\Delta U > 0$. Тогда и $Q > 0$, что соответствует поглощению газом теплоты.

4. При адиабатном сжатии 1 моля одноатомного газа внешними силами была совершена работа A. Во сколько раз увеличилась среднеквадратичная скорость молекул этого газа, если начальная температура газа равна T_1?

Решение

Первый закон термодинамики для адиабатного процесса записывается в виде $0 = \Delta U + A'$, где ΔU — изменение внутренней энергии газа, A' — работа газа в этом процессе. Так как газ сжимают, то $A' < 0$, в то же время внешние силы совершают положительную работу A, причем $A' = -A$. Следовательно, $0 = \Delta U - A \Rightarrow A = \Delta U = U_2 - U_1$. Внутренняя энергия 1 моля идеального одноатомного газа $U = 3RT/2$, поэтому $A = 3RT_2/2 - 3RT_1/2$. Отсюда выражаем конечную температуру газа $T_2 = T_1 + 2A/(3R)$.

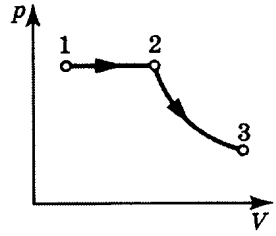
Средняя кинетическая энергия молекул $m_0\bar{v}^2/2 = 3k_Б T/2$, где T — температура. Тогда среднеквадратичная скорость

$$v = \sqrt{\frac{3k_Б T}{m_0}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \sqrt{1 + \frac{2}{3}\frac{A}{RT_1}}.$$

5. Какое количество теплоты получит 1 моль идеального одноатомного газа при изобарном нагревании от некоторой начальной температуры и последующем адиабатном расширении, если при адиабатном расширении

газ совершает работу A, а в конечном состоянии температура равна начальной?

Решение



Построим график зависимости давления от объема в осях p, V (см. рис.): 1—2 — изобарное нагревание, сопровождаемое увеличением объема; 2—3 — адиабатное расширение. Работа в адиабатном процессе

$$A = \Delta U = -(U_3 - U_2) = U_2 - U_3 =$$
$$= 3R(T_2 - T_3)/2 = 3R(T_2 - T_1)/2,$$

так как ($T_3 = T_1$).

Следовательно,

$$T_2 - T_1 = 2A/(3R). \qquad (1)$$

Количество теплоты, полученное газом в изобарном процессе:

$$Q = \Delta U + A_{1\text{-}2} = (U_2 - U_1) + \Delta pV =$$
$$= 3RT_2 - 3RT_1 + R(T_2 - T_1) =$$
$$= 3R(T_2 - T_1)/2 + R(T_2 - T_1) = 5R(T_2 - T_1)/2.$$

Подставляя из формулы (1) разность температур $T_2 - T_1$, находим, что

$$Q = \frac{5}{2}R \cdot \frac{2}{3}\frac{A}{R} = \frac{5}{3}A.$$

6. Масса m идеального газа, находящегося при температуре T, охлаждается изохорно так, что давление падает в n раз. Затем газ расширяется при постоянном давлении. В конечном состоянии его температура равна первоначальной. Молярная масса газа μ. Определить совершенную газом работу.

Решение

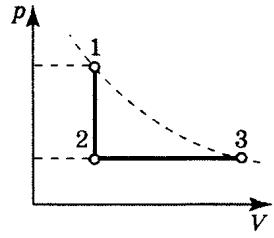


График указанного процесса приведен на рисунке. Здесь 1—2 — изохора, 2—3 — изобара. Искомая работа $A = A_{1-2} + A_{2-3}$, где A_{1-2} — работа на участке 1—2, а A_{2-3} — работа на участке 2—3. На участке 1—2 V — const, поэтому $A_{1-2} = 0$. На участке 2—3 $p =$ $=$ const и $A = A_{2-3} = p_2(V_3 - V_2)$. Выражения подобного вида преобразовывают так, чтобы выделить произведение давления на объем в состоянии, в котором задана температура:

$$A = p_2(V_3 - V_2) = p_3(V_3 - V_2) = p_3V_3(1 - V_2/V_3)$$

(здесь учтено, что $p_2 = p_3$).

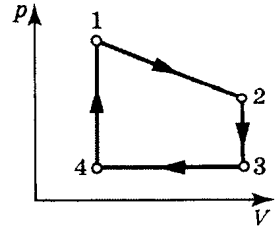
Из уравнения Менделеева—Клапейрона для состояния (3) находим, что

$$p_3V_3 = \{m/\mu)RT;\ A = (m/\ \mu)RT(1 - V_2/\ V_3 = \\ = (m/\ \mu))RT\{1 - V_1/V_3), \qquad (1)$$

так как $V_1 = V_2$. Из состояния 1 в состояние 3 можно переходить по изотерме 1—3 (в этом случае говорят, что точки 1 и 3 расположены на одной изотерме). По закону Бойля—Мариотта $p_1V_1 = p_3V_3 \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_3} = \dfrac{p_3}{p_1} = \dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{1}{n}$. После подстановки в формулу (1) получим

$$A = \frac{m}{\mu}RT\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

7. Один моль идеального газа изменяет свое состояние по циклу, изображенному на рисунке, где линии 4—1 и 2—3 — изохоры, 3—4 — изобара, 1—2 — процесс с линейной зависимостью давле-



ния от объема. Температуры в состояниях 1, 2, 3, 4 равны соответственно T_1, T_2, T_3, T_4. Какую работу совершает газ за один цикл?

Решение

В замкнутом процессе (цикле) работа равна площади фигуры, ограниченной графиком цикла, т.е.

$$A = S_{1-2-3-4} = \frac{(p_1 - p_2) + (p_2 - p_3)}{2}(V_3 - V_4) = \\ = \frac{p_1 + p_2 - 2p_3}{2}(V_3 - V_4),$$

так как $p_3 = p_4$.

В полученном выражении вынесем за скобки p_3 и V_3, тогда формула для работы перепишется в виде

$$A = \frac{p_3 V_3}{2}\left(\frac{p_1}{p_3} + \frac{p_2}{p_3} - 2\right)\left(1 - \frac{V_4}{V_3}\right). \qquad (1)$$

Для состояния 3 уравнение Менделеева—Клапейрона $p_3V_3 = RT_3$. По закону Шарля для участков 2—3 и 4—1 получаем $\frac{p_2}{p_3} = \frac{T_2}{T_3}$ и $\frac{p_1}{p_3} = \frac{p_1}{p_4} = \frac{T_1}{T_4}$. По закону Гей-Люссака для участка 3—4 находим $V_4/V_3 = T_4/T_3$. Подставляя найденные отношения в формулу (1) для работы, получаем

$$A = \frac{RT_1}{2}\left(\frac{T_1}{T_4} + \frac{T_2}{T_3} - 2\right)\left(1 - \frac{T_4}{T_3}\right) = \frac{R(T_3 - T_4)}{2}\left(\frac{T_1}{T_4} + \frac{T_2}{T_3} - 2\right).$$

8. Тепловая машина имеет КПД $\eta = 40\%$. Каким станет КПД машины, если количество теплоты, потребляемое за цикл, увеличится на 20%, а количество теплоты, отдаваемое холодильнику, уменьшится на 10%?

Решение

По определению

$$\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{Q_H - |Q_X|}{Q_H} = 1 - \frac{|Q_X|}{Q_H} = 0{,}4,$$

где Q_H — теплота, полученная от нагревателя, а $|Q_X|$ — теплота, отдаваемая холодильнику. Следовательно, отношение $|Q_X|/Q_H = 0{,}6$.

Во втором случае получаемая теплота $Q'_H = 1{,}2Q_H$ (возросла на 20%), а отдаваемая теплота $|Q'_X| = 0{,}9|Q_X|$ (уменьшилась на 10%). Новое значение КПД

$$\eta' = 1 - \frac{|Q'_X|}{Q'_H} = 1 - \frac{0{,}9|Q_X|}{1{,}2Q_H} = 1 - \frac{3}{4}\left(\frac{|Q_X|}{Q_H}\right) = 1 - \frac{3}{4}\cdot 0{,}6 = 0{,}55,$$

или 55%.

9. Найти коэффициент полезного действия тепловой машины, рабочим телом которой является 1 моль идеального одноатомного газа. Машина работает по циклу, изображенному на рисунке, где линии 1—2 — изохора, 3—1 — изобара.

Решение

Найдем температуру газа в состоянии 1, используя уравнение Менделеева—Клапейрона:

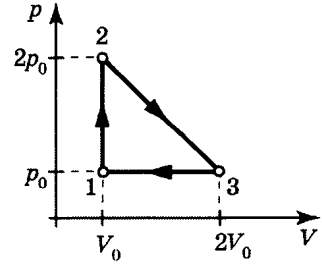
$$p_0V_0 = RT_1 \Rightarrow T_1 = p_0V_0/R.$$

Для состояния 2 получаем

$$2p_0V_0 = RT_2 \Rightarrow T_2 = 2p_0V_0/R.$$

В состоянии 3

$$2p_0V_0 = RT_3 \Rightarrow T_3 = 2p_0V_0/R.$$



Тот факт, что $T_2 = T_3$, вовсе не означает, что 2—3 — изотер-

мический процесс. Видно, что это — процесс, в котором давление зависит от объема по линейному закону.

Работа газа за цикл численно равна площади прямоугольного треугольника: $A = (2p_0 - p_0)(2V_0 - V_0)/2 = p_0V_0/2$.

Рассмотрим участок 1—2, где V_0 = const. Используя первый закон термодинамики, получаем, что количество теплоты на этом участке

$$Q_{1-2} = \Delta U = U_2 - U_1 = \frac{3}{2}RT_2 - \frac{3}{2}RT_1 = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) =$$
$$= \frac{3}{2}R\left(\frac{2p_0V_0}{R} - \frac{p_0V_0}{R}\right) = \frac{3}{2}p_0V_0 > 0.$$

Газ на этом участке теплоту получает. Рассмотрим участок 2—3. Первый закон термодинамики записывается в виде

$$Q_{2-3} = \Delta U + A_{2-3}. \qquad (1)$$

Изменение внутренней энергии на этом участке

$$\Delta U = U_3 - U_2 = 3R(T_3 - T_2)/2 = 0.$$

Работа на участке 2—3 численно равна площади трапеции, ограниченной графиком процесса и прямыми $V = V_0$ и $V = 2V_0$. Итак,

$$A_{2-3} = \frac{2p_0 + p_0}{2}(2V_0 - V_0) = \frac{3}{2}p_0V_0.$$

Подставляя это в формулу (1), находим, что $Q_{2\text{-}3} = 3p_0V_0/2 > 0$. И на этом участке газ теплоту получает.

Рассмотрим участок 3—1, где p_0 = const. Количество теплоты

$$Q_{3-1} = \Delta U + A_{3-1}.$$

Изменение внутренней энергии

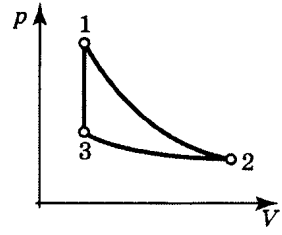
$$\Delta U = U_1 - U_3 = 3R(T_1 - T_3)/2 = -3p_0V_0/2.$$

Работа $A_{3\text{-}1} = p_0\Delta V = p_0\ (V_0 - 2V_0) = -p_0V_0$. Таким образом, $Q_{3\text{-}1} = -5p_0V_0/2 < 0$. На этом участке газ теплоту отдает. Теплота, полученная от нагревателя,

$$Q_H = Q_{1\text{-}2} + Q_{2\text{-}3} = 3p_0V_0/2 + 3p_0V_0/2 = 3p_0V_0.$$

Коэффициент полезного действия $\mu = A/Q_H = 1/6$ или $\mu = 16{,}7\%$.

10. Найти КПД тепловой машины, работающей с ν молями одноатомного идеального газа по циклу, состоящему из адиабатного расширения 1—2, изотермического сжатия 2—3 и изохорного процесса 3—1 (см. рис.). Работа, совершенная над газом в изотермическом процессе, равна A. Разность максимальной и минимальной температур газа в цикле равна ΔT.



Решение

Проследим за изменением температуры в этом цикле. При адиабатном расширении 1—2 температура газа уменьшается, поэтому $T_2 < T_1$. При изотермическом сжатии 2—3 температура постоянна, поэтому $T_3 = T_2$. На изохоре 3—1 температура возрастает, поэтому $T_1 > T_3$. Таким образом, максимальная температура в цикле T_1, а минимальная достигается на изотерме. Разность между максимальной и минимальной температурами $\Delta T = T_1 - T_2 = T_1 - T_3$.

По определению КПД тепловой машины $\eta = \Delta A_0/Q_H$, где A_0 — работа за цикл, а Q_H — теплота, полученная от нагревателя. Вычислить работу за цикл A_0 как площадь фигуры здесь не представляется возможным, так как в школе не изучают уравнение адиабатного процесса. Работу за цикл выразим как сумму работ на отдельных участках:

$$A_0 = A_{1-2} + A_{2-3} + A_{3-1}.$$

В адиабатном процессе 1—2 работа

$$A_{1-2} = -\Delta U = -(U_2 - U_1) = \frac{3}{2}\nu RT_1 - \frac{3}{2}\nu RT_2 =$$
$$= \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_2) = \frac{3}{2}\nu R\Delta T.$$

Количество теплоты в этом процессе $Q_{1-2} = 0$.

При изотермическом сжатии 2—3 работа газа отрицательна и равна работе внешних сил над газом, взятой со знаком минус, т.е. $A_{2-3} = -A$. Количество теплоты на этом участке $Q_{2-3} = \Delta U + A_{2-3}$, причем $\Delta U = 0$. Поэтому $Q_{2-3} = -A < 0$. Здесь газ теплоту отдает.

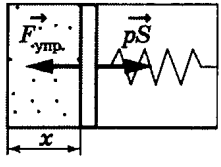
На изохоре 3–1 работа $A_{3-1} = 0$, а количество теплоты

$$Q_{3-1} = \Delta U = U_1 - U_3 = \frac{3}{2}\nu RT_1 - \frac{3}{2}\nu RT_3 =$$
$$= \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_3) = \frac{3}{2}\nu R\Delta T > 0;$$

на этом участке газ теплоту получает. Итак, работа за цикл $A_0 = (^3/_2)\nu R\Delta T - A$; теплота, полученная от нагревателя, $Q_H = Q_{3-1} = (^3/_2)\nu R\Delta T$. После этого легко находим

$$\eta = \frac{\frac{3}{2}\nu R\Delta T - A}{\frac{3}{2}\nu R\Delta T} = 1 - \frac{2}{3}\frac{A}{\nu R\Delta T}.$$

11. Теплоизолированный сосуд разделен на две части не проводящим тепло поршнем, который может перемещаться в сосуде без трения. В левой части сосуда находится 1 моль идеального одноатомного газа, а в правой — вакуум. Поршень соединен с



правой стенкой сосуда пружинкой, длина которой в свободном состоянии равна длине сосуда. Определить теплоемкость системы. Теплоемкостью сосуда, поршня и пружины можно пренебречь (см. рис.).

Решение

По определению теплоемкость $c = Q/\Delta T$, где Q — количество теплоты, сообщенное газу, а ΔT — изменение его температуры. Выражая Q через изменение внутренней энергии ΔT и термодинамическую работу A, получим

$$c = \frac{\Delta U + A}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{A}{\Delta T}. \quad (1)$$

$\Delta U/\Delta T = c_V$, и поскольку дан 1 моль идеального одноатомного газа, то $c_V = 3R/2$.

В результате нагревания газа поршень смещается на некоторое расстояние x. Пусть в этом состоянии давление газа p, температура T, а объем $V = Sx$, где S — площадь сечения поршня. Эти параметры связаны уравнением Менделеева—Клапейрона

$$pV = RT. \quad (2)$$

При этом на поршень действуют сила давления газа, pS и сила упругости пружины, модуль которой $F_{упр} = kx$, где k — коэффициент жесткости пружины, x — ее деформация. В любом равновесном состоянии выполняется равенство

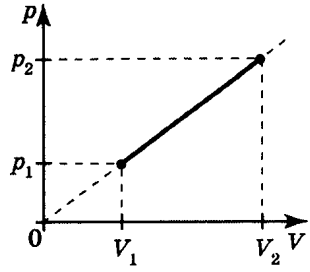
$$pS - F_{упр} = 0 \Leftrightarrow pS = kx. \quad (3)$$

Разделив равенство (2) на равенство (3), получим

$$\frac{V}{S} = \frac{RT}{kx} \Rightarrow \frac{Sx}{S} = \frac{RT}{kx} \Rightarrow T = \frac{kx^2}{R} = \frac{k}{R}\left(\frac{V}{S}\right)^2.$$

Подставляя это в равенство (2), находим зависимость давления от объема в этом процессе:

$$p(V)=\frac{RT}{V}=\frac{R}{V}\frac{k}{R}\left(\frac{V}{S}\right)^2=\frac{k}{S^2}V. \quad (4)$$



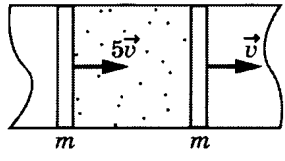
Как видно, зависимость эта линейная, ее график представлен на рисунке. Пусть газ расширяется от объема V_1 до объема V_2. Тогда его давление изменяется от $p_1 = kV_1/S^2$ до $p_2 = kV_2/S^2$. Работа газа численно равна площади трапеции с основаниями p_1 и p_2 и высотой $(V_2 - V_1)$. Итак,

$$A=\frac{(p_2+p_1)}{2}(V_2-V_1)=\frac{1}{2}\left(\frac{k}{S^2}V_2+\frac{k}{S^2}V_1\right)(V_2-V_1)=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{k}{S^2}(V_2^2-V_1^2)=\frac{1}{2}\left(\frac{k}{S^2}V_2^2-\frac{k}{S^2}V_1^2\right).$$

Из равенства (4) следует, что $\frac{k}{S^2}V^2=RT$, поэтому $A=\frac{RT_2-RT_1}{2}=\frac{R}{2}\Delta T$. В равенстве (1) отношение $A/\Delta T = R/2$, поэтому искомая теплоемкость $c = 3R/2 + R/2 = 2R$.

12. В длинной гладкой теплоизолированной трубе между двумя поршнями с одинаковой массой m находится 1 моль идеального одноатомного газа при температуре T_0. В начальный момент скорости поршней направлены в одну сторону и равны $5v$ и v. До какой максимальной температуры нагреется газ? Поршни тепло не проводят. Массой газа по сравнению с массой поршней можно пренебречь.

Решение



Система, состоящая из двух поршней и 1 моля идеального газа, в начальный момент времени обла-

дает энергией, равной сумме кинетических энергий поршней и внутренней энергии газа, т.е.

$$W_1 = m(5v)^2/2 + mv^2/2 + 3RT_0/2.$$

При этом начальный импульс системы направлен слева направо и его модуль равен $P_1 = 5mv + mv = 6mv$.

Так как начальная скорость левого поршня больше, чем правого, то газ между поршнями подвергается сжатию. При этом скорость правого поршня возрастает, а скорость левого — убывает. Так как система теплоизолирована, то сжатие газа приводит к росту его температуры. Отсюда следует, что температура перестает расти и достигает максимума в тот момент, когда прекращается сжатие, а это соответствует равенству скоростей поршней. Пусть скорость поршней в этот момент u.

Энергия системы

$$W_2 = \frac{mu^2}{2} + \frac{mu^2}{2} + \frac{3}{2}RT_{\max},$$

а ее импульс $p_2 = mu + mu = 2mu$.

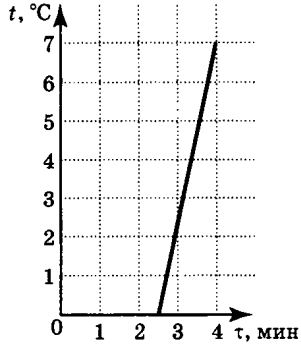
Используя закон сохранения импульса и энергии, получаем систему

$$\begin{cases} p_1 = p_2, \\ W_1 = W_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6mv = 2mu, \\ \dfrac{26mv^2}{2} + \dfrac{3}{2}RT_0 = \dfrac{2mu^2}{2} + \dfrac{3}{2}RT_{\max}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 3v, \\ 26mv^2 + 3RT_0 = 2mu^2 + 3RT_{\max}, \end{cases} \Rightarrow T_{\max} = T_0 + \frac{8mv^2}{3R}.$$

13. В калориметре плавает в воде кусок льда. В калориметр опускают нагреватель постоянной мощности $P = 50$ Вт и начинают ежеминутно измерять температуру воды. В течение первой и второй минут температура воды не изменяется, к концу третьей минуты уве-

личивается на $\Delta t_1 = 2°C$, а к концу четвертой — еще на $\Delta t_2 = 5°C$. Сколько граммов воды и льда было изначально в калориметре? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ Дж/г, удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ Дж/(г·°С).



Решение

Найдем зависимость температуры t от времени τ. Из условия задачи следует, что начальная температура воды и льда в калориметре $t = 0°C$. В течение некоторого времени температура в калориметре не изменяется, так как вся сообщаемая теплота идет на плавление льда. Лед растает в момент времени $\tau_x \geq 2$ мин, после чего в калориметре образуется вода, масса которой $m_л + m_В$, где $m_л$ и $m_В$ — начальное количество льда и воды в калориметре.

При $\tau > \tau_x$ время нагревания воды равно $\tau - \tau_x$, сообщенная нагревателем теплота $Q = P(\tau - \tau_x)$. Это количество теплоты идет на нагревание воды от 0°С до некоторой температуры t °С, поэтому $Q = c(m_л + mB)t°$. Получаем равенство

$$P(\tau - \tau_x) = c(m_л + m_B)t° \Rightarrow t° = \frac{P}{c(m_л + m_B)}\tau - \frac{P}{c(m_л + m_B)}\tau_x.$$

Таким образом, при $\tau > \tau_x$ температура воды в калориметре есть линейная функция от времени t. График зависимости $t(\tau)$ представлен на рисунке. Линейную зависимость на этом графике можно представить в виде $t(\tau) = k\tau + b$.

Так как известны две точки, принадлежащие этой прямой, то можно найти коэффициенты k и b этой зависимости. При $\tau = 3$ $t = 2$, при $\tau = 4$ $t = 7$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases}3k+b=2,\\4k+b=7,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=5,\\b=-13,\end{cases}\Rightarrow t(\tau)=5\tau-13.$$

Теперь легко определить момент времени τ_x, когда растает весь лед: $5\tau_x - 13 = 0 \Rightarrow \tau_x = 2{,}6$ мин.

Как уже отмечалось, при $\tau = \tau_x$ вся сообщаемая теплота $P\tau_x$ идет на плавление льда, поэтому $P\tau_x = \lambda m_л \Rightarrow m_л = P\tau_x/\lambda = 2{,}36\cdot10^{-2}$ кг $= 23{,}6$ г.

При $\tau = 3$ мин $= 180$ с имеем равенство

$$P(\tau-\tau_x)=c(m_л+m_B)\Delta t_1\Rightarrow m_B=\frac{P(\tau-\tau_x)}{c\Delta t_1}-m_л=$$

$$=119{,}3\cdot10^{-3}\text{ кг}=119{,}3\text{ г}.$$

(Напомним, что $\Delta t_1 = 2°C$.)

14. В герметически закрытом сосуде в воде плавает кусок льда массой $M = 0{,}1$ кг, в который вмерзла свинцовая дробинка массой $m = 5$ г. Какое количество тепла нужно затратить, чтобы дробинка начала тонуть? Теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3\cdot10^5$ Дж/кг. Температура воды в сосуде 0°C; плотность льда $\rho_л = 0{,}9\cdot10^3$ кг/м^3, плотность свинца $\rho_{Pb} = 11{,}3\cdot10^3$ кг/м^3, плотность воды $\rho_B = 10^3$ кг/м^3.

Решение

Дробинка начнет тонуть, если средняя плотность льда вместе с дробинкой станет равной или больше плотности воды: $\rho_{Pb} > \rho_B$. Пусть $M_л$ — масса оставшегося льда, тогда объем оставшегося куска $V = M_л/\rho_л + m/\rho_{Pb}$. Средняя плотность куска льда вместе с дробинкой

$$\rho_{ср}=\frac{M_л+m}{V}=\frac{M_л+m}{M_л/\rho_л+m/\rho_{св}}=\rho_B\Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_л=m\frac{1-\rho_B\rho_{св}}{\rho_B/\rho_л-1}=41\text{ г}.$$

Таким образом, должна растаять масса льда $M - M_л = 59$ г. Для этого необходимо сообщить количество теплоты $Q = \lambda(M - Mл) = 19{,}5\cdot10^3$ Дж.

15. В комнате объемом $V = 50$ м^3 воздух имеет температуру $t = 27$°C и относительную влажность $\varphi_1 = 30\%$. Сколько времени должен работать увлажнитель воздуха, распыляющий воду с производительностью $\alpha = 2$ кг/ч, чтобы относительная влажность в комнате повысилась до $\varphi_2 = 70\%$? Давление насыщенных паров при $t = 20$°C $p_H = 3565$ Па, молярная масса воды $\mu = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Решение

Относительная влажность воздуха $\varphi_1 = p_1/p_H = 0{,}3$. Здесь $p_1 = \varphi_1 p_H$ — давление ненасыщенных водяных паров. Запишем уравнение Менделеева—Клапейрона $p_1 V = (m/\mu)RT$, откуда масса водяных паров

$$m_1 = \frac{p_1 \mu V}{RT} = \frac{\varphi_1 p_H V \mu}{RT}.$$

После того как относительная влажность воздуха в комнате стала равна φ_2, давление водяных паров $p_2 = \varphi_2 pH$. Масса водяных паров увеличилась и стала равной

$$m_2 = \frac{\varphi_2 p_H V \mu}{RT}.$$

Следовательно, дополнительно испарилось $(m_2 - m_1)$ воды. Для этого потребовалось время

$$t = \frac{m_2 - m_1}{\alpha} = \frac{p_H V \mu}{\alpha RT}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0{,}26 \text{ ч} = 15{,}5 \text{ мин}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. В цилиндре под поршнем находится некоторая масса воздуха. На его нагревание идет 5 кДж тепла при постоянном давлении. Найдите работу, произведенную при этом газом. $c_p = 10^3$ Дж /(кг·К); $\mu = 29$ г/моль.

Ответ: 1,43 кДж.

2. В цилиндре сечением $S = 250$ см^2 находится $m = 10$ г азота, сжатого поршнем, на котором лежит гиря массой $M = 12{,}5$ кг. Какую работу совершит газ при нагревании его на $\Delta T = 600$ К. На сколько увеличится при этом объем газа? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

Ответ: 1780 Дж; $1{,}7 \cdot 10^{-2}$ м^3.

3. Двухатомный водород массой 2 кг при температуре 290 К охлаждают изохорически так, что его давление падает в 2 раза. Затем газ расширяют при постоянном давлении. Определите работу, совершенную газом, если в конечном состоянии его температура стала равной первоначальной.

Ответ: 1205 кДж.

4. Температура некоторой массы m идеального газа с молярной массой μ меняется по закону $T = \alpha V^2$. Найдите работу, совершенную газом при увеличении объема от V_1 до V_2. Поглощается или выделяется тепло при таком процессе?

Ответ: $mR\alpha(V^2_2 - V^2_1)/2\mu$.

5. Газ меняет свое состояние по закону $p = \alpha V$. Найдите работу, совершенную газом при изменении его давления от p_1 до p_2.

Ответ: $\alpha(V^2_2 - V^2_1)/2$.

6. Шарик массой 5 г и радиусом 15 мм погружен в воду на глубину 30 см. Когда его отпустили, он выпрыгнул из воды на высоту 10 см. Какая энергия перешла в тепло вследствие трения шарика о воду?

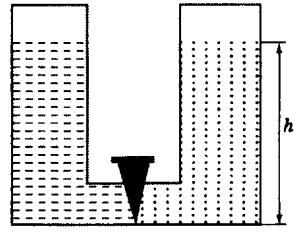
Ответ: $2{,}2 \cdot 10^{-2}$ Дж.

7. Два сосуда одинакового сечения $S = 10$ см^2 заполнены до высоты $h = 1$ м несмешивающимися жидкостями. Плотности жидкостей в сосудах $\rho_1 = 1$ г/см^3 и $\rho_2 = 2$ г/см^3. В тонкой трубке, соединяющей сосуды, от-

крывают кран. Какое количество тепла выделится при переходе системы в положение равновесия?

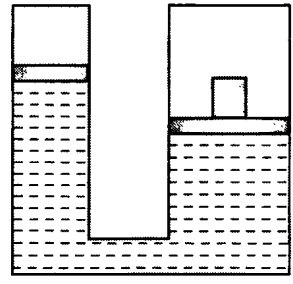
Ответ: 1,25 Дж.

8. Два сообщающихся сосуда с сечениями S_1 = 100 см^2 и S_2 = = 200 см^2 заполнены водой и закрыты легкими поршнями. Система находится в равновесии. В этом положении на больший поршень помещают гирю массой m = 1 кг. Какое количество тепла выделится в системе при переходе в новое положение равновесия?



Ответ: 0,08 Дж.

9. Моль идеального одноатомного газа переводится из начального состояния с температурой T = = 300 К в состояние, в котором его температура увеличилась в три раза, а объем уменьшился в два раза. Найдите подведенное к газу количество тепла. Известно, что из всех путей перевода газа из начального состояния в конечное, на которых давление не падает ниже начального, был выбран путь, на котором над газом совершена минимальная работа.



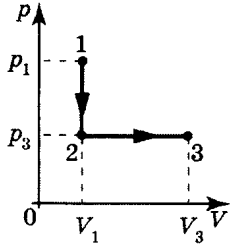
Ответ: 6225 Дж.

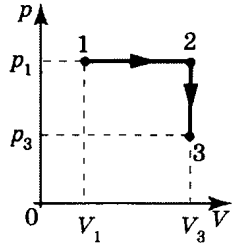
10. Идеальный газ массой m, имеющий начальную температуру T_1, участвует в процессе, для которого выполняется условие: $p_1 V^n{}_1 = p_2 V^n{}_2$, где n — известный по-

казатель степени. Определите количество теплоты, подведенное к газу в таком процессе, если объем газа уменьшился в k раз. Удельная теплоемкость газа в этом процессе C.

Ответ: $CmT_1\ (k^{n-1} - 1)$.

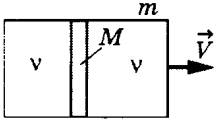
11. Идеальный одноатомный газ участвует в процессах, переводящих его из состояния 1 в 3. В каком из процессов газу сообщается большее количество теплоты и насколько больше, если известны V_1 и V_3, p_1 и p_3.





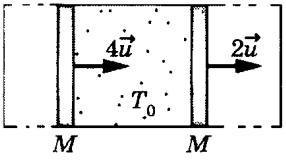
Ответ: $V_1\ (2p_3 - p_1) - p_3V_3$.

12. Закрытый с торцов теплоизолированный цилиндр перегорожен поршнем массой M. С обеих сторон от поршня находится по 1 молю идеального газа, внутренняя энергия которого $U = cT$. Масса цилиндра с газом m. Коротким ударом цилиндру сообщают скорость V, направленную вдоль оси цилиндра. На сколько изменится температура газа после затухания колебаний поршня? Трением и теплоемкостью поршня пренебречь.



Ответ: $\Delta T = MmV^2/(4c(M + m))$.

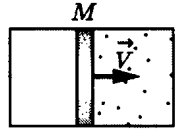
13. В длинной закрытой трубке между двумя поршнями массой M каждый находится идеальный газ, масса которого много



меньше массы поршней, в остальном пространстве трубы — вакуум. В начальный момент правый поршень имеет скорость $2u$, левый — $4u$. Найдите максимальную температуру газа, если стенки трубки и поршня теплонепроницаемы. Температура газа в начальный момент T_0. Внутренняя энергия моля газа $U = cT$.

Ответ: $T = T_0 + (2Mu^2/3R)$.

14. Поршень массой M, замыкающий объем V_0 одноатомного газа при давлении p_0 и температуре T_0, движется со скоростью V. Определите температуру газа при максимальном сжатии. Масса газа много меньше массы поршня. Система теплоизолирована, теплоемкостями поршня и сосуда пренебречь.



Ответ: $T_0(1 + MV^2/3p_0V_0)$.

15. Пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью V, попадает в брусок массой M и застревает в нем. Брусок лежит на гладкой горизонтальной плоскости и соединен с вертикальной стенкой пружиной с жесткостью k. Найдите количество теплоты Q, выделяющееся в данной системе. Считать, что время проникновения пули в брусок много меньше времени деформации пружины.

Ответ: $mMV^2/(2(M + m))$.

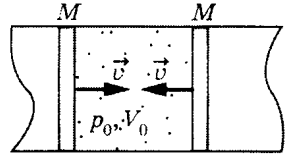
16. Внутренняя энергия U некоторой массы одноатомного газа при температуре $t = 32°C$ равна 1,0 Дж. Сколько молекул содержит эта масса газа?

Ответ: $2UN_A/3RT = 1{,}5 \cdot 10^{20}$.

17. Один моль идеального одноатомного газа расширяется по политропическому закону: pV^3 — const от V_1 до V_2. Определите изменение внутренней энергии газа, если первоначальное давление его p_1.

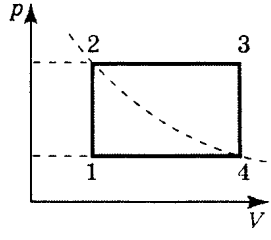
Ответ: $\Delta U = \frac{3}{2}\frac{p_1 V_1}{V_2^2}(V_1^2 - V_2^2)$.

18. В трубе между двумя поршнями массой M каждый находится моль идеального одноатомного газа, масса которого много меньше массы поршней. В начальный момент значения параметров тела равны p_0, V_0, а поршни имеют равные по величине скорости v, направленные навстречу друг другу. Определите максимальную температуру газа при дальнейшем движении поршней по инерции. Система теплоизолирована; теплоемкостями поршней и трубы, внешним давлением пренебречь.



Ответ: $T_{max} = \frac{p_0 V_0}{R} + \frac{2MV^2}{3R}$.

19. Над молем идеального газа совершают замкнутый цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Температуры в точках 1 и 3 равны T_1 и T_3. Определите работу, совершенную газом за цикл, если известно, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.



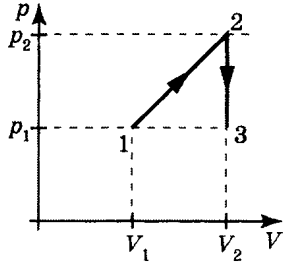
Ответ: $A = R(T_1 + T_3) - 2\sqrt{T_1 T_3}$.

20. Одноатомный идеальный газ в количестве ν молей нагревают в цилиндре под поршнем так, что температура и давление связаны соотношением $T = \alpha p^2$, где $\alpha > 0$ —

известная постоянная. Какое количество теплоты нужно подвести к газу, чтобы его давление увеличилось от p_1 до p_2?

Ответ: $2\nu R\alpha(p^2{}_2 - p^2{}_1)$.

21. Идеальный одноатомный газ в количестве ν молей участвует в процессе 1—2—3, изображенном на рисунке. Найдите количество теплоты, подведенное к газу в этом процессе, считая известными V_1 и V_2, p_1 и p_2.



Ответ: $Q = (V_2 - V_1)\times$
$\times(4p_1 + p_2)/2$.

22. В процессе расширения азота его объем увеличился на 2%, а давление уменьшилось на 1%. Какая часть теплоты, полученная азотом, была превращена в работу? c = 745 Дж/кг·К.

Ответ: 44%.

23. КПД идеального теплового двигателя равен 30%. Чему равна температура нагревателя, если температура холодильника равна 7°С?

Ответ: 400 К.

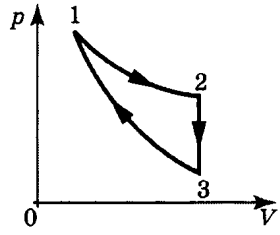
24. КПД теплового двигателя равен 40%. Во сколько раз количество теплоты, полученное двигателем от нагревателя, больше количества теплоты, отданной холодильнику?

Ответ: 1,67.

25. Двигатель работает как машина Карно и за цикл получает от нагревателя количество теплоты Q = 2,094 кДж. Температура нагревателя T_2 = 600 К, температура охладителя T_2 = 300 К. Найдите работу, совершенную двигателем за цикл.

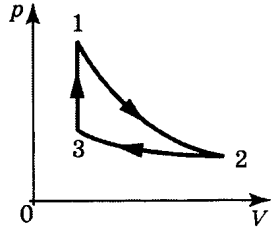
Ответ: 1047 Дж.

26. КПД тепловой машины, работающей по циклу, состоящему из изотермы 1—2, изохоры 2—3 и адиабаты 3—1, равен η, а разность максимальной и минимальной температур газа в цикле равна ΔT. Найдите работу, совершенную одним молем одноатомного идеального газа в изотермическом процессе.



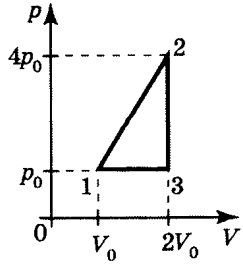
Ответ: $A = \frac{3}{2} \cdot \frac{R\Delta T}{1-\eta}$.

27. Найдите КПД тепловой машины, работающей с ν моль одноатомного идеального газа по циклу, состоящему из адиабатного расширения 1—2, изотермического сжатия 2—3 и изохорического процесса 3—1. Работа, совершенная над газом в изотермическом процессе, равна A. Разность максимальной и минимальной температур газа в цикле равна ΔT.



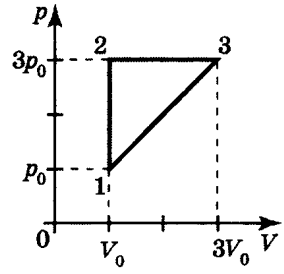
Ответ: $\eta = 1 - \frac{2A}{3\nu R\Delta T}$.

28. На p-V-диаграмме изображен цикл, проводимый с одноатомным идеальным газом. Определите КПД этого цикла.



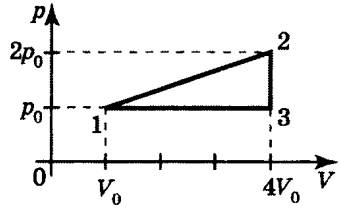
Ответ: η = 11,5%.

29. На p-V диаграмме изображен цикл, проводимый с одноатомным идеальным газом. Определите КПД этого цикла.



Ответ: $\eta = 11\%$.

30. На p-V-диаграмме изображен цикл, проводимый с одноатомным идеальным газом. Определите коэффициент полезного действия этого цикла.



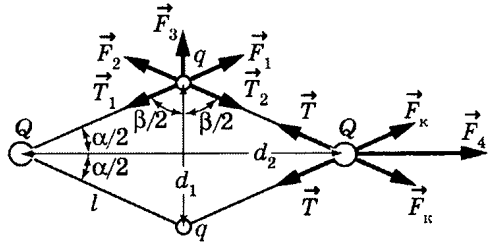
Ответ: $\eta = \dfrac{3\nu RT_0}{2 \cdot 15\nu RT_0} \cdot 100\% = 10\%$.

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ И МАГНИТНОЕ ПОЛЯ

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Примеры решения задач с кратким или развернутым ответом

1. Четыре положительных заряда q, Q, q, Q связаны четырьмя нитями одинаковой длины, как показано на рисунке. Определить углы между нитями.



Решение

Так как нити имеют одинаковую длину l, то заряды расположены в вершинах ромба, углы которого α и β. По теореме косинусов меньшая диагональ ромба

$$d_1^2 = 2l^2 - 2l^2\cos\alpha = 2l^2(1-\cos\alpha) = 4l^2\sin^2(\alpha/2).$$

Аналогично выражаем большую диагональ

$$d_2^2 = 2l^2 - 2l^2\cos\beta = 4l^2\sin^2(\beta/2).$$

На заряд q действуют кулоновские силы F_1 и F_2 со стороны зарядов Q. Модули этих сил одинаковы, и по закону Кулона

$$F_1 = F_2 = F_k = k\frac{|q||Q|}{l^2} = k\frac{qQ}{l^2}\ (|q| = q,\ |Q| = Q),$$

так как по условию $Q > 0$ и $q > 0$. Кроме того, на заряд q действует сила отталкивания F_3 со стороны другого заряда q, причем

$$F_3 = k\frac{q^3}{d_1^2} = k\frac{q^2}{4l^2\sin^2(\alpha/2)}.$$

И наконец, к заряду q приложены силы натяжения нитей T_1 и T_2, модули которых равны T, что является следствием симметрии рассматриваемой системы. Проецируя указанные силы на меньшую диагональ и учитывая, что заряд q находится в равновесии, получаем уравнение

$$2F_k\cos(\beta/2) + F_3 - 2T\cos(\beta/2) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_3 = 2(T - F_k)\cos(\beta/2). \qquad (1)$$

К заряду Q со стороны зарядов q приложены: две одинаковые по модулю силы $F_k = kqQ/l^2$, две силы натяжения нити, модули которых равны T, и сила отталкивания F_4 со стороны другого заряда Q, причем

$$F_4 = k\frac{Q^2}{d_2^2} = k\frac{Q^2}{4l^2\sin^2(\beta/2)}.$$

Проецируя эти силы на большую диагональ, получим

$$2F_k\cos(\alpha/2) + F_4 - 2T\cos(\alpha/2) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_4 = 2(T - F_k)\cos(\alpha/2). \qquad (2)$$

Разделим уравнение (1) на уравнение (2), тогда

$$\frac{F_3}{F_4} = \frac{\cos(\beta/2)}{\cos(\alpha/2)}.$$

Подставляя значения F_3 и F_4, получаем

$$\frac{q^2\sin^2(\beta/2)}{Q^2\sin^2(\alpha/2)} = \frac{\cos(\beta/2)}{\cos(\alpha/2)}.$$

Так как

$$\beta+\alpha=\pi,\ \frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2} \text{ и } \cos\frac{\beta}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\text{а } \sin^2\frac{\beta}{2}=\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Тогда

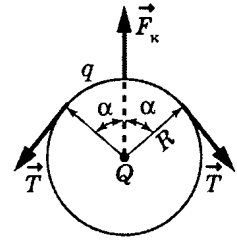
$$\frac{q^2\cos^2(\alpha/2)}{Q^2\sin^2(\alpha/2)}=\frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}\Rightarrow\left(\frac{q}{Q}\right)^2=\mathrm{tg}^3(\alpha/2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}(\alpha/2)=\sqrt[3]{(q/Q)^2}=(q/Q)^{2/3}\Rightarrow\alpha/2=\mathrm{arctg}(q/Q)^{2/3}$$

$$\text{и } \beta=\pi-\alpha.$$

2. Тонкое проволочное кольцо радиусом R несет электрический заряд q. В центре кольца расположен одноименный с q заряд Q, причем $Q >> q$. Определить силу, растягивающую кольцо.

Решение



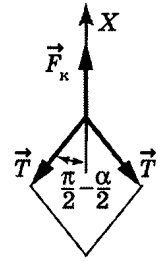
Так как $q << Q$, то можно взаимодействием между отдельными элементами кольца пренебречь и рассматривать взаимодействие только между элементами кольца и зарядом Q. Выделим на кольце точечный заряд Δq, расположенный на дуге кольца, соответствующей малому углу α, тогда

$$\Delta q=\frac{q}{2\pi}\alpha.$$

На элемент кольца действуют со стороны заряда Q кулоновская сила отталкивания F_K:

$$F_k=k\frac{|\Delta q||Q|}{R^2}=k\frac{|q||Q|}{2\pi R^2}\alpha,$$

и силы T, растягивающие кольцо (см. рис.). Записав условие равновесия на ось X, получим



$$F_k = -2T\cos(\pi/2-\alpha/2) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_k = 2T\sin(\alpha/2) = 0.$$

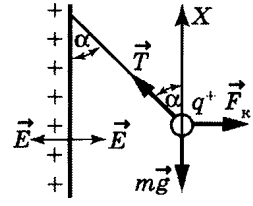
Так как угол α мал, то $\sin(\alpha/2) = \alpha/2$ и последнее уравнение запишется в виде

$$k\frac{|q||Q|}{2\pi R^2}\alpha - 2T\frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow T = k\frac{|q||Q|}{2\pi R^2}.$$

3. На вертикальной пластине больших размеров равномерно распределен электрический заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 3\cdot10^{-6}$ Кл/м^2. На прикрепленной к пластине нити подвешен маленький шарик массой $m = 2$ г, несущий заряд того же знака, что и пластина. Найти заряд шарика, если нить образует с вертикалью угол $\alpha = 45°$.

Решение

Пластина создает однородное поле, напряженность которого $E = \sigma/(2\varepsilon_0)$. Поле действует на заряд q с силой $F_k = F_q = q\sigma/(2\varepsilon_0)$. Кроме того, на заряд действуют сила тяжести mg и сила натяжения нити T. Вводим оси X и Y и записываем условия равновесия:

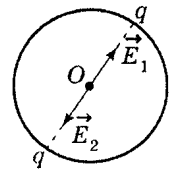


$$\begin{cases} F_k - T\sin\alpha = 0, \\ T\cos\alpha - mg = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T\sin\alpha = F_k, \\ T\cos\alpha = mg, \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{F_k}{mg} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg\operatorname{tg}\alpha = q\sigma/(2\varepsilon_0) \Rightarrow (2\varepsilon_0 mg\operatorname{tg}\alpha)/\sigma = 1{,}2\cdot10^{-7} \text{ Кл}.$$

4. По кольцу радиусом R равномерно распределен заряд Q. Определить напряженность и потенциал в центре кольца, а также в точке, отстоящей на расстоянии h от центра кольца по перпендикуляру к его плоскости.

Решение



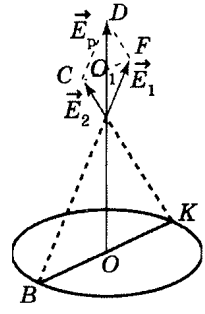
Будем считать, что $Q > 0$. Заряд, распределенный по кольцу, нельзя назвать точечным на небольших расстояниях от кольца. Разобьем заряд Q на точечные заряды $q = Q/N$, где N — число этих зарядов. Каждый точечный заряд создает в центре кольца напряженность, модуль которой $E = kq/R^2$.

1. Два точечных заряда, расположенных на концах одного диаметра, создают в центре кольца напряженность $E = E_1 + E_2 = 0$. Применив аналогичный прием ко всем точечным зарядам, находящимся на кольце, находим, что напряженность в центре кольца $E_0 = 0$.

Каждый заряд q в центре кольца создает потенциал $\varphi = kq/R$, по принципу суперпозиции $\varphi_0 = N\varphi = Nkq/R = kQ/R$.

2. Пусть $AO = h$. В точке A диаметрально противоположные точечные заряды создают напряженности $E_1 = E_2 = kq/(AB)^2 = kq/(R^2 + h^2)$, $\vec{E}_p = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

Четырехугольник $ACDF$ — ромб, поэтому $\angle CAD = \angle DAF = \angle BAO = \angle KAO$, т.е. вектор $\vec{E}_p$ направлен вдоль AO; $E_p = 2AO_1 = 2E_1 \cos\angle CAD$.



Из $\angle BAO$: $\cos\angle BAO = \cos\angle CAD = AO/AB = h/\sqrt{R^2+h^2}$.

Поэтому $E_p = 2E_1 h/\sqrt{R^2+h^2}$. Следующая пара точечных зарядов дает такой же вектор $\vec{E}_p$, и так далее. В точке A получим $N/2$ векторов E_p.

Следовательно,

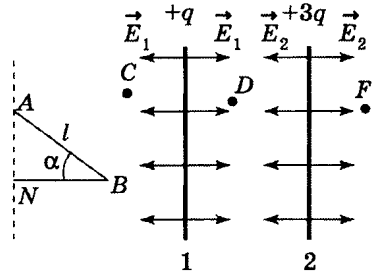
$$E_A = \frac{N}{2}E_p = \frac{N}{2}2E_1\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} = Nk\frac{q}{R^2+h^2}\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} = k\frac{Qh}{(R^2+h^2)^{3/2}}.$$

Каждый заряд q создает в точке A потенциал

$$\varphi = kq/\sqrt{R^2+h^2}.$$

Потенциал точки A: $\varphi_A = N\varphi = kQ/\sqrt{R^2+h^2}$.

5. Две плоские одинаковые пластины, площадью S каждая, находятся на расстоянии d, малом по сравнению с их размерами. На одной из пластин находится заряд $+q$, на другой $+3q$. Определить: 1) силу взаимодействия между пластинами; 2) напряженность электрического поля, создаваемого этой системой; 3) разность потенциалов между пластинами; 4) работу по перемещению заряда Q из точки A в точку B, если $AB = l$ и задан угол α между AB и нормалью к пластинам.



Решение

1. Пластина 1 создает по обе стороны однородное поле, модуль напряженности которого $E_1 = \sigma_1/(2\varepsilon_0) = q/(2\varepsilon_0 S)$. Пластина 2 создает поле с напряженностью $E_2 = \sigma_2/(2\varepsilon_0) = 3q/(2\varepsilon_0 S)$. Распределенный на пластине 2 заряд $3q$ находится в однородном поле с напряженностью E_1. Разобьем заряд $3q$ на точечные заряды Δq_i. Сила, действующая на заряд Δq_i, равна $F_i = \Delta q E_1$. На заряд $3q$ действует сила

$$F_k = \sum \Delta q_i E_1 = E_1 \sum \Delta q_i = E_1 \cdot 3 = \frac{q}{2\varepsilon_0 S} 3q = \frac{3q^2}{2\varepsilon_0 S}.$$

По третьему закону Ньютона такая же по модулю сила действует на пластину 1. Итак, между пластинами действует сила отталкивания $F_k = 3q^2/(2\varepsilon_0 S)$.

2. В соответствии с принципом суперпозиции напряженность поля в любой точке $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

В точке C (слева от пластины 1)

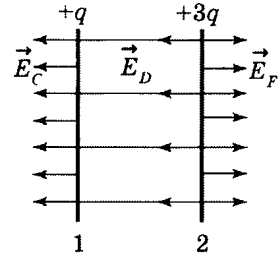
$$E_C = E_1 + E_2 = \frac{q}{2\varepsilon_0 S} + \frac{3q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q}{\varepsilon_0 S}.$$

В точке D (между пластинами)

$$E_D = E_2 - E_1 = \frac{3q}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q}{\varepsilon_0 S}.$$

В точке F (справа от пластины 2) $E_F = E_1 + E_2 = \dfrac{2q}{\varepsilon_0 S}$.

Результирующее поле представлено на рисунке.



3. Так как поле между пластинами однородно, то разность потенциалов между пластинами

$$u = E_D d = qd/(\varepsilon_0 S).$$

4. Работа электростатических сил при перемещении заряда Q из точки A в точку B $A = Q(\varphi_A - \varphi_B)$. Точки A и N расположены на одной эквипотенциальной поверхности, т.е. $\varphi_A = \varphi_B$. Вместе с тем $\varphi_A < \varphi_B$, так как потенциал электростатического поля убывает в направлении силовых линий. Значит:

$$\varphi_B = \varphi_N = E_C(X_N - X_B) = E_C l \cos\alpha,$$

$$\varphi_A - \varphi_B = \varphi_N - \varphi_B = -(\varphi_B - \varphi_N) = -E_C l \cos\alpha.$$

$$A = -QE_C l \cos\alpha = -\frac{2qQ}{\varepsilon_0 S} l \cos\alpha.$$

Если q и Q одного знака, то $A < 0$, т.е. при перемещении заряда из A в B необходимо совершать работу против сил электростатического поля.

6. Две заряженные частицы, массы которых равны m, а заряды q, движутся из бесконечности навстречу друг другу со скоростями v и $2v$. Найти минимальное расстояние, на которое могут сблизиться частицы. Гравитационное взаимодействие не учитывать.

Решение

В процессе сближения на частицы действуют кулоновские силы отталкивания, что приводит к уменьшению скоростей частиц. Так как модули начальных скоростей различны, то минимальное расстояние $r_{\min}$ между частицами будет в тот момент, когда их относительная скорость обратится в нуль. Это соответствует тому, что частицы в этот момент имеют одинаковые скорости $u \neq 0$. Так как частицы образуют замкнутую систему, то ее импульс сохраняется, т.е. $P_1 = P_2$, где $P_1 = 2mv - mv = mv$ — начальный импульс системы, а $P_2 = mu + mu = 2mu$ — конечный импульс. Так как на частицы в процессе сближения действуют только кулоновские силы отталкивания, являющиеся консервативными, то механическая энергия системы сохраняется, т.е. $W_1 = W_2$.

$W_1 = mv^2/2 + m(2v)^2/2 = 5mv^2/2$ — начальная механическая энергия системы.

$W_2 = mu^2/2 + mu^2/2 + kq^2/r_{\min}$ — конечная механическая энергия системы. Получаем систему

$$\begin{cases} mv = 2mu, \\ \dfrac{5mv^2}{2} = mu^2 + k\dfrac{q^2}{r_{\min}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = v/2, \\ \dfrac{5mv^2}{2} = \dfrac{mv^2}{4} + k\dfrac{q^2}{r_{\min}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9mv^2}{4} = k\frac{q^2}{r_{\min}} \Rightarrow r_{\min} = \frac{4kq^2}{9mv^2}.$$

7. На тонком закрепленном кольце радиусом R равномерно распределен положительный заряд $q > 0$. Какую наименьшую скорость нужно сообщить находя-

щейся в центре кольца частице массой m с отрицательным зарядом $-q$, чтобы она могла удалиться от кольца в бесконечность?

Решение

В центре кольца механическая энергия заряженной частицы складывается из ее кинетической энергии и потенциальной энергии, которой она обладает в электростатическом поле, создаваемом зарядом, распределенным по кольцу, т.е. $W_1 = mv^2_0/2 + (-q)\varphi_0$, где v_0 — скорость частицы в центре кольца, φ_0 — потенциал поля в этой точке. На очень большом расстоянии от кольца электростатическое поле практически не действует на частицу, т.е. ее потенциальная энергия обращается в нуль. Минимальная начальная скорость частицы соответствует тому, что, замедляясь под действием притяжения к кольцу, частица на бесконечности будет иметь скорость, равную нулю. Следовательно, на бесконечности механическая энергия частицы $W_2 = 0$.

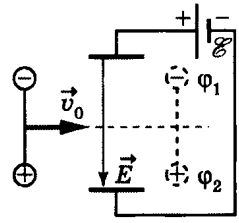
По закону сохранения механической энергии

$$W_1 = W_2 \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} - q\varphi_0 = 0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2q\varphi_0/m}. \qquad (1)$$

Потенциал электростатического поля, создаваемого зарядом q, который распределен по кольцу, в центре этого кольца составляет $\varphi_0 = kq/R$. Подставляя это в формулу (1), окончательно получаем $v_0 = q\sqrt{2k/(mR)}$.

8. Электрический диполь из двух жестко связанных зарядов $+q$ и $-q$ ($q > 0$), расположенных на расстоянии L друг от друга, пролетает плоский конденсатор, пластины которого подключены к источнику с постоянной ЭДС ξ. Определить скорость диполя в центре конденсатора, если известно, что его скорость вдали от конденсатора равна v_0. Расстояние между пластинами конденсатора d, масса диполя m.

Решение



Механическая энергия диполя вдали от конденсатора, где электрическое поле отсутствует, равна его кинетической энергии: $W_1 = mv^2_0/2$. В центре конденсатора, где электрическое поле однородно, механическая энергия диполя складывается из его кинетической энергии и потенциальной энергии в электрическом поле, т.е.

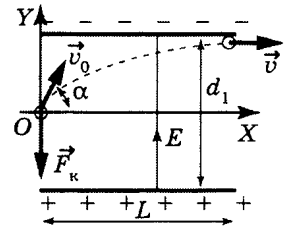
$$W_2 = mv^2/2 + (-q)\varphi_1 + q\varphi_2).$$

Здесь v — искомая скорость, φ_1 и φ_2 — потенциалы точек поля, в которых в рассматриваемый момент находятся заряды $-q$ и $+q$. Отметим, что $-q\varphi_1 + q\varphi_2 = -q(\varphi_1 - \varphi_2)$, причем $\varphi_1 > \varphi_2$, ибо вектор напряженности $\vec{E}$ в любом электростатическом поле указывает направление, в котором потенциал поля убывает. Тогда $\varphi_1 - \varphi_2 = EL$, где напряженность однородного поля $E = \xi/d$. Итак, $W_2 = \frac{mv^2}{2} - q\frac{\xi}{d}L$. По закону сохранения механической энергии

$$W_1 = W_2 \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - q\frac{\xi}{d}L \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2q\xi L}{md}}.$$

9. В плоский конденсатор длиной $L = 5$ см влетает электрон под углом $\alpha = 15^\circ$ к пластинам. Электрон обладает энергией $W = 2{,}4\cdot10^{-16}$ Дж. Расстояние между пластинами $d = 1$ см. Определить напряжение на пластинах конденсатора u, при котором электрон при выходе из пластин будет двигаться параллельно им.

Решение



Пусть v_0 — начальная скорость электрона. Его энергия

$$W = \frac{mv_0^2}{2},$$

где m — масса электрона. На электрон действует со стороны поля сила $Fk = |e|E$, где E — напряженность поля.

В подобных задачах действием сил тяжести на элементарные частицы можно пренебречь. Разложим сложное движение электрона на два простых: вдоль оси X, параллельной пластинам, и вдоль оси Y, перпендикулярной пластинам. Начало системы координат 0 поместим в точке влета электрона в конденсатор. Начальные координаты электрона $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; его начальные скорости $v_{0x} = v_0\cos\alpha$, $v_{0y} = v_0\sin\alpha$. Проекция ускорения $a_x = 0$, следовательно, в направлении X движение является прямолинейным равномерным. Ускорение $a_y = -Fk/m = |e|E/m = \text{const}$. Следовательно, движение по оси Y является равнопеременным.

Законы движения по оси X:

$$v_x(t) = v_0\cos\alpha,\ x(t) = x_0 + v_{0x}t = v_0\cos\alpha\cdot t.$$

Законы движения по оси Y:

$$v_y(t) = v_{0y} + a_y t = v_0\sin\alpha - \frac{|e|E}{m}t,$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2} = v_0\sin\alpha t - \frac{|e|Et^2}{2m}.$$

Исключив из второго уравнения время $t = x/(v_0\cos\alpha)$ и подставив его в последнее, получим

$$y = v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{|e|E}{2m} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} =$$

$$= x \operatorname{tg}\alpha - \frac{|e|E}{2mv_0^2 \cos^2\alpha} x^2.$$

Это уравнение параболы. Мы доказали, что заряженная частица, влетевшая под углом к силовым линиям однородного поля, будет двигаться в этом поле по параболе.

В точке вылета $v_y = 0$, $x = L$, поэтому

$$\begin{cases} v_0 \sin\alpha - (|e|E/m)t = 0, \\ v_0 \cos\alpha t = L. \end{cases}$$

Выразим из последнего уравнения время пролета электрона через конденсатор: $t = L/(v_0\cos\alpha)$. Из первого уравнения этой системы найдем напряженность поля в конденсаторе:

$$E = \frac{mv_0 \sin\alpha}{|e|t} = \frac{mv_0 \sin\alpha}{|e|L/(v_0 \cos\alpha)} = \frac{mv_0^2}{2|e|L} 2\sin\alpha\cos\alpha =$$

$$= \frac{mv_0^2}{2} \frac{1}{|e|L} \sin 2\alpha = \frac{W}{|e|L} \sin 2\alpha.$$

Напряжение на пластинах $u = Ed$, т.е.

$$u = \frac{dW}{L|e|} \sin 2\alpha = 150 \text{ В}.$$

10. Два конденсатора, емкости которых C_1 и C_2, соединены последовательно и подключены к источнику с напряжением u. Определить напряжение на конденсаторах.

Решение

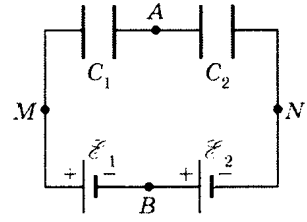
Пусть u_1 и u_2 — напряжения на конденсаторах, тогда заряды на них равны C_1u_1 и C_2u_2. Используя свойства по-

следовательного соединения конденсаторов, получим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1u_1 = C_2u_2, \\ u_1 + u_2 = u, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = (C_1/C_2)u_1, \\ u_1 + (C_1/C_2)u_1 = u, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = C_2u/(C_1 + C_2), \\ u_2 = C_1u/(C_1 + C_2). \end{cases}$$

11. Определить разность потенциалов между точками A и B в схеме, изображенной на рисунке.

Решение



Проставим дополнительно точки M и N на схеме. Конденсаторы C_1 и C_2 соединены последовательно, напряжение на них равно разности потенциалов между точками M и N: $\varphi_M - \varphi_N = u$. В нашей задаче

$$\begin{cases} \varphi_M - \varphi_B = \xi_1, \\ \varphi_B - \varphi_N = \xi_2. \end{cases}$$

После сложения этих уравнений найдем, что $\varphi_M - \varphi_N = \xi_1 + \xi_2 = u$.

Напряжение на конденсаторе C_1 $\varphi_M - \varphi_A = u_1$. Напряжение на конденсаторе C_2 $\varphi_A - \varphi_N = u_2$. Тогда по свойствам последовательного соединения конденсаторов можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = u = \xi_1 + \xi_2, \\ C_1u_1 = C_2u_2. \end{cases}$$

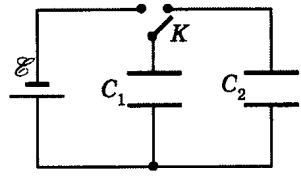
Найдем

$$u_1 = (\xi_1 + \xi_2)C_2/(C_1 + C_2) \text{ и } u_1 = (\xi_1 + \xi_2)C_2/(C_1 + C_2).$$

Итак,

$$\begin{cases} \varphi_M - \varphi_B = \xi_1, \\ \varphi_M - \varphi_A = u_1 \end{cases} \Rightarrow \varphi_A - \varphi_B = \xi_1 - u_1 = \frac{\xi_1C_1 - \xi_2C_2}{C_1 + C_2}.$$

12. Конденсатор емкостью C_1 при помощи переключателя K присоединяют сначала к батарее с ЭДС ξ, а потом к незаряженному конденсатору емкостью C_2. Найти заряд, который появится на конденсаторе C_2.



Решение

Пусть ключ K находится в левом положении, тогда конденсатор C_1 подсоединен к источнику ЭДС; конденсатор C_2 от источника отключен. Конденсатор C_1 заряжается до напряжения ξ, его заряд $q_0 = C_1\xi$.

Перебросив ключ в правое положение, мы отсоединяем источник от конденсаторов, образуется замкнутая цепь из двух конденсаторов C_1 и C_2. Конденсатор C_1 будет разряжаться, конденсатор C_2 — заряжаться. Процесс перераспределения зарядов происходит до тех пор, пока потенциалы верхних и нижних пластин конденсаторов не станут равными. Значит, и разности потенциалов (напряжения) на конденсаторах равны: $u_1 = u_2 = u$. На конденсаторе C_1 останется заряд C_1u, а на конденсаторе C_2 появится заряд C_2u. После отключения источника конденсаторы образуют замкнутую систему. По закону сохранения заряда

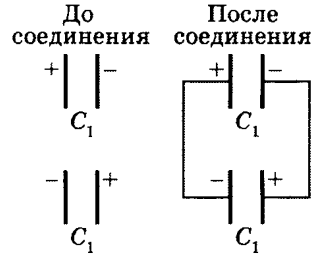
$$q_0 = C_1u + C_2u \Rightarrow C_1\xi = (C_1 + C_2)u \Rightarrow u = C_1\xi/(C_1 + C_2).$$

На конденсаторе C_2 появится заряд

$$q_2 = C_2u = C_1C_2\xi/(C_1 + C_2).$$

13. Конденсатор емкостью $C_1 = 4$ мкФ заряжен до разности потенциалов $u_1 = 10$ В. Какой заряд будет на пластинах этого конденсатора, если к нему подключить другой конденсатор емкостью $C_2 = 6$ мкФ, заряженный до разности потенциалов $u_2 = 20$ В? Соединены пластины, имеющие заряды разных знаков.

Решение



До соединения заряд первого конденсатора $q_1 = C_1u_1$, а заряд второго $q_2 = C_2u_2$. После соединения пластин проводниками начинается перераспределение зарядов пластин. Этот процесс продолжается до выравнивания потенциалов правых и, соответственно, левых пластин. Значит, после перераспределения зарядов разности потенциалов на конденсаторах равны u. Заряд первого конденсатора станет равным C_1u, а второго — C_2u.

Правые пластины конденсаторов (как и левые) образуют замкнутую систему, поэтому алгебраическая сумма их зарядов постоянна. До соединения сумма зарядов правых пластин $C_2u_2 - C_1u_1 > 0$, после соединения $C_1u + C_2u = (C_1 + C_2)u$. Получаем уравнение

$$C_2u_2 - C_1u_1 = (C_1 + C_2)u \Rightarrow u = (C_2u_2 - C_1u_1)/(C_1 + C_2).$$

Заряд первого конденсатора

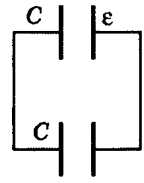
$$q'_1 = C_1u = C_1\,(C_2u_2 - C_1u_1)/(C_1 + C_2) = 3{,}2\cdot10^{-5}\ \text{Кл}.$$

Правые пластины зарядятся положительно, а левые — отрицательно.

14. Плоский конденсатор заполнен диэлектриком, проницаемость которого зависит от напряжения на конденсаторе по закону $\varepsilon = \alpha u$, где $\alpha = 1\ \text{В}^{-1}$. Параллельно этому конденсатору, который вначале не заряжен, подключают такой же конденсатор, но без диэлектрика, который заряжен до напряжения $u_0 = 156$ В. Определить напряжение, которое установится на конденсаторах.

Решение

C — емкость конденсатора без диэлектрика, Cu_0 — начальный заряд на нем, εC — емкость конденсатора с ди-



электриком. После соединения конденсаторов на них устанавливается одинаковое напряжение u, заряды конденсаторов станут равными Cu и $\varepsilon Cu = \alpha u^2 C$. По закону сохранения заряда получаем уравнение

$$Cu_0 = Cu + \alpha u^2 C \Rightarrow \alpha u^2 + u - u_0 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение и учитывая, что $u > 0$, находим

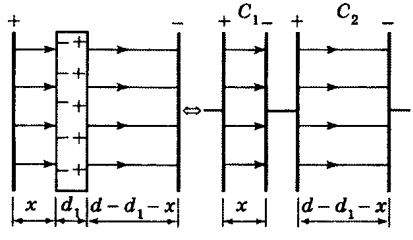
$$u = \frac{-1+\sqrt{1+4cu_0}}{2\alpha} = 12 \text{ В}.$$

15. Между пластинами плоского воздушного конденсатора (расстояние между пластинами d, площадь каждой пластины S) вводится параллельно пластинам металлическая пластинка, толщина которой $d_1 < d$. Определить емкость получившегося конденсатора.

Решение

Предположим, что на пластины конденсатора, в который введена пластинка, подано напряжение. Так как электростатическое поле не проникает внутрь металлического проводника, то поле внутри конденсатора существует только в пространстве, не занятом пластинкой (рис. *а*).

На поверхности пластинки наводятся заряды разных знаков, но вся пластинка при этом является поверхностью равного потенциала (эквипотенциальной поверхностью). Поэтому конденсатор с введенной металлической пластинкой эквивалентен двум последовательно соединен-



а) *б)*

ным конденсаторам (рис. *б*). Емкость $C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{x}$, а емкость $C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d - d_1 - x}$. Искомая емкость C вычисляется по формуле для последовательного соединения:

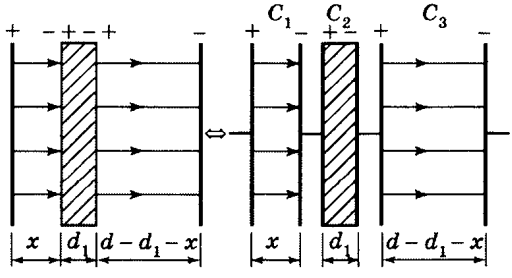
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{x}{\varepsilon_0 S} + \frac{d - d_1 - x}{\varepsilon_0 S} = \frac{d - d_1}{\varepsilon_0 S} \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 S}{d - d_1}.$$

Как видно, емкость C не зависит от x, т.е. от того, в каком месте введена пластинка. Если толщина пластинки мала ($d_1 \to 0$), то емкость конденсатора не изменяется.

16. В плоский воздушный конденсатор с расстоянием d между пластинами вводится параллельно им диэлектрическая пластинка, толщина которой $d_1 < d$. Определить емкость конденсатора, если диэлектрическая проницаемость материала пластинки ε, площадь пластин и пластинки S.

Решение

Предположим, что на обкладки конденсатора с диэлектриком подано напряжение. Электрическое поле проникает в диэлектрик, что приводит к возникновению связанных зарядов на его поверхности. Если поверхность пластинки покрыть очень тонким проводящим слоем, то на его поверхностях появятся заряды противоположных знаков. Электрическое поле в конденсаторе не изменится,



а) *б)*

как не изменится и его емкость. В этом случае образуются три последовательно соединенных конденсатора, емкости которых:

$$C_1 = \varepsilon_0 S / x,\ C_2 = \varepsilon\varepsilon_0 S / d_1,\ C_3 = \varepsilon_0 S / (d - d_1 - x).$$

Общую емкость C находим по формуле

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{x}{\varepsilon_0 S} + \frac{d_1}{\varepsilon\varepsilon_0 S} + \frac{d - d_1 - x}{\varepsilon_0 S} =$$

$$= \frac{d - d_1}{\varepsilon_0 S} + \frac{d_1}{\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{\varepsilon d + (1-\varepsilon) d_1}{\varepsilon\varepsilon_0 S} \Rightarrow C = \varepsilon\varepsilon_0 S / (\varepsilon d + (1-\varepsilon) d_1).$$

Емкость конденсатора с диэлектрической пластинкой не зависит от x, т.е. от того, где введена пластинка.

17. Между пластинами плоского воздушного конденсатора параллельно им расположена пластинка из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$. Ее толщина вдвое меньше расстояния между пластинами конденсатора. Конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения u. Пластинку извлекают из конденсатора после отключения источника. Какую работу при этом совершают силы электростатического поля конденсатора? Емкость конденсатора без пластины равна C_0.

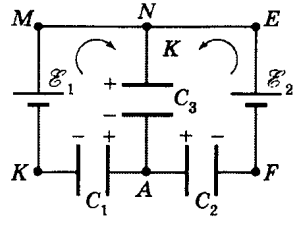
Решение

S — площадь пластин, d — расстояние между ними, тогда $C_0 = \varepsilon_0 S/d$. Когда диэлектрическая пластинка находится в конденсаторе, его емкость $C = \varepsilon\varepsilon_0 S/(\varepsilon d + (1 - \varepsilon)d_1)$. При $\varepsilon = 2$ и $d_1 = d/2$ $C = 4\varepsilon_0 S/(3d) = (4/3)C_0$. Заряд конденсатора $Q = Cu = (^4/_3)C_0 u$, а его энергия $W_1 = Cu^2/2 = (2/3)C_0 u^2$. Если источник отключен, то при извлечении пластинки заряд конденсатора останется постоянным, а его емкость уменьшится до C_0. Это приведет к увеличению энергии конденсатора, которая станет равной

$W_2 = Q^2/(2C_0) = (^8/_9)C_0u^2$. Изменение энергии $\Delta W = W_2 - W_1 = (^2/_9)C_0u^2 > 0$. Так как источник отключен, то работа консервативных сил электростатического поля $A = -\Delta W = -(^2/_9)C_0u^2$. Внешние силы при этом будут производить равную по модулю положительную работу.

18. Определить заряды конденсаторов в схеме, показанной на рисунке.

Решение



Проставим знаки зарядов пластин. Обозначим напряжения на конденсаторах u_1, u_2, u_3. Заряды каждого конденсатора: $q_1 = C_1u_1$, $q_2 = C_2u_2$, $q_3 = C_3u_3$. Так как три пластины сходятся в одной точке A, непосредственно не подключенной к источникам, то их суммарный заряд равен нулю. Получаем уравнение: $C_1u_1 + C_2u_2 + C_3u_3 = 0$.

Обходя замкнутый контур $MNAKM$ по часовой стрелке, получаем уравнение $\varepsilon_1 = u_3 + u_1$. Обходя замкнутый контур $AFENA$ против часовой стрелки, получим уравнение $\varepsilon_2 = u_3 + u_2$. Эти уравнения образуют систему

$$\begin{cases} C_1u_1 + C_2u_2 - C_3u_3 = 0, \\ \xi_1 = u_3 + u_1, \\ \xi_2 = u_3 + u_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \xi_1 - u_3, \\ u_2 = \xi_2 - u_3, \\ C_1(\xi - u_3) + C_2(\xi_2 - u_3) - C_3u_3 = 0. \end{cases}$$

Из третьего уравнения находим

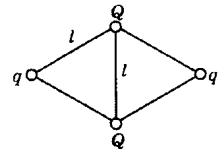
$$u_3 = \frac{C_1\xi_1 + C_2\xi_2}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

$$u_1 = \xi_1 - u_3 = \frac{C_2\xi_1 - C_3\xi_1 - C_2\xi_2}{C_1 + C_2 + C_3} \text{ и } u_2 = \xi_2 - u_3 = \frac{C_1\xi_2 + C_3\xi_2 - C_1\xi_1}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Заряды конденсаторов найдем, умножив напряжения на соответствующие емкости.

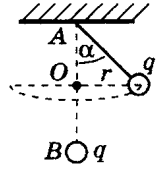
Задачи для самостоятельного решения

1. Четыре заряда q, Q, q и Q связаны друг с другом нитями одинаковой длины (см. рис.). Определите силу натяжения нити T, которая соединяет заряды Q.



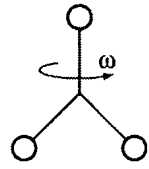
Ответ: $T = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\left(Q^2 - \dfrac{q^2}{3\sqrt{3}}\right)$.

2. Заряженный шарик массой 10 г, подвешенный на изолирующей нити, движется с постоянной угловой скоростью 10 $с^{-1}$ по окружности радиусом 5 см. Под точкой подвеса A находится другой неподвижный заряженный шарик. Расстояния AO и BO равны, угол $\alpha = 45°$. Заряды обоих шаров одинаковы. Найдите эти заряды.



Ответ: $13{,}5 \cdot 10^{-8}$ Кл.

3. Шарики, имеющие каждый массу 1 г и заряд $2 \cdot 10^{-7}$ Кл, соединены изолирующими невесомыми стержнями и расположены симметрично относительно центра. Система приводится во вращение в горизонтальной плоскости со скоростью 10 $с^{-1}$. Найдите силу растяжения стержней, если длина каждого равна 20 см.

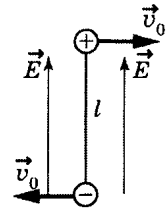


Ответ: $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ Н.

4. Тонкое проволочное кольцо радиусом R несет на себе электрический заряд q. В центре кольца располагается одноименный с зарядом q заряд Q, причем $Q >> q$. Определите силу, с которой растянуто кольцо.

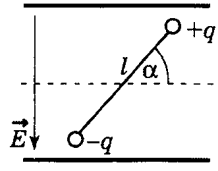
Ответ: $T = \dfrac{Qq}{8\pi^2\varepsilon_0 R^2}$.

5. В однородное электрическое поле напряженностью 100 В/м, линии которого направлены вертикально, поместили систему из двух одинаковых противоположно заряженных шариков, соединенных тонким изолирующим стержнем длины 10 см. Шарики могут вращаться в вертикальной плоскости вокруг оси, проходящей через середину стержня. Масса каждого шарика 2,5 г, абсолютная величина заряда q = 10 мкКл. На какой угол повернется эта система, если шарикам сообщить начальные скорости 0,1 м/с?



Ответ: 45.

6. Какую работу нужно совершить, чтобы в плоский заряженный конденсатор внести электрический диполь из двух жестко связанных точечных зарядов $\pm q$, расположенных на расстоянии l друг от друга. Ориентация диполя в конденсаторе показана на рисунке. Поверхностная плотность зарядов на пластинах конденсатора σ.



Ответ: $q\sigma \cdot l \sin\alpha / \varepsilon\varepsilon_0$.

7. Электрон влетает в однородное поле напряженностью E = 120 В/м и движется по направлению силовых линий. Какое расстояние он пролетит до полной остановки, если его начальная скорость равна 10^6 м/с? Сколько времени электрон будет двигаться до остановки?

Ответ: 2,4 см; 47 нс.

8. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора соединены последовательно и подключены к источнику электрического тока с постоянной ЭДС ξ. Внутрь одного из них вносят диэлектрик с ε = 4, который заполняет все пространство между обкладками. Во

сколько раз изменится напряженность электрического поля в этом конденсаторе?

Ответ: 2,5.

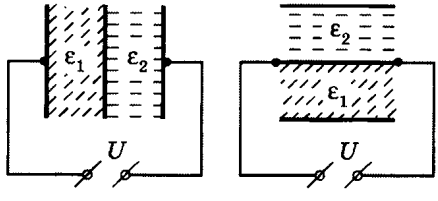
9. Два плоских конденсатора с емкостями C_1 и C_2, обладающих зарядами q_1 и q_2, включают в цепь так, что положительно заряженная пластина одного конденсатора соединяется с отрицательно заряженной пластиной другого. Определите заряд каждого конденсатора в этом случае.

Ответ: $C_1\dfrac{(q_1-q_2)}{(C_1+C_2)}$; $C_2\dfrac{(q_1-q_2)}{(C_1+C_2)}$.

10. Плоский конденсатор заполнен диэлектриком, проницаемость которого зависит от напряжения на конденсаторе по закону $\varepsilon = \alpha U$, где $\alpha = 1$ В$^{-1}$. Параллельно этому «нелинейному» конденсатору, который не заряжен, подключают такой же конденсатор, но без диэлектрика, который заряжен до напряжения $U_0 = 156$ В. Определите напряжение, которое установится на конденсаторах.

Ответ: 12 В.

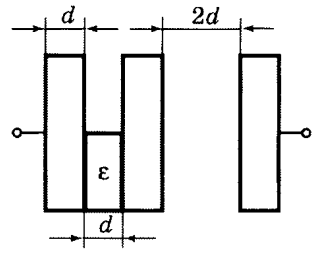
11. Два одинаковых плоских конденсатора подключены к источнику с напряжением U. Пространство между пластинами конденсаторов заполнено слоями диэлектриков одинаковой толщины с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. В одном конденсаторе слои рас-



полагаются параллельно обкладкам, во втором — перпендикулярно. 1) Во сколько раз отличаются электроемкости этих конденсаторов? 2) Во сколько раз отличаются напряженности полей в однородных диэлектриках?

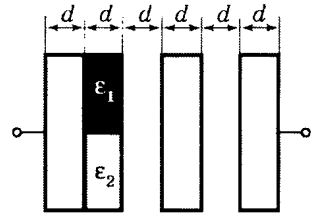
Ответ: $\frac{C_1}{C_2} = \frac{4\varepsilon_1\varepsilon_2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}$; $\frac{2\varepsilon_2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$; $\frac{2\varepsilon_1}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$.

12. Рассчитать электроемкость системы, состоящей из трех металлических пластин толщиной d и площадью S каждая и одной диэлектрической пластины толщиной d, площадью $S/2$ и диэлектрической проницаемостью ε. Расположение пластин и способы подключения к источнику ЭДС показаны на рисунке.



Ответ: $\varepsilon_0 S(\varepsilon + 1)(2d(\varepsilon + 2))$.

13. Рассчитать электроемкость системы, состоящей из трех металлических пластин толщиной d и площадью S каждая и двух диэлектрических пластин толщиной d каждая и площадью $S/2$. Диэлектрическая проницаемость первой пластины ε_1, а второй $-\varepsilon_2$. Расположение пластин и способ подключения их к источнику ЭДС показаны на рисунке.

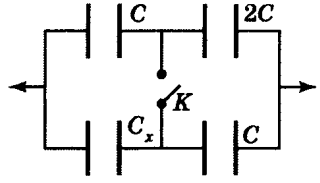


Ответ: $\frac{\varepsilon_0 S(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{2d(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$.

14. Плоский конденсатор находится во внешнем электрическом поле напряженностью $E = 10^3$ В/м, перпендикулярном пластинам. Площадь пластины конденсатора $S = 10^{-2}$ м^2. Какие заряды окажутся на каждой из пластин, если конденсатор замкнуть проводником накоротко? Пластины конденсатора до замыкания не заряжены. Влиянием силы тяжести пренебречь.

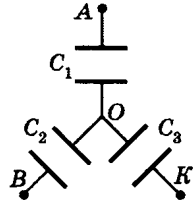
Ответ: $0{,}9 \cdot 10^{-10}$ Кл.

15. В схеме емкость батареи конденсаторов не изменится при замыкании ключа K. Определите емкость конденсатора C_x.



Ответ: $C/2$.

16. Три незаряженных конденсатора, емкости которых равны C_1, C_2 и C_3, соединены, как показано на рисунке, и подключены к точкам A, B, K, потенциалы которых равны φ_A, φ_B и φ_K. Определите потенциал точки O.

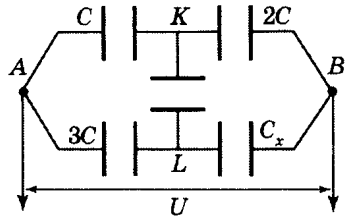


Ответ: $\dfrac{C_1\varphi_A + C_2\varphi_B + C_3\varphi_K}{C_1 + C_2 + C_3}$.

17. В плоский конденсатор, подключенный к источнику с постоянной ξ, помещена плоская пластина, имеющая заряд q. Расстояние от пластины до обкладок d_1 и d_2. Площадь пластины S. Определите силу, действующую на пластину со стороны электрического поля.

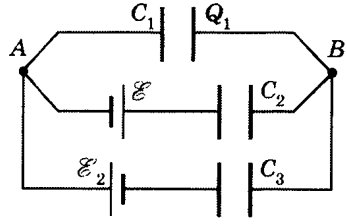
Ответ: $\varepsilon_0 S\xi^2/2 \cdot (d^2{}_1 + d^2{}_2) \cdot (d^2{}_1 - d^2{}_2))$.

18. Когда к батарее, изображенной на рисунке, подвели напряжение U, заряд среднего конденсатора оказался равным нулю. Каков C_x?



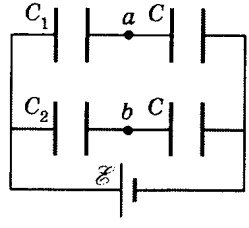
Ответ: $6C$.

19. В цепи известны емкости C_1, C_2, C_3 и ξ. Кроме того, известно, что заряд первого конденсатора равен Q_1. Найдите ξ_2 второго элемента.



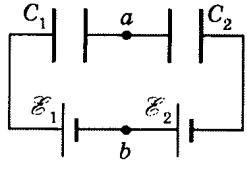
Ответ: $\dfrac{C_2}{C_3}\xi + Q_1\dfrac{C_1+C_2+C_3}{C_1C_3}$.

20. Найдите разность потенциалов между точками a и b.



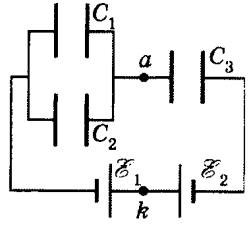
Ответ: $\varphi_{ab} = \dfrac{\xi C(C_1 - C_2)}{(C_1 + C)(C_2 + C)}$.

21. Найдите разность потенциалов между точками a и b в этой цепи.



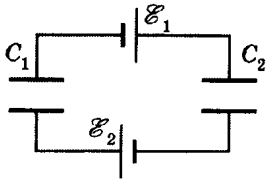
Ответ: $\dfrac{\xi_1 C_1 - \xi_2 C_2}{C_1 + C_2}$.

22. Найдите разность потенциалов между точками b и k.



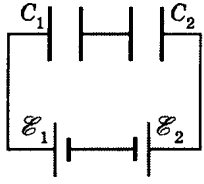
Ответ: $\dfrac{\xi_2 C_2 + \xi_1(C_1 + C_2)}{C_1 + C_2 + C_3}$.

23. Найдите силу притяжения между пластинами плоского конденсатора C_1 в схеме, изображенной на рисунке, если $C_1 = C_0$, $C_2 = 2C_0$, $\xi_1 = \xi_0$, $\xi_2 = 2\xi_0$, а расстояние между пластинами конденсатора C_1 равно d.



Ответ: $F = 2C_0\xi_0^2/d$.

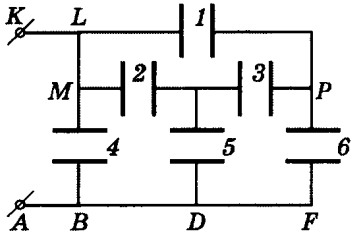
24. В схеме, изображенной на рисунке, сила притяжения между пластинами плоского конденсатора C_2 равна F. Найдите расстояние между пластинами этого конденсатора, если $C_1 = 2C_0$, $C_2 = C_0$, $\xi_1 = 2\xi_0$, $\xi_2 = \xi_0$.



Ответ: $d = \frac{2}{9}\frac{C_0\xi_0^2}{F}$.

25. Найдите емкость батареи. Емкость каждого конденсатора равна С.

Ответ: $C_б = 2C$.



ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Примеры решения задач с кратким или развернутым ответом

1. По медному проводу сечением $S = 1$ мм^2 протекает ток $I = 10$ мА. Найти среднюю скорость упорядоченного движения электронов вдоль проводника. Молярная масса меди $\mu = 63{,}6 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, плотность

$\rho = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3. На каждый атом меди приходится один электрон проводимости.

Решение

По формуле сила тока $I = |e|nSv$, где v — средняя скорость движения электронов. Чтобы определить концентрацию свободных электронов n, рассмотрим массу m меди. Ее объем $V = m/\rho$. В этом объеме содержится $N = (m/\mu)N_A$ атомов меди и такое же количество свободных электронов ($N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ 1/моль — число Авогадро). Концентрация

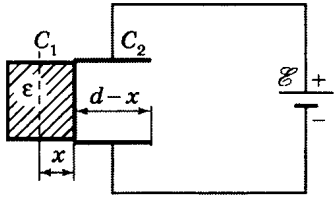
$$n = \frac{N}{V} = \left(\frac{m}{\mu}N_A\right) / \left(\frac{m}{\rho}\right) = \frac{\rho}{\mu}N_A = 0{,}84 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}.$$

Следовательно, $v = \dfrac{I}{|e|nS} = 7{,}4 \cdot 10^{-5}$ см/с.

2. Плоский конденсатор с пластинами квадратной формы размером $a \times a = 0{,}2 \times 0{,}2$ м^2 и расстоянием между пластинами $d = 2$ мм присоединен к полюсам источника с ЭДС $\xi = 750$ В. В пространство между пластинами с постоянной скоростью $v = 0{,}08$ м/с вводят стеклянную пластинку толщиной $d = 2$ мм. Какой ток будет протекать при этом в цепи? Диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon = 7$.

Решение

Пусть в конденсатор введена часть стеклянной пластинки длиной $x = vt$. В этом случае к источнику под-



ключены параллельно два конденсатора, электроемкости которых C_1 и C_2, причем $C_1 = \varepsilon\varepsilon_0 ax/d$, а $C_2 = \varepsilon_0 a(a - x)/d$. Их общая емкость

$$C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 a}{d}(\varepsilon x + a - x) = \frac{\varepsilon_0 a}{d}(a + \upsilon t(\varepsilon - 1)).$$

Заряд этой системы изменяется в зависимости от x и времени t:

$$q(t) = \xi(C_1 + C_2) = \xi\frac{\varepsilon_0 a}{d}(a + \upsilon t(\varepsilon - 1)).$$

В цепи будет протекать электрический ток

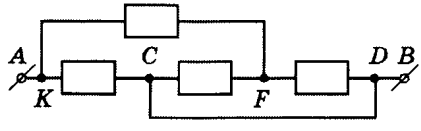
$$i(t) = q'(t) = \xi\frac{\varepsilon_0 a}{d}\upsilon(\varepsilon - 1) = \text{const}.$$

После подстановки числовых значений получим $i(t) = I = 3{,}2 \cdot 10^{-7}$ A.

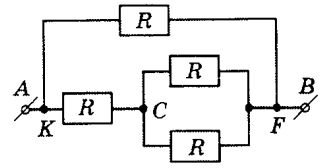
3. Четыре одинаковых резистора соединены, как показано на рисунке. Сопротивление каждого резистора равно R. Определить сопротивление между точками A и B. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

Решение

При решении подобных задач надо найти точки, имеющие одинаковый потенциал, а затем их совместить. В рассматриваемой задаче по проводу, соединяющему точки C и D, протекает электрический ток, но $\varphi_c - \varphi_D = IR_{пр} = 0$, так как сопротивление провода $R_{пр} = 0 \Rightarrow$



$\varphi_c = \varphi_D$. Совмещая точки C и D, получим эквивалентную схему.

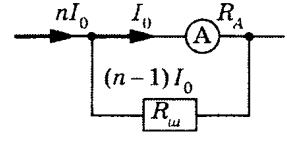


Сопротивление участка KCF этой цепи равно $R + R/2 = 3R/2$. Общее сопротивление между точками A и B находим по формуле параллельного соединения двух проводников

$$R_{AB} = \frac{R \cdot 3R/2}{R + 3R/2} = \frac{3}{5}R.$$

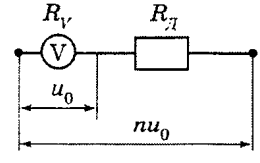
4. Амперметр рассчитан на максимальный ток I_0. Его сопротивление равно R_A. Какое сопротивление надо включить параллельно амперметру, чтобы им можно было измерять ток в n раз больший?

Решение



Сопротивление, о котором идет речь в условии задачи, называется шунтом. Шунт включают параллельно амперметру. По условию задачи общий ток равен nI_0, ток через амперметр I_0, следовательно, через шунт протекает ток $nI_0 - I_0 = (n - 1)I_0$. Так как напряжение на амперметре и шунте одинаково, то $I_0R_A = (n - 1) \cdot I_0R_ш \Rightarrow R_ш = R_A/(n - 1)$.

5. Вольтметром можно измерять максимальное напряжение U_0. Его сопротивление равно R_v. Какое сопротивление надо включить последовательно с вольтметром, чтобы можно было измерять напряжение в n раз больше?

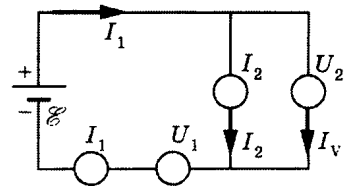


Решение

Сопротивление, о котором идет речь в условии задачи, называется добавочным. Его включают последовательно с вольтметром. По условию задачи общее напряжение nU_0, причем напряжение на вольтметре U_0. Следовательно, на добавочном сопротивлении напряжение равно $nU_0 - U_0 = (n - 1)U_0$.

Так как ток через вольтметр и добавочное сопротивление одинаковы, то $U_0/R_v = (n - 1)U_0/R_Д \Rightarrow R_Д = (n - 1)R_0$.

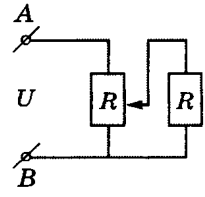
6. В схему включены два микроамперметра и два одинаковых вольтметра. Показание микроамперметров $I_1 = 100$ мкА и $I_2 = 99$ мкА; показания вольтметра $U_1 = 10$ В. Найти показания вольтметра U_2.



Решение

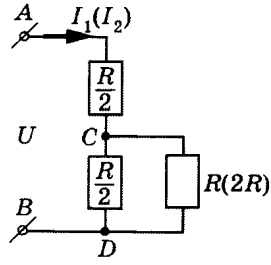
Через первый вольтметр протекает ток I_1. Следовательно, его сопротивление $R_v = U_1/I_1$. По условию задачи таким же сопротивлением обладает второй вольтметр. Сила тока через второй вольтметр $I_v = I_1 - I_2$, поэтому он показывает напряжение $U_2 = I_vR_v = (I_1 - I_2)U_1/I_1 = (1 - I_2/I_1)U_1 = 0{,}1$ *В*.

7. Для регулирования напряжения на нагрузке собрана схема, изображенная на рисунке. Сопротивление нагрузки и полное сопротивление реостата равны R. Нагрузка подключена к половине реостата. Входное напряжение, подаваемое на клеммы A и B, неизменно. Определить, как изменится напряжение на нагрузке, если ее сопротивление увеличить в 2 раза.



Решение

Пусть входное напряжение равно U и нагрузка подключена к половине реостата. Соответствующая эквивалентная схема представлена на рисунке. Общее сопротивление параллельно соединенных резисторов $R/2$ и $R\frac{(R/2)R}{R/2+R}=\frac{R}{3}$, общее сопротивление цепи между точками A и B $\frac{R}{2}+\frac{R}{3}=\frac{5}{6}R$.



Общий ток в цепи $I_1 = U/(5R/6) = 6U/(5R)$.

Напряжение между точками C и D

$$U_1 = I_1\frac{R}{3}=\frac{6U}{5R}\frac{R}{3}=\frac{2}{5}U.$$

Это и есть напряжение на нагрузочном резисторе R в первом случае.

Во втором случае сопротивление между точками C и D равно

$$\frac{(R/2)2R}{R/2+2R}=\frac{2}{5}R.$$

Общее сопротивление цепи

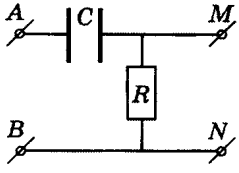
$$\frac{R}{2}+\frac{2}{5}R=\frac{9}{10}R.$$

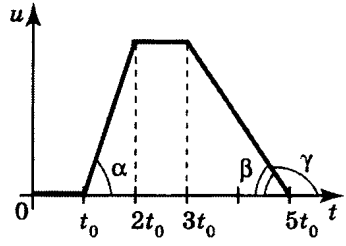
Общий ток $I_2 = U/(9R/10) = 10U/(9R)$. Напряжение на участке CD, равное напряжению на нагрузке во втором случае:

$$U_2 = I_2\frac{2R}{5}=\frac{10U}{9R}\frac{2R}{5}=\frac{4}{9}U.$$

Отношение напряжений на нагрузке $U_2/U_1 = 10/9$.

8. На клеммы AB подается такое меняющееся во времени напряжение, что напряжение на обкладках конденсатора меняется по закону, представленному на рисунке. Построить график зависимости напряжения от времени на клеммах MN.



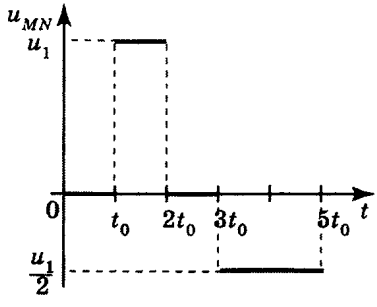


Решение

Напряжение на клеммах AB — это напряжение на последовательно соединенных конденсаторе C и резисторе R. Напряжение на клеммах MN — это напряжение на резисторе R. Пусть напряжение на конденсаторе $u(t)$, тогда его заряд $q(t) = CU(t)$. Следовательно, сила тока $i(t)$, протекающего через конденсатор и последовательно подключенный к нему резистор, равна производной от заряда по времени:

$$i(t) = q'(t) = (CU(t))' = CU'(t).$$

Напряжение на резисторе $U_{MN} = i(t)R = CRU'(t)$.

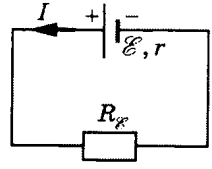


При $t \in [0, t_0]$ $U(t) = 0 \Rightarrow U_{MN} = 0$; при $t \in [t_0, 2t_0]$ $u(t)$ является линейной функцией времени, следовательно, производная от $u(t)$ есть константа, численно равная $\mathrm{tg}\alpha$. Значит, $UM_N = U_1 = CR\mathrm{tg}\ \alpha$.

При $t \in [2t_0, 3t_0]U(t) = \mathrm{const} \Rightarrow U'(t) \Rightarrow U_{MN} = 0$; при $t \in [3t_0, 5t_0]$ $u(t)$ — линейная функция времени, поэтому $U'(t) = \mathrm{tg}\gamma = -\mathrm{tg}\beta < 0$. Значит, $UM_N = -CR\mathrm{tg}\ \beta$.

Из рисунка следует, что $\mathrm{tg}\beta = (\mathrm{tg}\alpha)/2$. График зависимости напряжения на клеммах MN представлен на рисунке. Из графика видно, что в случае, когда напряжение на конденсаторе постоянно ($t \in [2t_0, 3t_0]$), ток $i(t) = 0$, т.е. постоянный электрический ток через конденсатор не протекает.

9. Определить внутреннее сопротивление аккумулятора, если известно, что при замыкании его на внешнее сопротивление $R_1 = 1$ Ом напряжение на зажимах аккумулятора $U_1 = 2$ В, а при замыкании на сопротивление $R_2 = 2$ Ом напряжение на зажимах $U_2 = 2{,}4$ В.



Решение

Напряжение на зажимах аккумулятора U — это напряжение на внешнем сопротивлении R. По закону Ома для замкнутой цепи $\xi = U + Ir$, где сила тока в цепи $I = U/R$. Используя условия задачи, составляем систему уравнений

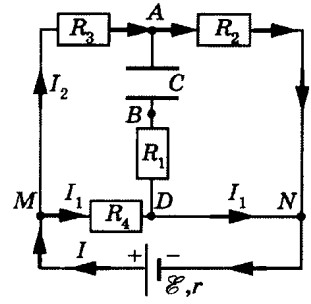
$$\begin{cases} \xi = U_1 + (U_1/R)r, \\ \xi = U_2 + (U_2/R)r, \end{cases} \Rightarrow U_1 + \frac{U_1}{R_1}r = U_2 + \frac{U_2}{R_2}r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{U_1}{R_1} - \frac{U_2}{R_2}\right)r = U_2 - U_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = (U_2 - U_1)/(U_1/R_1 - U_2/R_2) = 0{,}5 \text{ Ом}.$$

10. Определить заряд конденсатора в схеме, изображенной на рисунке, где $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 20$ Ом; $\xi = 500$ В; $r = 10$ Ом; $C = 10$ мкФ.

Решение



При решении подобных задач надо учитывать, что постоянный электрический ток через конденсатор не протекает. Стрелками на рисунке показано, как протекает ток в этой цепи. Для того чтобы найти заряд конденсатора, надо знать разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ на его обкладках. Так как через резистор R_1 ток не протекает, то $\varphi_B - \varphi_D = 0 \Rightarrow \varphi_B = \varphi_D$. Так как точки D и N соединены проводом, сопротивление которого $R_{пр} = 0$, то $\varphi_D - \varphi_N = 0 \Rightarrow \varphi_D = \varphi_N$. Таким образом, разность потенциалов на обкладках конденсатора C: $\varphi_A - \varphi_B = \varphi_A - \varphi_N$, а это есть напряжение на резисторе R_2. Пусть $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$, тогда сопротивление цепи между точками M и N: $R_{MN} = 2RR/(2R + R) = 2R/3$.

Общий ток $I = \xi/(2R/3 + r) = 3\xi/(2R + 3r)$. Разность потенциалов между точками M и N

$$\varphi_M - \varphi_N = IR_{MN} = \frac{3\xi}{2R+3r}\frac{2}{3}R = \frac{2\xi R}{2R+3r}.$$

Сила тока через последовательно соединенные резисторы R_2 и R_3:

$$I_2 = \frac{\varphi_M - \varphi_N}{R_2 + R_3} = \frac{\xi}{2R+3r}.$$

Разность потенциалов между точками A и N:

$$\varphi_A - \varphi_N = \varphi_A - \varphi_B = I_2 R_2 = \frac{\xi R}{2R+3r}.$$

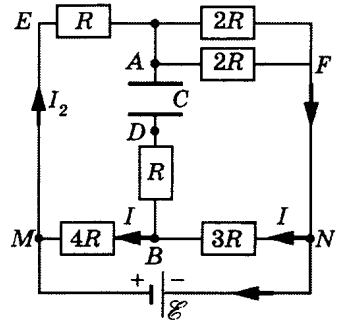
Заряд конденсатора

$$q = C(\varphi_A - \varphi_B) = \frac{\xi RC}{2R + 3r} = 1{,}43 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}.$$

11. Определить заряд и энергию конденсатора в схеме на рисунке. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

Решение

Участок цепи между точками A и B содержит конденсатор, поэтому ток на этом участке отсутствует. Так как внутренним сопротивлением источника можно пренебречь, то разность потенциалов $\varphi_N - \varphi_M = \xi$. Сила тока через последовательно соединенные резисторы $3R$ и $4R$: $I = \xi/(7R)$. Тогда разность потенциалов $\varphi_N - \varphi_B = I \cdot 3R = 3\xi/7$.



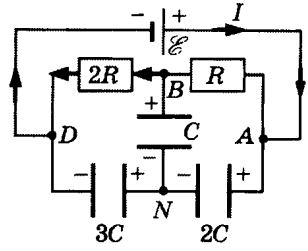
Общее сопротивление двух параллельно соединенных резисторов $2R$ равно $2R/2 = R$. Тогда между точками F и E последовательно включены два резистора величиной R, причем разность потенциалов $\varphi_F - \varphi_E = \xi$. Из свойств последовательного соединения $\varphi_A - \varphi_E = \varphi_F - \varphi_A = \xi/2$. Итак:

$$\begin{cases} \varphi_N - \varphi_B = 3\xi/7, \\ \varphi_F - \varphi_A = \xi/2. \end{cases}$$

Учтем, что $\varphi_F = \varphi_N$, и вычтем из первого уравнения второе, тогда $\varphi_A - \varphi_B = -\xi/14 \Rightarrow \varphi_B - \varphi_A = \xi/14$. Так как на участке между точками A и B тока нет, то $\varphi_B - \varphi_D = 0 \cdot R = 0 \Rightarrow \varphi_D = \varphi_B$. Разность потенциалов на конденсаторе $\varphi_D - \varphi_A = \varphi_B - \varphi_A = \xi/14$. Заряд конденсатора $q = C(\varphi_D - \varphi_A) = C(\varphi_B - \varphi_A) = C\xi/14$. Энергия конденсатора $W = C(\varphi_D - \varphi_A)^2/2 = C\xi^2/392$.

12. Определить заряд конденсатора C в схеме, изображенной на рисунке. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

Решение



Стрелками показано направление тока I в цепи (постоянный ток через конденсатор не протекает), причем $I = \xi/(3R)$. Разность потенциалов между точками A и B: $\varphi_A - \varphi_B = IR = \xi/3$, а разность потенциалов между точками B и D $\varphi_B - \varphi_D = I{\cdot}2R = = 2\xi/3$.

Пусть q_1, q_2, q_3 — модули зарядов конденсаторов C, $2C$, $3C$ соответственно. Предположим, что пластины конденсаторов заряжены так, как показано на рисунке, где N — общая точка трех пластин, которые не подключены к источнику. Тогда их суммарный заряд равен нулю, т.е. $-q_1 - q_2 + q_3 = 0$.

Пусть u_1, u_2, u_3 — напряжения на конденсаторах. Тогда $q_1 = Cu_1$, $q_2 = 2Cu_2$, $q_3 = 3Cu_3$, и последнее уравнение приводим к виду $3u_3 - u_1 - 2u_2 = 0$.

Запишем очевидное алгебраическое равенство

$$(\varphi_B - \varphi_N) + (\varphi_N - \varphi_D) = \varphi_B - \varphi_D.$$

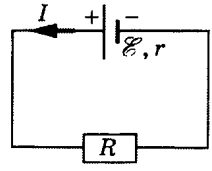
В этом равенстве $\varphi_B - \varphi_D = 2\xi/3$, $\varphi_B - \varphi_N = u_1$, а $\varphi_N - \varphi_D = u_3$, поэтому $u_1 + u_3 = 2\xi/3$.

Запишем еще одно равенство $(\varphi_A - \varphi_N) - (\varphi_B - \varphi_N) = = \varphi_A - \varphi_B$. В этом равенстве $\varphi_A - \varphi_B = \xi/3$, $\varphi_A - \varphi_N = u_2$, $\varphi_B - \varphi_N = u_1$, поэтому $u_2 - u_1 = \xi/3$. Получаем систему трех уравнений:

$$\begin{cases} 3u_3 - u - 2u_2 = 0, \\ u_1 + u_3 = 2\xi/3, \\ u_2 - u_1 = \xi/3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3u_3 + 2u_2, \\ 4u_3 - 2u_2 = 2\xi/3, \\ 3u_2 - 3u_3 = \xi/3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2\xi/9, \\ u_2 = 5\xi/9, \\ u_3 = 4\xi/9. \end{cases}$$

Так как все напряжения положительны, то предположение о знаках зарядов на обкладках конденсатора C верно. Зная напряжения, находим заряды конденсаторов: $q_1 = 2C\xi/9$, $q_2 = 10C\xi/9$, $q_3 = 4C\xi/9$.

13. Дана электрическая цепь, содержащая источник ЭДС. К источнику подключено внешнее сопротивление R. Найти полезную мощность и коэффициент полезного действия цепи.



Решение

Полезная мощность — это мощность, которая выделяется на внешнем сопротивлении R. Во всей цепи выделяется мощность, равная работе источника в единицу времени, т.е. ξI, где I — сила тока в цепи. При этом на внутреннем сопротивлении источника выделяется мощность I^2r.

По закону сохранения энергии $\xi I = I^2r + P_п$, где $P_п$ — полезная мощность. Эту формулу удобно использовать при решении ряда задач.

Сила тока в цепи $I = \xi/(R + r)$, поэтому полезная мощность

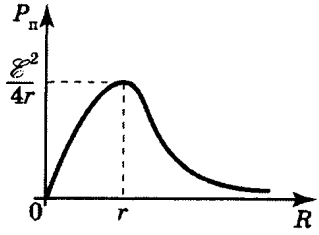
$$P_п = I^2R = (\xi(R + r))^2R.$$

Исследуем полезную мощность как функцию внешнего сопротивления R. Для этого найдем производную от полезной мощности

$$P_n' = \left(\frac{\xi^2}{(R+r)^2}R\right)' = \xi^2\frac{R'(R+r)^2 - R((R+r)^2)'}{(R+r)^4} =$$

$$= \xi^2\frac{(R+r)^2 - 2R(R+r)}{(R+r)^4} = \xi^2\frac{r-R}{(R+r)^3};$$

$P'_п = 0$, если $r = R$. При $r > R$, $P'_п > 0$, поэтому $P_п(R)$ возрастает, а при $R > r$ $P'_п < 0$, поэтому $P_п(R)$ убывает.



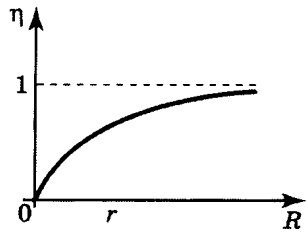


График зависимости $P_п$ (R) представлен на рисунке. Полезная мощность достигает максимального значения $\xi^2/(4r)$ при $R = r$.

Коэффициент полезного действия электрической цепи $\eta = P_п/P$, где P — мощность, выделяющаяся во всей цепи. Так как $P_п = I^2R$, а $P = I^2(R + r)$, то $\eta = R/(R + r)$. График зависимости η от внешнего сопротивления R представлен на рисунке.

14. Генератор мощностью P вырабатывает электроэнергию, которая передается потребителю по проводам, общее сопротивление которых равно R. Напряжение генератора u. Определить отношение мощности, выделяемой на нагрузке у потребителя, к мощности генератора. Сопротивлением генератора пренебречь.

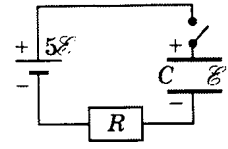
Решение

Провода и нагрузка подключены к генератору последовательно. Поэтому в цепи по проводам и нагрузке протекает одинаковый ток. Так как известны мощность генератора и вырабатываемое им напряжение, то $P = uI$, где I — сила тока в цепи. Следовательно, $I = P/u$. Тепловая мощность, которая выделяется на проводах, $P_{пр} = I^2R$. Мощность, которая выделяется на нагрузке у потребителя, $P_п = P - P_{пр} = P - I^2R$.

Искомое отношение

$$\frac{P_П}{P} = \frac{P - I^2R}{P} = \frac{P - (P/u)^2R}{P} = 1 - \frac{PR}{u^2}.$$

15. Конденсатор емкостью C, заряженный до разности потенциалов ξ, подключается через большое сопротивление к батарее с ЭДС 5ξ. Определить количество тепла, которое выделится при зарядке конденсатора до напряжения 5ξ. Подключение конденсатора производится по схеме, изображенной на рисунке.



Решение

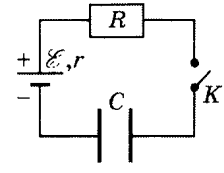
Начальный заряд конденсатора $q_0 = C\xi$. Когда конденсатор зарядится до напряжения 5ξ, его заряд $q_1 = C5\xi$. При этом через источник пройдет заряд $\Delta q = q_1 - q_0 = 4C\xi$. Источник, зарядив конденсатор, совершит работу $A = (5\xi)\,\Delta q = (5\xi)\,4C\xi = 20C\xi^2$.

Эта работа идет на выделение тепла в цепи и на увеличение энергии конденсатора $A = Q + \Delta W$, где $\Delta W = W_1 - W_0$.

Начальная энергия конденсатора $W_0 = C\xi^2/2$. Конечное значение энергии конденсатора $W_1 = C(5\xi)/2 - 25C\xi^2/2$. Поэтому $\Delta W = W_1 - W_0 = 25C\xi^2/2 - C\xi^2/2 = 12C\xi^2/2$. Выделившаяся в цепи теплота

$$Q = A - \Delta W = 20C\xi^2 - 12C\xi^2 = 8C\xi^2.$$

16. В схеме на рисунке ключ K вначале разомкнут, а конденсатор емкостью C не заряжен. Ключ замыкают на некоторое время, в течение которого конденсатор заряжается до напряжения u. Какое количество теплоты выделится к этому моменту времени на резисторе сопротивлением R? ЭДС источника — ξ, внутреннее сопротивление — r.



Решение

Начальные заряд и энергия конденсатора $q_1 = 0$, $W_1 = 0$. После замыкания ключа конденсатор заряжается

и в момент, когда напряжение на нем равно u, его заряд $q_2 = Cu$, а энергия $W_2 = Cu^2/2$. При этом на конденсатор через источник протекает заряд $\Delta q = q_2 - q_1 = Cu$, а сторонние силы источника совершают работу $A_{ст} = \xi\Delta q = C\xi u$. По закону сохранения энергии эта работа идет на увеличение энергии конденсатора и выделяется в виде теплоты на внутреннем сопротивлении и на резисторе R:

$$A_{ст} = \Delta W + Q \Rightarrow Q = A_{ст} - \Delta W = A_{ст} - (W_2 - W_1) = C\xi u - Cu^2/2 = Cu(\xi - u/2).$$

Пока происходит зарядка конденсатора, по цепи протекает изменяющийся во времени ток $i(t)$. Однако в любой момент времени этот ток одинаков в сопротивлениях r и R. По закону Джоуля—Ленца при одинаковом токе количество выделившейся теплоты пропорционально сопротивлению резистора. Поэтому $Q_R = kR$ и $Q_r = kr$, где Q_R и Q_r — количества теплоты, выделившиеся в сопротивлениях R и r соответственно, а k — коэффициент пропорциональности.

Так как $Q = Q_R + Q_r = kR + kr = k(R + r)$, то

$$k = Q/(R + r) \Rightarrow Q_R = kR = QR/(R + r) = Cu(\xi - u/2)R/(R + r).$$

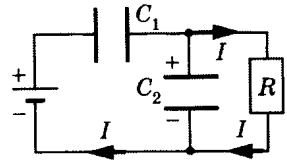
17. При никелировании изделия толщина слоя никеля росла со скоростью $v = 9\cdot10^{-9}$ м/с. Определить плотность тока при электролизе. Электрохимический эквивалент и плотность никеля равны соответственно $k = 3\cdot10^{-7}$ кг/Кл, $\rho = 8{,}9\cdot10^{-3}$ кг/м^3.

Решение

Масса выделившегося при электролизе никеля $m = kq = kIt = kjSt$, где t — время протекания тока, j — его плотность, S — площадь изделия. С другой стороны, $m = \rho V = \rho Sh$, где h — толщина слоя никеля.

Итак, $\rho Sh = kjSt \Rightarrow \rho h/t = kj$, где $h/t = v$ — скорость роста покрытия; $\rho v = kj \Rightarrow j = \rho v/k = 267$ А/м^2.

18. В схеме, изображенной на рисунке, C_2 = 10 мкФ, R = 2 кОм. Площадь пластин конденсатора S = = 100 см^2, расстояние между ними d = 5 мм. Мощность рентгеновского излучателя, который ионизирует воздух между пластинами конденсатора C_1, равна n = = 2·10^{12} пар носителей заряда за 1 с в 1 м^3. Заряд носителей равен элементарному заряду $|e|$ = = 1,6·10–19 Кл. Все образовавшиеся носители заряда достигают пластин конденсатора C_1. Определить заряд конденсатора C_2.

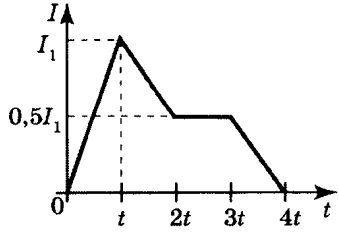


Решение

В пространстве между пластинами конденсатора C_1 образуются положительно заряженные ионы и электроны, которые под действием электрического поля движутся в противоположных направлениях, создавая электрический ток, через резистор R. За промежуток времени Δt под действием рентгеновского излучения в объеме V образуется $N = nV\Delta t$ пар носителей зарядов. Так как $V = Sd$ и каждому положительно заряженному иону соответствует отрицательно заряженный ион, то переносимый за время Δt полный заряд $q = 2|e|N = 2|e|nSd\Delta t$. Следовательно, через резистор R протекает ток $I = q/\Delta t = 2|e|nSd$. Напряжение на резисторе $u = IR = 2|e|nSdR$ равно напряжению на конденсаторе C_2. Поэтому его заряд $q_2 = C_2\ u = 2|e|nSdC_2\ R = 6{,}4\cdot10^{-13}$ Кл.

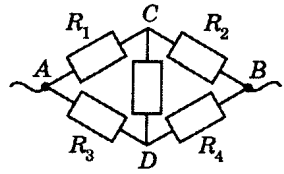
Задачи для самостоятельного решения

1. Ток в проводнике за равные промежутки времени t меняется (см. рис.). Какой заряд прошел по проводнику за время, равное $4t$?



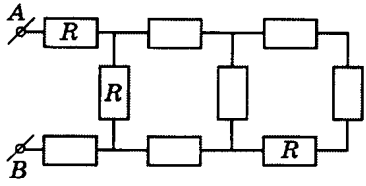
Ответ: $2I_1t$.

2. В цепи (см. рис.) R_1 = 2 Ом, R_2 = 4 Ом, R_3 = 6 Ом. Найдите сопротивление R_4, если на участке CD тока нет.



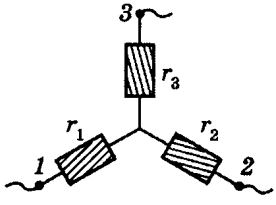
Ответ: 12 Ом.

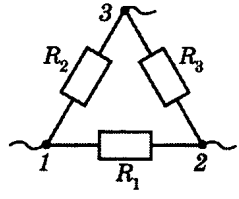
3. Определите общее сопротивление участка AB, если каждое сопротивление R.



Ответ: 2,7R.

4. Какими должны быть сопротивления r_1, r_2, r_3 для того, чтобы «звезду» можно было включить вместо «треугольника», составленного из сопротивлений R_1, R_2, R_3.

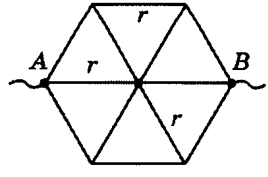




Ответ:

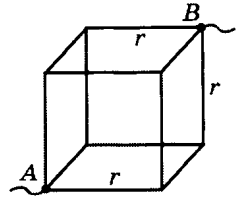
$$r_1 = \frac{R_2R_3}{(R_1+R_2+R_3)},\ r_2 = \frac{R_1R_3}{(R_1+R_2+R_3)},\ r_3 = \frac{R_1R_2}{(R_1+R_2+R_3)}.$$

5. Определите общее сопротивление контура, если каждый элемент его имеет сопротивление r. Контур подключен к электрической цепи в точках A и B.



Ответ: 0,8r.

6. Найдите общее сопротивление участка AB, составленного из проводников одинакового сопротивления r, если он подключен к электрической цепи в точках A и B.

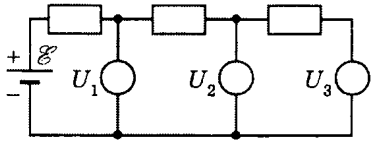


Ответ: $(^5/_6)r$.

7. Присоединение к вольтметру некоторого добавочного сопротивления увеличивает предел измерения напряжения в n раз. Другое добавочное сопротивление увеличивает предел измерения в m раз. Во сколько раз увеличится предельно измеряемое вольтметром напряжение, если включить последовательно с вольтметром эти два сопротивления, соединенные параллельно?

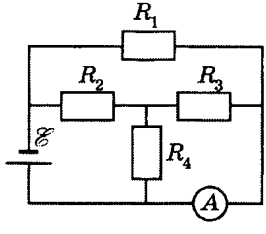
Ответ: $k = (mn - 1)/(m + n - 2)$.

8. Цепь собрана из одинаковых резисторов и одинаковых вольтметров. Показания $U_1 = 10$ В, $U_3 = 8$ В. Найдите показания второго вольтметра.



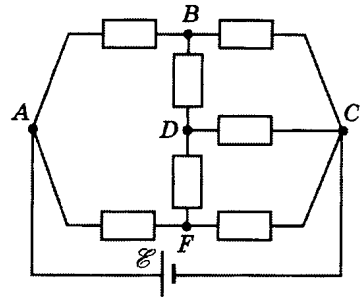
Ответ: 8,7 В.

9. Что покажет амперметр в схеме (см. рис.), если $R_1 = 15$ Ом, $R_2 = R_3 = R_4 = 10$ Ом, $\xi = 30$ В. Сопротивлением амперметра и источника тока пренебречь.



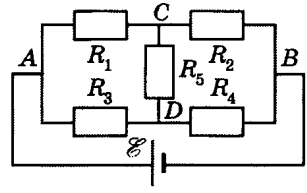
Ответ: 3 А.

10. В цепи, показанной на рисунке, $\xi = 14$ В, внутреннее сопротивление источника r равно нулю, а каждое из сопротивлений равно по 1 Ом. Найдите все токи этой цепи.



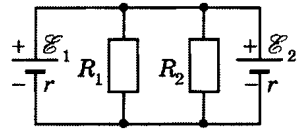
Ответ: 8 А; 6 А; 2 А; 4 А.

11. В цепи (см. рис.) $\xi = 22$ В, внутреннее сопротивление элемента равно нулю, $R_1 = 1$ Ом, а каждое из остальных сопротивлений равно 2 Ом. Найдите все токи этой цепи.



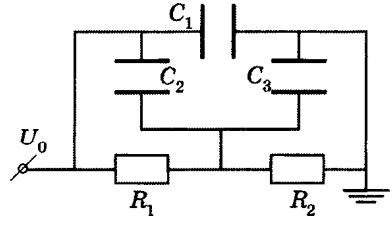
Ответ: 8 А; 7А; 5 А; 6 А; 1 А.

12. Источники тока, имеющие одинаковые внутренние сопротивления $r = 0{,}5$ Ом, подключены к резисторам R_1 и R_2. Сопротивление $R_1 = 1$ Ом. ЭДС источников тока $\xi_1 = 12$ В, $\xi_2 = 6$ В. Определите величину сопротивления R_2, при котором ток, протекающий через источник ξ_2, равен нулю.



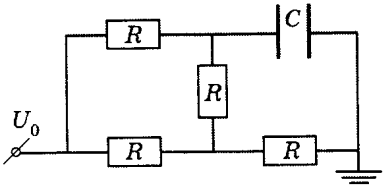
Ответ: $R_2 = 1$ Ом.

13. Конденсаторы емкостью C_1, C_2 и C_3 и резисторы, сопротивления которых R_1, R_2, включены в электрическую цепь, как показано на рисунке. Найдите установившиеся заряды на конденсаторах.



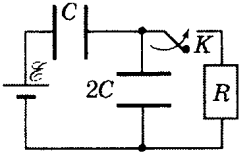
Ответ: C_1U_0, $C_2U_0R_1/(R_1 + R_2)$, $C_3U_0R_2/(R_1 + R_2)$.

14. Конденсатор емкостью C и резисторы, сопротивления которых равны R, включены в электрическую цепь, как показано на рисунке. Найдите установившийся заряд на конденсаторе. Напряжение U_0 известно.



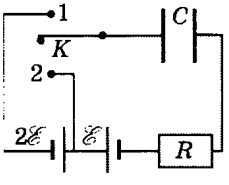
Ответ: $0{,}8U_0C$.

15. Какое количество тепла выделится на резисторе сопротивлением R после замыкания ключа K в цепи, показанной на рисунке? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.



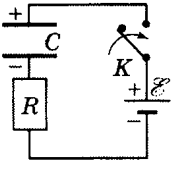
Ответ: $\dfrac{C\xi^2}{6}$.

16. Какое количество теплоты выделится на резисторе сопротивлением R при переключении ключа K из положения (1) в положение (2) в цепи, показанной на рисунке?



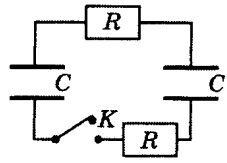
Ответ: $2C\xi^2$.

17. Конденсатор емкостью C, заряженный до напряжения 4ξ, разряжается через резистор с большим сопротивлением R и батарею с ξ. Найдите количество теплоты, выделившееся при разрядке конденсатора.



Ответ: $4{,}5C\xi^2$.

18. При разомкнутом ключе K один конденсатор в цепи был заряжен до напряжения U, а второй — нет. Найдите количество теплоты, выделившееся на каждом из сопротивлений R_1 и R_2 после замыкания ключа K.



Ответ: $Q_1 = \frac{CU^2}{4} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$; $Q_2 = \frac{CU^2}{4} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$.

19. При электролизе воды через ванну прошел заряд 1000 Кл. Какова температура выделившегося кислорода, если он находился в объеме 0,25 л под давлением 970 мм рт. ст.? $k = 8{,}29 \cdot 10^{-8}$ кг/Кл.

Ответ: 1485 К.

20. Какой заряд нужно пропустить через электролитическую ванну с подкисленной водой, чтобы получить $V = 1$ дм^3 гремучего газа при 27°С и давлении $p = 105$ Па?

Ответ: $5{,}2 \cdot 10^3$ Кл.

21. Найдите толщину слоя серебра, выделившегося за время $t = 20$ мин на катоде при электролизе, если за это время плотность тока увеличилась от значения $j_1 = 103$ А/м^2 до значения $j_2 = 104$ А/м^2. Плотность серебра $\rho = 10{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3, $k = 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ кг/Кл.

Ответ: 0,69 мм.

22. Определите толщину слоя меди, выделившегося на катоде площадью $S = 10$ см^2 при электролизе медного купороса, если ток сначала равномерно возрастал за время $t_1 = 15$ мин от нуля до $I_0 = 10$ А, а затем равномерно убывал до нуля за время $t_2 = 30$ мин? Плотность меди $\rho = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, $k = 3{,}3 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл.

Ответ: 0,5 мм.

23. В электролитической ванне с раствором сульфата цинка за время $t = 10$ мин сила тока линейно возрастала от $I_1 = 4$ А до $I_2 = 6$ А. Определите массу цинка, выделившегося за это время на электроде. Валентность цинка $n = 2$, его молярная масса $\mu = 65 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Ответ: 1 г.

24. В растворе $CuSO_4$ анодом служит медная пластинка, содержащая 10% примесей. При электролизе медь растворяется и в чистом виде выделяется на катоде. Сколько стоит очистка 1 кг такой меди, если напряжение на ванне 6 В, а стоимость 1 кВт·ч энергии 20 коп.?

Ответ: 90 коп.

25. Определите энергию, затраченную на производство 100 кг рафинированной меди, если электролиз ведется при напряжении 8 В, а КПД установки 80%? $k = 3{,}3 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл.

Ответ: $3 \cdot 10^9$ Дж.

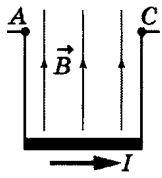
МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

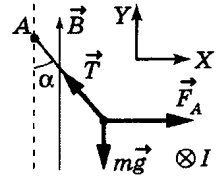
Примеры решения задач с кратким или развернутым ответом

1. Прямолинейный однородный проводник, подвешенный на двух гибких проволочках одинаковой длины, может вращаться вокруг горизонтальной оси AC. Проводник находится в однородном вертикальном магнитном поле. Если по проводнику течет ток $I_1 = 1$ А, проволочки отклоняются от вертикали на угол $\alpha_1 = 30°$. При какой силе тока они будут отклоняться на угол $\alpha_2 = 60°$? Массой проволочек можно пренебречь.

Решение

Предположим, что ток протекает, как показано на рисунке. Вид сбоку представлен на втором рисунке. На проводник действуют силы: сила тяжести mg (m — масса проводника), равнодействующая сил натяжения проволочек T, сила Ампера F_A, направленная горизонтально.





Условия равновесия проводника, записанные для горизонтальной и вертикальной осей X и Y, дают систему уравнений:

$$\begin{array}{l}\text{по оси } X: \\ \text{по оси } Y:\end{array} \begin{cases} F_A - T\sin\alpha = 0, \\ T\cos\alpha - mg = 0, \end{cases} \begin{cases} T\sin\alpha = F_A, \\ T\cos\alpha = mg, \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = F_A/mg.$$

В рассматриваемой задаче проводник перпендикулярен магнитному полю, поэтому $F_A = BIl\sin 90^\circ = BIl$.

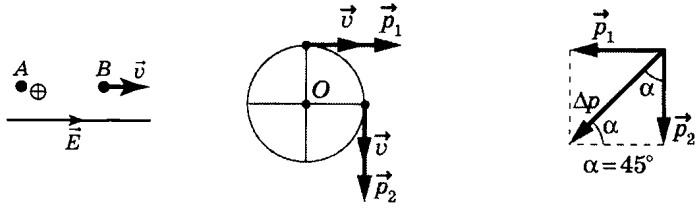
Итак, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BIl}{mg}$. При токе I_1 $\operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{BI_1 l}{mg}$; при токе I_2 $\operatorname{tg}\alpha_2 = \dfrac{BI_2 l}{mg}$.

Отношение тангенсов

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{I_2}{I_1} \Rightarrow I_2 \frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = 3\ \text{А}.$$

2. Частица массой $m = 6{,}65 \cdot 10^{-27}$ кг и зарядом $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл сначала ускоряется в электростатическом поле, проходя ускоряющую разность потенциалов $u = 2500$ В. Начальная скорость частицы равна нулю. Затем частица влетает в однородное магнитное

поле с индукцией $B = 2 \cdot 10^{-5}$ Тл, перпендикулярное вектору скорости. Найти изменение импульса частицы за время $t = (\pi/2) \cdot 1{,}039 \cdot 10^{-3}$ с после влета в магнитное поле. Определить модуль центростремительного и тангенциального ускорения частицы в этот и последующие моменты времени.



Решение

Пусть в начальный момент времени заряженная частица находится в точке A электростатического поля, потенциал которой равен φ_A. Тогда энергия частицы — потенциальная энергия в электростатическом поле $W_A = W_{pA} = q\varphi_A$. В точке B энергия частицы состоит из потенциальной $W_{pB} = q\varphi_B$ и кинетической $W_{kB} = mv^2/2$, т.е. $W_B = q\varphi_B + mv^2/2$. По закону сохранения энергии

$$W_A = W_B \Rightarrow q\varphi_A = q\varphi_B + mv^2/2 \Rightarrow q(\varphi_A - \varphi_B) = mv^2/2.$$

Но $\varphi_A - \varphi_B = u \Rightarrow qu = mv^2/2$, и скорость частицы при ее влете в магнитное поле $v = \sqrt{2qu/m} = 4{,}9 \cdot 10^5$ м/с. В магнитном поле частица под действием силы Лоренца движется по окружности с постоянной по модулю скоростью v. По второму закону Ньютона $F_л = ma_n$, где сила Лоренца $F_л = qvB$, а центростремительное ускорение частицы $a_n = v^2/R$. После подстановки получаем $q\varphi B = mv^2/R$, откуда радиус окружности $R = \dfrac{mv}{qB} = 510$ м. Период обращения частицы по окружности

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB} = 2\pi \cdot 1{,}039 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

Отношение времени движения t к периоду T

$$\frac{t}{T}=\frac{(\pi/2)\cdot 1{,}039\cdot 10^{-3}}{2\pi\cdot 1{,}039\cdot 10^{-3}}=\frac{1}{4}\Rightarrow t=\frac{1}{4}T,$$

т.е. за указанное время частица проходит $^1/_4$ окружности, а ее вектор скорости поворачивается на 90°.

Изменение импульса $\Delta\vec{p}=\vec{p}_2-\vec{p}_1=\vec{p}_2+(-\vec{p}_1)$, где $p_1=p_2=$ $=mv$.

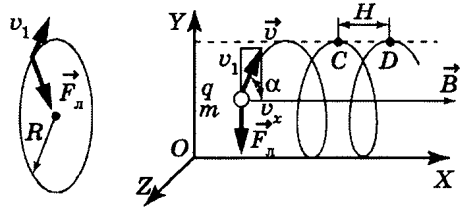
Модуль вектора $\Delta p=\sqrt{2}p_1=4{,}6\cdot 10^{21}$ кгм/с. Модуль центростремительного ускорения в любой точке окружности $a_n=v^2/R=4{,}7\cdot 10^8$ м/с^2.

Так как сила Лоренца, действующая на частицу, направлена по радиусу окружности к центру, то тангенциальное ускорение в любой точке $a_\tau=0$.

3. В однородное магнитное поле с индукцией B влетает со скоростью v частица массой m и зарядом q. Угол между векторами скорости v и магнитной индукции B равен α. Как будет двигаться частица в магнитном поле?

Решение

Будем для определенности считать заряд частицы положительным. Введем систему координат, ось X которой направлена вдоль поля, а плоскость YOZ перпендикулярна полю. Так как скорость v перпендикулярна силе Лоренца $F_л$, действующей на частицу, то сила Лоренца работы не совершает и, следовательно, скорость остается постоянной по модулю. Так как $F_л\perp\vec{B}$, то $F_л\perp OX$. Про-



екция силы Лоренца на ось OX равна нулю, значит, в направлении поля у частицы нет ускорения и она движется равномерно прямолинейно со скоростью $v_x = v\cos\alpha$. Так как $v_x = \text{const}$ и $v = \text{const}$, то угол α между векторами v и B будет оставаться постоянным. Поэтому и сила Лоренца $F_л = qvB\sin\alpha$ будет постоянной по модулю, причем вектор $F_л$ параллелен плоскости YOZ. Перпендикулярная вектору B проекция скорости $v_1 = v\sin\alpha$ находится в плоскости, параллельной плоскости YOZ. Следовательно, в плоскости, перпендикулярной вектору B, частица движется по окружности, радиус которой можно найти из второго закона Ньютона:

$$F_л = ma_n \Rightarrow qvB\sin\alpha = m\frac{v_1^2}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow qvB\sin\alpha = m\frac{(v\sin\alpha)^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv\sin\alpha}{qB}.$$

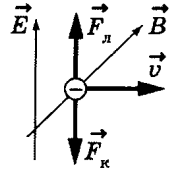
Итак, в направлении поля частица движется прямолинейно равномерно со скоростью $v_x = v\cos\alpha$, а в плоскости, перпендикулярной полю, она описывает окружность радиусом $R = (mv\sin\alpha)/(qB)$. В итоге получаем сложное движение по винтовой линии. Шаг винтовой линии H — это расстояние, на которое смещается частица в направлении поля за время одного оборота T по окружности, т.е. расстояние между точками C и D:

$$H = v_л T,\ T = \frac{2\pi R}{v_1} = \frac{2\pi\left(\dfrac{mv\sin\alpha}{qB}\right)}{v\sin\alpha} = 2\pi\frac{m}{qB};$$

$$H = v\cos\alpha \cdot 2\pi\frac{m}{qB} = \frac{2\pi mv\cos\alpha}{qB}.$$

4. Электрон влетает в область пространства с однородным электростатическим полем с напряженностью $E = 6\cdot10^4$ В/м перпендикулярно линиям напряженно-

сти. Определить значение и направление индукции магнитного поля, которое надо создать в этой области для того, чтобы электрон пролетел ее, не испытывая отклонений. Энергия электрона $W = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.



Решение

Энергия электрона W $m_e v^2/2$, где $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг — масса электрона, v — его скорость. Следовательно, $v = \sqrt{2W/m_e}$. Электростатическое поле действует на электрон с силой $Fk = |e|E$, где $|e|$ — модуль заряда электрона. Для того чтобы электрон не испытывал отклонений, необходимо скомпенсировать эту силу силой Лоренца $F_л$, действующей со стороны магнитного поля. Так как

$$F_k = F_л,\ |e|E = |e|vB \Rightarrow B = E/v = E\sqrt{m_e/(2W)} = 0{,}1 \text{ Тл}.$$

Вектор $\vec{B} \perp \vec{v}$ и $\vec{B} \perp \vec{E}$.

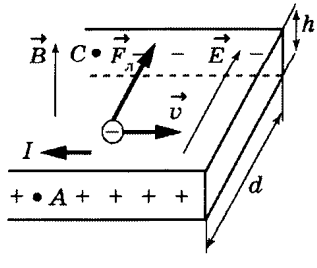
5. По металлической ленте толщиной h течет ток I. Лента помещена в однородное магнитное поле с индукцией B, направленной перпендикулярно поверхности ленты. Определить разность потенциалов между точками A и C ленты, если концентрация свободных электронов в металле равна n.

Решение

В металле электрический ток — это направленное движение свободных электронов, причем

$$I = |e|nSv, \qquad (1)$$

где $|e|$ — модуль заряда электрона, v — скорость упорядоченного движения электронов, $S = dh$ — площадь поперечного сечения



ленты (d — ее ширина). Магнитное поле действует на свободные электроны с силой Лоренца, направленной перпендикулярно току в ленте, как показано на рисунке. Поскольку на одной из поверхностей ленты образуется избыток электронов, между торцами ленты возникнет электрическое поле E, следовательно, между точками A и C будет существовать разность потенциалов. Перемещение электронов будет продолжаться до тех пор, пока сила Лоренца не будет уравновешена силой со стороны электрического поля, т.е.

$$F_k = F_л \Rightarrow |e|E = |e|vB \Rightarrow E = vB. \qquad (2)$$

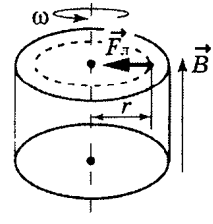
Скорость электронов выражаем из уравнения (1): $v = I/(|e|nS)$. Напряженность поля связана с разностью потенциалов соотношением $E = (\varphi_A - \varphi_c)/d$. Подставляя его в равенство (2), получаем

$$\frac{\varphi_A - \varphi_C}{d} = \frac{IB}{|e|ndh} \Rightarrow \varphi_A - \varphi_C = \frac{IB}{|e|nh}.$$

6. Незаряженный металлический цилиндр вращается вокруг своей оси в магнитном поле с угловой скоростью ω. Индукция магнитного поля направлена вдоль оси цилиндра. Каково должно быть значение индукции магнитного поля, чтобы в цилиндре не возникло электрическое поле? Масса электрона m_e, его заряд e.

Решение

Предположим, что цилиндр вращается против часовой стрелки, как показано на рисунке. Электрическое поле внутри цилиндра не возникает, если отсутствует смещение свободных электронов. Это соответствует тому, что каждый свободный электрон движется по окружности с угловой скоростью ω. Линейная скорость электрона $v = \omega r$, где r — рас-

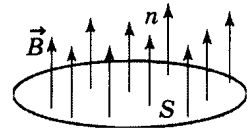


стояние электрона до оси вращения. Следовательно, на каждый электрон действует сила Лоренца $F_л = |e|vB$, которая сообщает ему центростремительное ускорение $a_n = \omega^2 r$, достаточное для движения по окружности радиусом r. Для того чтобы сила Лоренца была направлена к оси вращения, необходимо, чтобы индукция магнитного поля B была направлена вверх, если цилиндр вращается по часовой стрелке, и вниз, если цилиндр вращается по часовой стрелке.

По второму закону Ньютона $F_л = ma_n \Rightarrow |e|vB = m_e\omega^2 r$. Подставляя $v = \omega r$, находим, что $B = m_e\omega^2/|e|$.

7. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл расположен плоский проволочный виток, площадь которого $S = 10^{-2}$ м^2, а сопротивление $R = 2$ Ом. Первоначально плоскость витка перпендикулярна линиям магнитной индукции. Виток замкнут на гальванометр. Полный заряд, протекший через гальванометр при повороте витка, $q = 7{,}5 \cdot 10^{-4}$ Кл. На какой угол повернули виток?

Решение



Пусть нормаль n к плоскости витка совпадает по направлению с вектором магнитной индукции B. Начальный магнитный поток через площадь, ограниченную витком, $\Phi_1 = BS\cos 0^\circ = BS$. При повороте плоскости витка на угол α нормаль, связанная с витком, также поворачивается на угол α, поэтому магнитный поток становится равным $\Phi_2 = BS\cos\alpha$. Так как магнитный поток изменился, то в витке возникла ЭДС индукции. Однако закон изменения магнитного потока во времени не задан. Нельзя утверждать также, что поток изменялся равномерно во времени. Поэтому для вычисления ЭДС индукции воспользуемся формулой $\xi_i = -\Phi'(t)$. По витку протекает индукционный ток $i(t) = \xi/R = -\Phi'(t)/R$. Заряд, протекающий по витку и регистрируемый гальванометром, $q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)dt$. Здесь t_1 — начальный,

а t_2 — конечный моменты времени. После подстановки $i(t)$ получим

$$q = \int_{t_1}^{t_2} -\frac{\Phi'(t)}{R} dt = -(\Phi(t_2) - \Phi(t_1))/R = -(\Phi_2 - \Phi_1)/R = -\Delta\Phi/R.$$

Итак, независимо от того, как поворачивали виток, протекающий через замкнутый контур заряд вычисляется по формуле

$$q = -\Delta\Phi/R. \qquad (1)$$

Формула выведена в предположении, что индуктивность контура (витка) пренебрежимо мала ($L \Rightarrow 0$). Эта формула будет использована при решении других задач, в которых выполняется указанное условие.

В нашей задаче $\Delta\Phi = (\Phi_2 - \Phi_1) = BS\cos\alpha - BS = BS(\cos\alpha - 1)$. После подстановки в (1) находим $q = -BS(\cos\alpha - 1)/R \Rightarrow 1 - \cos\alpha = qR/(BS) \Rightarrow \cos\alpha = 1 - qR/(BS) = -0{,}5$. Следовательно, $\alpha = \arccos(-0{,}5) = 2\pi/3 = 120^\circ$.

8. Проводящий плоский контур площадью $S = 200$ см^2, в который включен конденсатор емкостью $C = 10{,}0$ мкФ, расположен в однородном магнитном поле так, что вектор нормали к контуру образует с вектором магнитной индукции угол $\alpha = 60^\circ$. Изменение магнитной индукции во времени описывается уравнением $B = 2\cdot10^{-2}\times\cos(\pi/4)t$ Тл. Определить энергию конденсатора в момент времени $t = 2$ с. Индуктивностью контура пренебречь.

Решение

По определению магнитный поток, пронизывающий контур, $\Phi(t) = B(t)S\cos\alpha$. Как видно, здесь изменение магнитного потока вызвано изменением магнитной индукции. ЭДС индукции в этом контуре

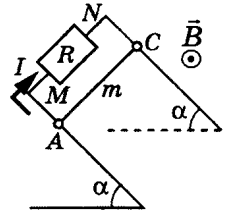
$$\xi_1 = -\Phi'(t) = -(B(t)S\cos\alpha)' = -B'(t)S\cos\alpha =$$
$$= -\left(2\cdot 10^{-2}\cos\frac{\pi}{4}t\right)S\cos\alpha = 2\cdot 10^{-2}\left(\sin\frac{\pi}{4}t\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)S\cos\alpha =$$
$$= \frac{1}{2}S\pi\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}t.$$

Поскольку в плоском конденсаторе расстояние между пластинами мало, то ЭДС индукции, возникшая в контуре и равномерно в нем распределенная, представляет собой напряжение на конденсаторе. Энергия конденсатора в любой момент времени

$$W = \frac{C\xi_i^2}{2} = \frac{1}{2}C\left(S\pi\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}t\right)^2.$$

В момент времени $t = 2c\sin(\pi/4)t = = \sin(\pi/2) = 1$ и энергия конденсатора $W = (^1/_8)C(S\pi\cos\alpha)^2 = 1{,}23\cdot 10^{-9}$ Дж.

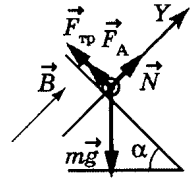
9. По двум медным шинам, установленным под углом α к горизонту, скользит под действием силы тяжести проводящая перемычка массой m и длиной l. Скольжение происходит в однородном магнитном поле с индукцией B. Поле перпендикулярно плоскости перемещения перемычки. Вверху шины соединены резистором с сопротивлением R. Коэффициент трения скольжения между поверхностями шин и перемычки равен μ ($\mu < \mathrm{tg}\alpha$). Пренебрегая сопротивлением шин и перемычки, найти ее установившуюся скорость. Перемычка перпендикулярна шинам.



Решение

Пусть установившаяся скорость перемычки равна v, тогда в перемычке возникает ЭДС индукции $\xi_i = Blv$. Так как цепь замкнута, по ней протекает индукционный ток

$$I = \xi/R = Blv/R.$$



Силы, действующие на перемычку: сила тяжести mg, сила реакции со стороны шин N, сила трения скольжения $F_{тр}$ ($F_{тр} = \mu N$) и сила Ампера, действующая со стороны магнитного поля. Причем модуль силы Ампера

$$F_A = BIl\sin 90^\circ = BIl = B(Blv/R)l = B^2l^2v/R.$$

(Здесь учтено, что угол между направлением тока и вектором магнитной индукции равен 90°.) Пусть индукция B магнитного поля направлена так, как показано на рисунке. Тогда при движении перемычки вниз по шинам поток внешнего магнитного поля через замкнутый контур $AMNC$ возрастает. Следовательно, по правилу Ленца индукционный ток в контуре направлен так, чтобы созданное им магнитное поле стремилось скомпенсировать увеличение магнитного потока. Отсюда можно сделать вывод, что индукция магнитного поля, созданного индукционным током, направлена противоположно вектору B. Используя правило буравчика, находим, что индукционный ток в контуре $AMNC$ направлен по часовой стрелке, если смотреть на этот контур сверху. На рисунке индукционный ток направлен к нам, поэтому сила Ампера, приложенная к перемычке, направлена вверх вдоль шин.

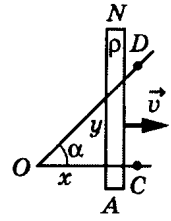
Введем оси координат X и Y и запишем второй закон Ньютона:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - F_{тр} - F_A = 0, \\ N - mg\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

(Здесь учтено, что при постоянной скорости перемычки ее ускорение $a = 0$.) Из второго уравнения $N = mg\cos\alpha$, поэтому $F_{тр} = \mu N = \mu\, mg\cos\alpha$. Подставив это в первое уравнение, получим

$$mg\sin\alpha - \eta mg\cos\alpha - \frac{B^2l^2v}{R} = 0 \Rightarrow v = \frac{mgR}{B^2l^2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

10. Металлический стержень AN, сопротивление единицы длины которого равно ρ, движется с постоянной скоростью v, перпендикулярной AN, замыкая два проводника OC и OD с пренебрежимо малыми сопротивлениями, образующими между собой угол α; $OC = l$ и $AN \perp OC$. Вся система находится в однородном магнитном поле, индукция B которого перпендикулярна плоскости системы. Найти полное количество теплоты, которое выделится в цепи за время движения стержня AN от точки O до точки C.



Решение

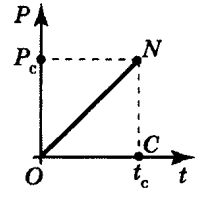
Пусть $OA = x$, тогда длина части стержня AN, образующего замкнутый контур, $y = x\text{tg}\alpha$. ЭДС индукции, которая возникает в подвижном стержне и действует во всем замкнутом контуре, $\xi_i = Byv$. Индукционный ток в контуре $I = \xi/R$, где R — сопротивление контура, равное сопротивлению участка стержня длиной y. Поэтому $R = \rho y$ и

$$I = Byv/(\rho y) = Bv/\rho = \text{const}.$$

Таким образом, в контуре протекает постоянный ток. Выделяющаяся в нем мощность

$$P = I^2R = \left(\frac{Bv}{\rho}\right)\rho y = \frac{(Bv)^2}{\rho}x\,\text{tg}\,\alpha = \frac{(Bv)^2}{\rho}(vt)\,\text{tg}\,\alpha = \frac{B^2v^2}{\rho}(\text{tg}\,\alpha)t.$$

Здесь учтено, что при равномерном движении стержня в любой момент времени $x = = vt$. Таким образом, мощность, выделяющаяся в контуре, не является постоянной, а линейно возрастает с течением времени. Для того чтобы найти полное количество выделившейся теплоты, построим график зависимости $P(t)$, который представляет собой прямую линию (см. рис.).



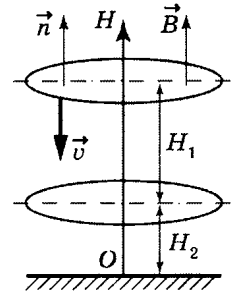
Время движения стержня до точки C: $t_c = l/v$. Количество теплоты численно равно площади ΔOCN, причем его катет

$$CN = P_c = P(t_c) = \frac{B^2v^2}{\rho}\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{l}{v}\right) = \frac{(Bv)^2 l}{\rho}\operatorname{tg}\alpha.$$

Итак,

$$Q = \frac{1}{2}P_c \cdot t_c = \frac{1}{2}\frac{(Bv)^2 l}{\rho}\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{l}{v}\right) = \frac{B^2vl}{2\rho}\operatorname{tg}\alpha.$$

11. В магнитном поле с большой высоты падает кольцо, имеющее диаметр d и сопротивление R. Плоскость кольца все время горизонтальна. Найти установившуюся скорость падения кольца, если вертикальная составляющая индукции магнитного поля изменяется с высотой H по закону $B = B_0 \times (1 + \alpha H)$, где $\alpha =$ $=$ const.



Решение

Пусть n — нормаль к плоскости кольца, тогда магнитный поток, созданный вертикальной составляющей магнитного поля, $\Phi = BS = B_0(1 + \alpha H)S$, где $S = \pi d^2/4$ — площадь контура. ЭДС индукции, возникающая в кольце,

$$\xi_i = -\Phi'(t) = -(B_0(1 + \alpha H)S)' = -B_0S\alpha H'(t).$$

Производная $H'(t) = v_H$ — это проекция скорости кольца на ось H. Так как скорость кольца направлена против оси H, то $v_H = -v$, где v — модуль скорости кольца и $\xi_i = B_0S\alpha v$. По кольцу протекает индукционный ток $I = \xi/R = B_0S\alpha v/R$. В результате в кольце за промежуток времени Δt выделяется количество теплоты $Q = I^2R\Delta t$.

На высоте H_1 кольцо обладает механической энергией

$$W_1 = mgH_1 + \frac{mv^2}{2},$$

на высоте $H_2 - W_2 = mgH_2 + \frac{mv^2}{2}$ ($v = \text{const}$).

По закону сохранения энергии

$$W_1 = W_2 + Q \Rightarrow mgH_1 = mgH_2 + I^2R\,\Delta t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow mg(H_1 - H_2) = (B_0S\alpha\, v/R)^2R\Delta t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow mg(H_1 - H_2) = ((B_0S\alpha v)^2/R)\,\Delta t. \qquad (1)$$

Разность $(H_1 - H_2)$ есть расстояние, пройденное кольцом при равномерном движении, поэтому $H_1 - H_2 = v\Delta t$ и уравнение (1) примет вид

$$mgv\Delta t = \frac{(B_0S\alpha v)^2}{R}\Delta t \Rightarrow mg = \frac{(B_0S\alpha)^2 v}{R} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v = \frac{mgR}{(B_0S\alpha)^2} = \frac{16mgR}{(B_0\pi d^2\alpha)^2}.$$

12. Сверхпроводящее круглое кольцо радиусом r, имеющее индуктивность L, находится в однородном магнитном поле с индукцией B. Первоначально плоскость кольца была параллельна вектору B, а ток в кольце равен нулю. Какую работу нужно совершить, чтобы повернуть кольцо так, чтобы его плоскость стала перпендикулярна линиям индукции?

Решение

Кольцо пронизывается как внешним магнитным потоком $\Phi_{вн}$, так и собственным магнитным потоком Φ_c, созданным током, протекающим по кольцу. Поэтому полный магнитный поток $\Phi = \Phi_{вн} + \Phi_c$, а ЭДС индукции в кольце

$$\xi_i = -\Phi' = -\Phi'_{вн} - \Phi'_c = -\Phi'_{вн} - Li',$$

где i' — скорость изменения тока.

Сопротивление сверхпроводящего кольца $R = 0$, поэтому по закону Ома $\xi_i = R = 0$. Отсюда следует, что $-\Phi'_{вн} - Li' = 0 = -\Phi'_{вн} = Li'$. Проинтегрировав это равенство от нуля до t, где t — время поворота кольца, найдем, что

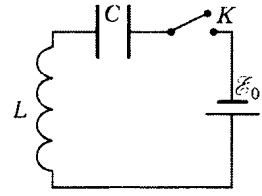
$$-\int_0^t \Phi'(t)dt = \int_0^t Li'dt \Rightarrow -(\Phi_{вн}(t) - \Phi_{вн}(0)) = L(i(t) - i(0)).$$

В начальный момент времени $i(0) = 0$, $\Phi_{вн}(0) = Bs\cos 90^\circ = 0$. В момент времени t: $\Phi_{вн}(t) = BS\cos 0^\circ = BS$, где $S = \pi r^2$, а ток $i(t) = I$. Таким образом, $-BS = LI \Rightarrow I = -BS/L$.

Начальная энергия магнитного поля кольца $W(0) = 0$, конечное значение этой энергии $W(t) = LI^2/2$. Увеличение энергии произошло за счет работы внешних сил, поэтому

$$\Delta W = W(t) - W(0) = A \Rightarrow A = \frac{LI^2}{2} = \frac{(BS)^2}{2L} = \frac{(B\pi r^2)^2}{2L}.$$

13. В схеме, изображенной на рисунке, в начальный момент времени ключ K разомкнут, конденсатор не заряжен. Определить максимальное значение тока после замыкания ключа. Заданы L, C, ξ_0. Сопротивлением катушки и источника пренебречь.



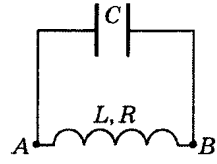
Решение

ЭДС самоиндукции в катушке $\xi_c = -Li'(t)$, где $i'(t)$ — производная от тока по времени. Когда через катушку протекает максимальный ток, эта производная обращается в нуль. Следовательно, и $\xi_c = 0$. Поэтому напряжение на конденсаторе в этот момент равно напряжению источника ξ_0. При этом заряд конденсатора $q = C\xi_0$. Именно этот

заряд протекает через источник, при этом работа сторонних сил $A_{ст} = q\xi_0 = C\xi_0^2$. Эта работа идет на изменение энергии конденсатора и катушки индуктивности, т.е. $A_{ст} = W_э + W_м$, где $W_э = C\xi_0^2/2$ — энергия электрического поля конденсатора, а $W_м = LI^2_{max}/2$ — энергия магнитного поля катушки. Итак,

$$C\xi_0^2 = C\xi_0^2/2 + LI_{max}^2/2 \Rightarrow I_{max} = \xi_0\sqrt{C/L}.$$

14. Конденсатор емкостью C, заряженный до напряжения u, разряжается через катушку с индуктивностью L и сопротивлением R. Какое количество теплоты выделится в катушке к моменту времени, когда сила тока в ней достигнет наибольшего значения I?



Решение

В этом задании катушка не является идеальной, ее сопротивление $R \neq 0$. В любой момент времени разность потенциалов между точками A и B есть $\xi_C + i(t)R$, где ξ_c — ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке и равная $-Li'(t)$, а $i(t)R$ — напряжение на катушке, когда по ней протекает ток $i(t)$. В момент, когда ток достигает максимума, производная $i'(t) = 0$ и разность потенциалов между точками A и B становится равной IR.

Начальная энергия контура есть энергия конденсатора $W_1 = Cu^2/2$. В рассматриваемый момент времени энергия контура распределена между электрическим полем конденсатора и магнитным полем катушки:

$$W_2 = C(\varphi_A - \varphi_B)^2/2 + LI^2/2 - C(IR)^2/2 + LI^2/2.$$

Энергия контура не сохраняется, так как катушка обладает ненулевым сопротивлением и при протекании тока в ней выделяется теплота. По закону сохранения энергии

$$W_1 = W_2 + Q \Rightarrow W_1 - W_2 = (Cu^2 - C(IR)^2 - LI^2)/2.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Горизонтальные рельсы находятся на расстоянии 0,3 м друг от друга. На них лежит стержень, перпендикулярный к рельсам. Какой должна быть индукция магнитного поля для того, чтобы стержень начал двигаться, если по нему пропускать ток 50 А? Коэффициент трения стержня о рельсы 0,2. Масса стержня 0,5 кг.

   Ответ: 0,067 Тл.

2. Между полюсами магнита на двух тонких нитях подвешен горизонтально линейный проводник массой 100 г, длиной 20 см, по которому протекает ток силой 20 А. На какой угол от вертикали отклонятся нити, поддерживающие проводник, если индукция магнитного поля 0,25 Тл?

   Ответ: 45°.

3. Медный проводник сечением 2 мм^2 согнут в виде трех сторон квадрата и подвешен за концы к горизонтальной оси в вертикальное магнитное поле. Когда по проводнику пропускают ток 10 А, он отклоняется от вертикальной оси на угол 45°. Определите величину и направление вектора магнитной индукции. Плотность меди 8,9 кг/дм^3.

   Ответ: $3{,}56 \cdot 10^{-2}$ Тл.

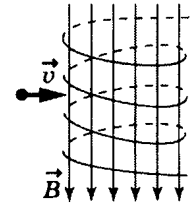
4. Жесткое тонкое проводящее кольцо лежит на горизонтальной непроводящей поверхности и находится в однородном магнитном поле, линии индукции которого горизонтальны. Масса кольца 2 г, радиус $R = 4$ см, индукция $B = 0{,}5$ Тл. Какой ток нужно пропустить по кольцу, чтобы оно начало подниматься?

   Ответ: 0,3 А.

5. Катушка, по виткам которой течет ток, вертикально стоит на плоскости. Общий вес катушки P, число витков n, радиус R, ток в витках I. При какой индукции однородного магнитного поля, направленного горизонтально, катушка под действием этого поля опрокинется?

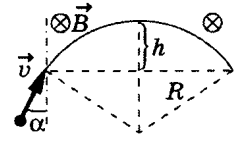
Ответ: $P/\pi RnI$.

6. По обмотке длинного цилиндрического соленоида радиусом R протекает постоянный ток, создающий внутри соленоида однородное магнитное поле с индукцией B. Между витками соленоида в него влетает по радиусу (перпендикулярно оси соленоида) электрон со скоростью V. Отклоняясь в магнитном поле, электрон спустя некоторое время покинул соленоид. Определите время движения электрона внутри соленоида.



Ответ: $\dfrac{2m}{B\bar{e}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{BR\bar{e}}{mV}\right)$.

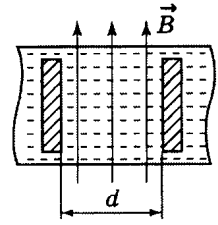
7. Электрон со скоростью $V = 10^9$ см/с влетает в область однородного магнитного поля с индукцией $B = 10^{-3}$ Тл. Направление скорости перпендикулярно индукции. Определите максимальную глубину h проникновения электрона в область магнитного поля; $\gamma = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг, угол $\alpha = 30°$.



Ответ: 28 мм.

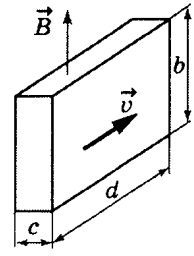
8. Поток проводящей жидкости (расплавленный металл) течет по керамической трубе. Для определения скорости течения жидкости трубу помещают в однородное магнитное поле, перпендикулярное оси трубы, в трубе

закрепляют два электрода, образующие плоский конденсатор, и измеряют разность потенциалов между электродами. Найдите скорость потока, если индукция магнитного поля B = = 0,01 Тл, расстояние между электродами d = 2 см, измеренная разность потенциалов 0,4 мВ.



Ответ: 2 м/с.

9. Незаряженный металлический брусок представляет собой прямоугольный параллелепипед со сторонами d, b, c. Брусок движется в магнитном поле вдоль стороны d со скоростью V. Индукция магнитного поля B перпендикулярна основанию бруска со сторонами d, c (см. рис.). Определите плотность электрических зарядов на боковой поверхности параллелепипеда, образованной сторонами b, d.



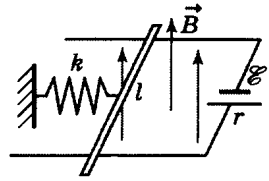
Ответ: $BV\varepsilon_0$.

10. Две параллельные шины, подключенные к аккумулятору с ЭДС ξ_0 и внутренним сопротивлением r, находятся в однородном магнитном поле с индукцией B. Шины замкнуты проводником длинной l и сопротивлением R, который перемещается по шинам без нарушения контакта перпендикулярно полю со скоростью V. Пренебрегая сопротивлением шин, определите напряжение на зажимах источника, мощность тепловых потерь в проводнике, а также механическую мощность, подводимую к проводнику.

Ответ:

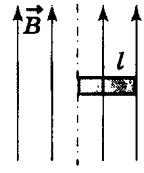
$$U = \frac{\xi_0 R + BlVr}{R+r};\ P = \frac{(\xi_0 - BlV)^2}{(R+r)^2};\ N = \frac{(\xi_0 - BlV)lVB}{R+r}.$$

11. Проводящий стержень длиной l = = 10 см и сопротивлением R = 1 Ом может скользить по горизонтально расположенным параллельным шинам, которые соединены с источником постоянного тока с ξ = = 10 В и внутренним сопротивлением r = 1 Ом. К середине стержня прикреплена невесомая пружина с коэффициентом жесткости k = 0,1 Н/м, расположенная в горизонтальной плоскости. Перпендикулярно плоскости проводников действует однородное магнитное поле с индукцией $B = 10^{-2}$ Тл. Пренебрегая сопротивлением шин и проводов, определите энергию деформации пружины.



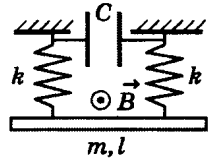
Ответ: $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ Дж.

12. В однородном магнитном поле, индукция которого B, вращается с постоянной частотой υ стержень длиной l (см. рис.). Определите ξ_i индукции, возникающую на концах стержня.



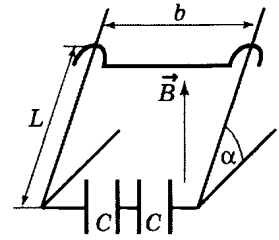
Ответ: $\pi \upsilon B l^2$.

13. Проводник массой m и длиной l подвешен к диэлектрику с помощью двух одинаковых пружин общей жесткостью k. Однородное магнитное поле с индукцией B перпендикулярно плоскости. К верхним концам пружин прикреплен конденсатор C. Определите период колебаний системы в вертикальной плоскости. Сопротивлением, индуктивностью и емкостью проводников пренебречь.



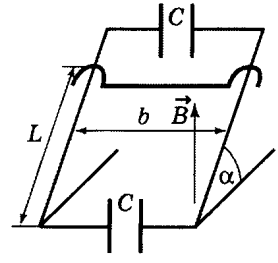
Ответ: $2\pi\sqrt{\dfrac{m + CB^2 l^2}{k}}$.

14. По двум параллельным металлическим направляющим, наклоненным под углом α к горизонту и расположенным на расстоянии b друг от друга, может скользить без трения металлическая перемычка массой m. Направляющие замкнуты снизу на незаряженную батарею конденсаторов, емкость каждого из которых равна C. Вся конструкция находится в магнитном поле, индукция которого B и направлена вертикально. В начальный момент перемычку удерживают на расстоянии L от основания «горки» (см. рис.). Какую скорость будет иметь перемычка у основания «горки», после того как ее отпустят? Сопротивлением направляющих и перемычки пренебречь.



Ответ: $\sqrt{\dfrac{2Lmg\sin\alpha}{m+\dfrac{C}{2}b^2B^2\cos^2\alpha}}$.

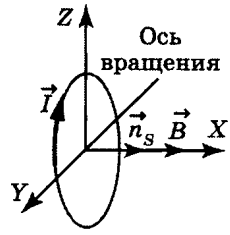
15. По двум параллельным металлическим направляющим, наклоненным под углом α к горизонту и расположенным на расстоянии b друг от друга, может скользить без трения металлическая перемычка массой m. Направляющие замкнуты снизу и сверху незаряженными конденсаторами емкости C каждый. Вся конструкция находится в магнитном поле, индукция которого B направлена вертикально. В начальный момент перемычку удерживают на расстоянии L от основания «горки». Какую скорость будет иметь перемыч-



ка у основания «горки», после того как ее отпустят? Сопротивлением направляющих и перемычки пренебречь.

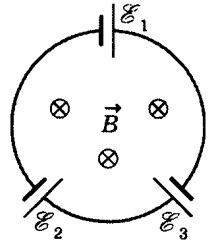
Ответ: $\sqrt{\dfrac{2Lmg\sin\alpha}{m+2Cb^2B^2\cos^2\alpha}}$.

16. Круговой виток радиусом 5 см с током 1 А находится в однородном магнитном поле с индукцией B = = 0,04 Тл. Какую работу нужно совершить, чтобы повернуть виток на 90° вокруг оси, совпадающей с его диаметром?



Ответ: $3{,}14\cdot10^{-4}$ Дж.

17. Три гальванических элемента ξ_1 = 3 В, ξ_2 = 2 В, ξ_3 = 1 В и внутренними сопротивлениями r_1 = 2 Ом, r_2 = 1,5 Ом, r_3 = 0,5 Ом соединены так, что образуют замкнутый круг-контур радиусом 40 см. Контур пронизывается перпендикулярно его плоскости магнитным полем, индукция которого изменяется по закону $B = \alpha t$, где $\alpha = \dfrac{10}{\pi}\dfrac{\text{Тл}}{\text{с}}$.



Определите силу тока в цепи.

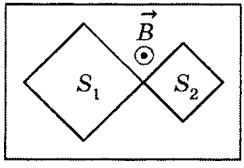
Ответ: 0,1 А.

18. Из проволоки, единица длины которой имеет сопротивление ρ, сделан плоский замкнутый контур, состоящий из двух квадратов площадью S_1 и S_2. Контур находится в однородном магнитном поле с индукцией B_0, направленной перпендикулярно плоскости контура. Какой заряд протечет через поперечное сечение

провода при равномерном уменьшении индукции поля? Между пересекающимися на рисунке проводами контакта нет.

Ответ: $q = \dfrac{B_0\left(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}\right)}{4\rho}$.

19. В магнитном поле с большой высоты падает с постоянной скоростью V металлическое кольцо, имеющее диаметр d и сопротивление R. Плоскость кольца все время горизонтальна. Найдите массу кольца, если модуль индукции B магнитного поля изменяется с высотой H по закону $|B| = B_0(1 + \alpha H)$. Сопротивлением воздуха пренебречь.



Ответ: $m = \dfrac{(B_0\alpha\pi d^2)^2 V}{16Rg}$.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Примеры решения задач с кратким или развернутым ответом

1. Тонкое проволочное кольцо радиусом R имеет электрический заряд $Q > 0$. Как будет двигаться точечный заряд массой m, имеющий заряд $-q (q > 0)$, если в начальный момент времени он покоился в некоторой точке на оси кольца на расстоянии $d << R$ от его центра? Кольцо неподвижно.

Решение

Кольцо притягивает к себе заряд $-q$. Пусть в некоторый момент времени заряд находится на расстоянии $x < d << R$ от центра кольца и его скорость при этом $v = x'$. Кинетическая энергия заряда $mv^2/2 = m(x')^2/2$. Его потенциальная энергия — это потенциальная энергия в электростатическом поле кольца, равная $(-q)\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — потенциал, создаваемый кольцом в точке расположения заряда. Потенциал, создаваемый заряженным кольцом, $\varphi(x) = kQ/\sqrt{R^2 + x^2}$, где $k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = -9 \cdot 10^9$ (Н·м²)/Кл². Следовательно, потенциальная энергия заряда равна $-kqQ/\sqrt{R^2 + x^2}$.

Полная энергия заряда складывается из его кинетической и потенциальной энергий:

$$W = m(x')^2/2 - kqQ/\sqrt{R^2 + x^2}.$$

Отметим, что эта энергия в процессе движения заряда не изменяется, т.е. W — const.

Найдем производную от полной энергии заряда по времени:

$$W' = \left(\frac{m(x')^2}{2} - k\frac{qQ}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)' = \frac{m}{2}2x'x'' -$$

$$-kqQ\left(-\frac{1}{2}\right)(R^2+x^2)^{-3/2}2xx' = \left(mx'' + kqQx/\sqrt{(R^2+x^2)^3}\right)x'.$$

Так как $W = \text{const}$, то $W' = 0$, и после сокращения на x' получаем

$$mx'' + kqQx/\sqrt{(R^2+x^2)^3} = 0. \qquad (1)$$

Отметим, что $\sqrt{(R^2+x^2)^3} = \sqrt{(R^2(1+x^2/R^2))^3}$. Так как $x << R$, то отношение $(x/R)^2 \to 0$, и в этом приближении уравнение (1) приводится к виду

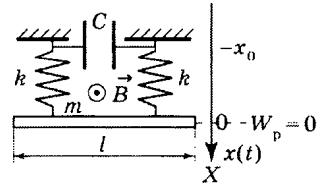
$$mx'' + kqQ\frac{x}{R^3} \Rightarrow x'' + \frac{kqQ}{mR^3}x = 0 \Rightarrow x'' + \omega_0^2 x = 0,$$

$$\omega_0^2 = \frac{kqQ}{mR^3} > 0.$$

Мы получили уравнение гармонических колебаний заряда, происходящих с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{kqQ/(mR^3)} \text{ и периодом } T = 2\pi\sqrt{mR^3/(kqQ)}.$$

2. Проводник массой m и длиной l подвешен к диэлектрику с помощью двух одинаковых проводящих пружин с общей жесткостью k. Однородное магнитное поле с индукцией B направлено перпендикулярно плоскости чертежа. К верхним концам пружин присоединен конденсатор емкостью C. Пренебрегая сопротивлением, собственной индуктивностью и емкостью проводников, определить период колебаний системы в вертикальной плоскости.



Решение

При равновесии проводника $mg - kx_0 = 0$, где $x_0 = mg/k$ — начальная деформация пружин. Выберем ось координат X, направленную вертикально вниз. Ее начало поместим в точке, соответствующей положению равновесия, тогда в любой момент времени деформация пружин равна $x + x_0$, где x — координата проводника. При колебаниях полная энергия системы складывается из:

1) кинетической энергии проводника $W_к = mv^2/2 = m(x')^2/2$;

2) потенциальной энергии проводника в поле тяжести Земли $W_p = -mgx$ (нулевое значение потенциальной энергии соответствует положению равновесия проводника, т.е. когда проводник находится в начале координат);

3) потенциальной энергии упругой деформации пружин $W_y = k(x + x_0)^2/2$;

4) электростатической энергии конденсатора $W_э = Cu^2/2$, где u — напряжение на конденсаторе.

Так как проводник движется в магнитном поле, то на его концах возникает ЭДС индукции $\xi_i = Blv = Blx'$. Поскольку сопротивлением проводника и пружин можно пренебречь, то в любой момент времени напряжение на конденсаторе равно ЭДС индукции, т.е. $u = \xi_i$. Следовательно, $W_э = C(Blx')^2/2$.

Полная энергия системы $W = W_к + W_p + W_y + W_э = m(x')^2/2 - mgx + k(x + x_0)^2/2 + C(Blx')^2/2$. Вычислим производную от полной энергии по времени:

$$W' = \frac{m}{2}2x'x'' - mgx' + \frac{k}{2}2(x+x_0)x' + \frac{C(Bl)^2}{2}2x'x'' =$$
$$= mx'x'' - mgx' + k(x+x_0)x' + C(Bl)^2x'x'' =$$
$$= ((m+C(Bl)^2)x'' + kx - (mg - kx_0))x'.$$

Напомним, что $mg - kx_0 = 0$, поэтому

$$W' = (m + C(Bl)^2x'' + kx)x'.$$

Полная энергия системы сохраняется, т.е. $W = \text{const}$, следовательно, $W' = 0$. Подставляя и сокращая на x', получаем уравнение

$$(m + C(Bl)^2)x'' + kx = 0 \Rightarrow x + kx/(m + C(Bl)^2) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x'' + \omega^2_{0x} = 0,$$

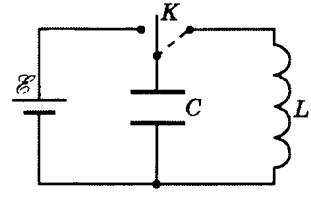
где $\omega_0^2 = k/\sqrt{(m+C(Bl)^2)}$.

Итак, проводник совершает гармонические колебания с частотой $\omega_0 = \sqrt{k/(m+C(Bl)^2)}$ и периодом

$$T = 2\pi\sqrt{(m+C(Bl)^2)/k}.$$

3. Конденсатор емкостью C = 50 пФ сначала подключили к источнику тока с ЭДС ξ = 3 В, а затем к катушке с индуктивностью L = 5,1 мкГн. Найти частоту колебаний, возникших в контуре, максимальное значение силы тока в контуре и его действующее значение.

Решение



На рисунке K — ключ, при помощи которого конденсатор C подключают к источнику ЭДС. При этом конденсатор заряжается до напряжения $u = \xi$ и его заряд $q_m = C\xi$. Затем при помощи ключа заряженный конденсатор подключают к катушке. В колебательном контуре возникают колебания заряда, тока и напряжения на конденсаторе. Собственная частота колебаний $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 6{,}3\cdot10^7$ Гц. Определить максимальное значение тока можно двумя способами.

1. Так как в контуре возникают гармонические колебания, то $q(t) = q_m\cos(\omega_0 + \varphi_0)$, где φ_0 — начальная фаза колебаний. В момент времени $t = 0$ $q(t) = q(0) = q_m = q_m\cos\varphi_0 \Rightarrow \cos\varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = 0$. Итак, колебания за-

ряда конденсатора описываются формулой $q(t) = q_m\cos\omega_0 t$. Ток в контуре $i(t) = q'(t) = (q_m\cos\omega_0 t)' = -q_m\omega_0\sin\omega_0 t = q_m\omega_0\cos(\omega_0 t + \pi/2)$. Отсюда следует, что амплитуда тока

$$I_m = q_m a_0 = C\xi\frac{1}{\sqrt{LC}} = \xi\sqrt{\frac{C}{L}} = 9{,}4\cdot 10^{-3}\ \text{А}.$$

2. Начальная энергия контура $W_1 = C\xi^2/2$ сосредоточена в электростатическом поле конденсатора. В тот момент, когда ток максимален, заряд конденсатора равен нулю, вся энергия контура сосредоточена в катушке: $W_2 = LI^2m/2$. По закону сохранения энергии $W_1 = W_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow C\xi^2/2 = LI_m^2/2 \Rightarrow I_m = \xi\sqrt{C/L}$. Действующее значение тока $I_Д = I_m/\sqrt{2} = \xi\sqrt{C/(2L)} = 8{,}6\cdot 10^{-3}$ А.

4. Заряженный конденсатор замкнули на катушку индуктивности. Через какую часть периода после подключения энергия в конденсаторе будет равна энергии в катушке индуктивности?

Решение

Пусть C — емкость, L — индуктивность, а ω_0 — собственная частота контура. Заряд на конденсаторе изменяется по закону $q(t) = qm\cos\omega_0 t$, поэтому его энергия в любой момент времени

$$W_з = (q(t))^2/(2C) = (q_m^2\cos^2\omega_0 t)/(2C).$$

Ток в контуре $i(t) = -qm\sin\omega_0 t$, а энергия, сосредоточенная в магнитном поле катушки,

$$W_m = Li^2/2 = (Lq_m^2\omega_0^2\sin^2\omega_0 t)/2.$$

По условию задачи

$$W_з = W_М \Rightarrow \frac{q_m^2\cos^2\omega_0 t}{2C} = \frac{Lq_m^2\omega_0\sin^2\omega_0 t}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos^2\omega_0 t = LC\omega_0^2\sin^2\omega_0 t.$$

Учитывая, что $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$, получим

$$LC\omega_0^2 = 1 \Rightarrow \cos^2\omega_0 t = \sin^2\omega_0 t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1+\cos 2\omega_0 t)/2 = (1-\cos 2\omega_0 t)/2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\cos 2\omega_0 t = 0 \Rightarrow 2\omega_0 t = \pi/2 \Rightarrow (4\pi/T)t = \pi/2 \Rightarrow t = T/8.$$

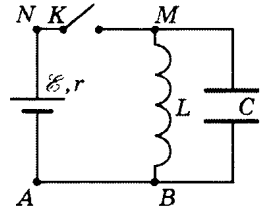
5. Колебательный контур через ключ K подключен к источнику ЭДС с некоторым внутренним сопротивлением r. Первоначально ключ K замкнут. После установления стационарного режима ключ размыкают и в контуре возникают колебания с периодом T. При этом амплитуда напряжения на конденсаторе в n раз больше ЭДС батареи. Найти индуктивность катушки и емкость конденсатора. Сопротивлением катушки можно пренебречь.

Решение

1. Ключ замкнут. Пусть ЭДС источника равна ξ. В стационарном режиме постоянный ток I протекает по контуру $NMBA$ и его значение $I = \xi r$.

2. Ключ разомкнут. В колебательном контуре возникают колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

В момент размыкания конденсатор не заряжен, а через катушку протекает ток I, равный амплитудному значению тока при колебаниях: $I_m = I$. При этом вся энергия контура сосредоточена в магнитном поле катушки: $W_м = LIm^2/2$. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе максимально, ток через катушку равен нулю, и вся энергия контура сосредоточена в конденсаторе, т.е. $W_э = Cu_m^2/2$. Так как



$$W_m = W_э, \text{ то}$$

$$LI_m^2/2 = Cu_m^2/2 \Rightarrow u_m = I_m\sqrt{L/C}.$$

По условию задачи

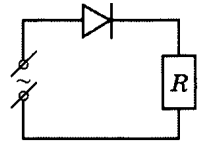
$$\frac{u_m}{\xi} = n \Rightarrow \frac{I_m\sqrt{L/C}}{\xi} = n \Rightarrow \frac{(\xi/r)\sqrt{L/C}}{\xi} = n \Rightarrow nr = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Последнее уравнение и уравнение для T образуют систему

$$\begin{cases} T = 2\pi\sqrt{LC}, \\ nr = \sqrt{L/C}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} LC = (T/(2\pi))2, \\ L/C = (nr)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (Cnr)^2 = (T/(2\pi))^2, \\ L = C(nr)^2. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = T/(2\pi nr), \text{ а } L = Tnr/(2\pi).$$

6. Электрический паяльник мощностью 50 Вт рассчитан на включение в сеть переменного тока с напряжением 127 В. Какая мощность будет выделяться в паяльнике, если его включить в сеть переменного тока с напряжением 220 В последовательно с идеальным диодом? Сопротивление диода при прямом направлении тока считать равным нулю, при обратном — бесконечности. Сопротивление паяльника постоянно.



Решение

В задаче речь идет о нахождении средней мощности. Заданные напряжения есть действующие значения напряжений.

Средняя мощность $\bar{P}_1$ = 50 Вт, на которую рассчитан паяльник, $\bar{P}_1 = u_1^2/R$, где u_1 = 127 В — действующее значение напряжения. Из последней формулы находим сопротивление паяльника $R = u_1^2/\bar{P}_1$.

При работе паяльника по схеме на рисунке действующее значение напряжения u_2 = 220 В. При этом в течение первой половины периода через паяльник течет ток, и в нем выделится теплота $Q = \bar{P}_2 T/2 = (u_2^2/R)(T/2)$.

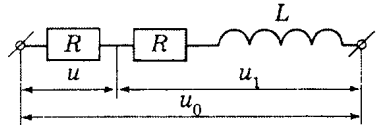
В течение второй половины периода ток через паяльник не течет и теплота не выделяется. Следовательно, средняя мощность за период

$$\bar{P} = \frac{Q}{T} = \frac{(u_2^2/R)(T/2)}{T} = \frac{u_2^2}{2R}.$$

Подставляя R, находим

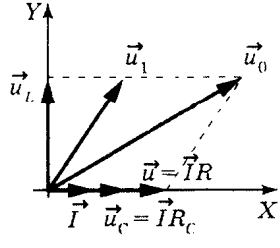
$$\bar{P} = \frac{1}{2}\bar{P}_1\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 = 75 \text{ Вт}.$$

7. Участок цепи переменного тока состоит из сопротивления R, соединенного последовательно с нагревательной спиралью, обладающей некоторой индуктивностью и активным сопротивлением. Действующие значения напряжений на всем участке, сопротивлений и спирали равны соответственно u_0 и u_1. За сколько времени с помощью этой спирали температуру воды массой m можно повысить на ΔT, если удельная теплоемкость воды равна c? Потерями теплоты пренебречь.



Решение

На представленном участке цепи R_c — сопротивление спирали, L — ее индуктивность, заданы действующие напряжения. Так как соединение последовательное, то во всех элементах этого участка в любой момент времени ток одинаков. Колебания тока опишем вектором $\vec{I}$, модуль которого I. Направим этот



вектор вдоль оси X. Колебания напряжения на сопротивлениях R_c и R по фазе совпадают с колебаниями тока, их амплитуды равны $u_c = IR_c$ и $u = IR$ и на векторной диаграмме также направлены вдоль оси X. Колебания напряжения $\vec{u}_L$ на индуктивности опережают колебания тока на $\pi/2$, их амплитуда равна $IX_L = I\omega_L = u_L$, и на векторной диаграмме вектор $\vec{u}_L$ направлен вдоль оси Y. Напряжение на спирали $\vec{u}_1 = \vec{u}_L - \vec{u}_C$, напряжение во всей цепи $\vec{u}_0 = \vec{u}_1 - \vec{u}$ (соответствующие построения приведены на рисунке).

По теореме косинусов

$$u_0^2 = u_1^2 + u^2 - 2u_1 u\cos(\pi - \varphi) = u_1^2 + u + 2u_1 u\cos\varphi,$$

где φ — сдвиг фаз между током и напряжением на участке, где включена спираль. Из последнего уравнения $\cos\varphi = (u^2_0 - u^2_1 - u^2)/(2u_1 u)$. Действующее значение тока $I = u/R$. Мощность, выделяемая на участке со спиралью:

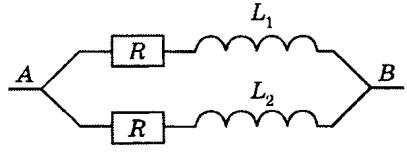
$$\bar{P} = Iu_1\cos\varphi = \left(\frac{u}{R}\right)u_1\frac{u_0^2 - u_1^2 - u^2}{2u_1 u} = \frac{u_0^2 - u_1^2 - u^2}{2R}.$$

Для нагревания воды на ΔT ей понадобится сообщить количество теплоты $Q = cm\Delta T = \bar{P}\tau$, где τ — время работы спирали. После подстановки получаем

$$cm\Delta T = \frac{u_0^2 - u_1^2 - u^2}{2R}\tau \Rightarrow \tau = \frac{2cmR\Delta T}{u_0^2 - u_1^2 - u^2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

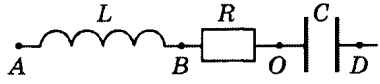
1. В цепи $L_1 = 0{,}02$ Гн и $L_2 = 0{,}005$ Гн. В некоторый момент ток $I_1 = 0{,}1$ А и возрастает со скоростью 10 А/с, а ток $I_2 = 0{,}2$ А



и возрастает со скоростью 20 А/с. Найдите сопротивление R.

Ответ: 1 Ом.

2. В цепи, показанной на рисунке, протекает синусоидальный ток. Зная, что эффективное напряжение U_{AB} = 30 В, эффективное напряжение $U_{OД}$ = 15 В, эффективное напряжение U_{BO} = 10В, найдите эффективное напряжение на участке AD.



Ответ: 18 В.

3. Напряжение на конденсаторе емкостью C = 3 мкФ изменяется по закону $U = 100\cos(300t + \pi/2)$ В. Определите, как изменяется сила тока на участке цепи, содержащей этот конденсатор?

Ответ: $-0{,}09\cos 300t$.

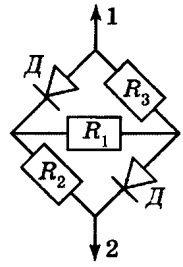
4. Рамка вращается в магнитном поле и содержит 100 витков медного провода сечением 0,5 мм^2. Длина одного витка 40 см. Определите действующее значение тока в проводнике сопротивлением 5,6 Ом, который присоединен к концам рамки, если максимальная ЭДС в обмотке рамки 2 В. $\rho_м = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом/м.

Ответ: 0,2 А.

5. Два конденсатора емкостью C_1 = 0,4 мкФ и C_2 = 0,2 мкФ включены последовательно в цепь переменного тока напряжением 220 В и частотой 50 Гц. Найдите силу тока в цепи и падение напряжения на каждом конденсаторе.

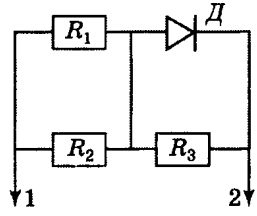
Ответ: $9{,}21 \cdot 10^{-3}$ А; 461 В; 920 В.

6. Какая мощность выделится на резисторе R_1 = 10 кОм в цепи переменного тока, изображенной на рисунке? К клеммам 1 и 2 приложено напряжение 127 В, сопротивление резисторов $R_2 = R_3$ = 5 кОм. Диод Д считать идеальным.



Ответ: 1 Вт.

7. Какое количество теплоты выделяется за 1 с в цепи, изображенной на рисунке, если к клеммам 1 и 2 приложено переменное напряжение частотой 50 Гц с амплитудным значением U_0 = 311 В. Сопротивления резисторов $R_1 = R_2 = R_3$ = 200 Ом. Диод Д считать идеальным.

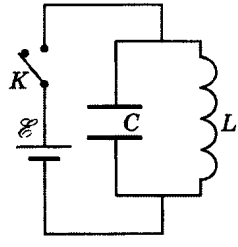


Ответ: 322,4 Дж.

8. Электромотор имеет сопротивление R = 2 Ом и приводится в движение от сети напряжением U = 110 В. Величина тока I = 10 А. Какую мощность потребляет этот мотор? Какая часть этой мощности превращается в механическую?

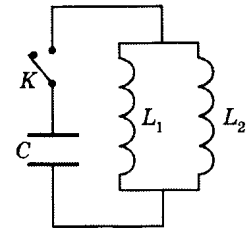
Ответ: 1100 Вт; 82%.

9. Чему равен КПД электромотора, если в момент включения его в сеть постоянного тока ток, протекающий по его обмотке, I_0 = 15 А, а в установившемся режиме ток снижается до I = 9 А?



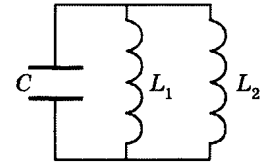
Ответ: 40%.

10. Колебательный контур, состоящий из конденсатора емкости C и катушки с индуктивностью L и сопротивлением R, через ключ K подключен к источнику постоянного ЭДС ξ. Через некоторое время после замыкания ключа K установится стационарный режим: токи во всех элементах цепи будут постоянны. После этого ключ K снова размыкают. Какое количество теплоты Q выделится в контуре после размыкания ключа? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.



Ответ: $\xi^2(CR^2 + L)/2R^2$.

11. Конденсатор емкостью C, заряженный до разности потенциалов U, через ключ K подключен к двум параллельно соединенным катушкам с индуктивностями L_1 и L_2. Если замкнуть ключ K, то через некоторое время конденсатор полностью перезарядится (напряжение на конденсаторе поменяет знак). Какие заряды q_1 и q_2 протекут через катушки за это время? Сопротивлением катушек пренебречь.



Ответ: $q_1 = 2CUL_2/(L_1 + L_2)$; $q_2 = 2CUL_1/(L_1 + L_2)$.

12. Колебательный контур с двумя параллельно соединенными катушками с индуктивностью L_1 и L_2 имеет круговую частоту незатухающих колебаний, равную ω. При колебаниях максимальное значение напряжения на конденсаторе равно U_0. Определите энергию конденсатора через $^1/_6$ и $^1/_{12}$ периода колебаний после начала заряда конденсатора.

Ответ: $W_2 = \dfrac{T^2(L_1 + L_2)U_0^2}{32\pi^2 L_1 L_2}$.

13. Какова должна быть емкость конденсатора, чтобы с катушкой индуктивностью $L = 25 \cdot 10^{-6}$ Гн обеспечить настройку в резонанс на длину волны $\lambda = 100$ м?

Ответ: 100 пФ.

14. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью 10^{-3} Гн и двух последовательно соединенных конденсаторов емкостью 500 пФ и 200 пФ. На какую длину волны настроен этот колебательный контур?

Ответ: $\lambda = 700$ м.

15. При изменении тока в катушке индуктивности на 1 А за 0,6 с в ней индуцируется $\xi_{is} = 0{,}2$ мВ. Какую длину волны излучает генератор, колебательный контур которого состоит из этой катушки и конденсатора емкостью $C = 14{,}1$ нФ?

Ответ: 280 м.

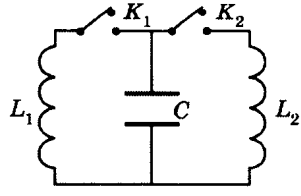
16. Чему равно расстояние до самолета, если посланный наземным радиолокатором сигнал после отражения от самолета возвратился к радиолокатору спустя $2 \cdot 10^{-4}$ с?

Ответ: 30 км.

17. Радиосигнал, посланный на Венеру, был принят на Земле через 2,5 мин после его посылки. Определите расстояние от Земли до Венеры в момент локации.

Ответ: $22{,}5 \cdot 10^{6}$ км.

18. Катушки 1 и 2 одинаковой индуктивности подключены через ключи K_1 и K_2 к конденсатору емкости C. В начальный момент времени оба ключа разомкнуты, а конденсатор заряжен

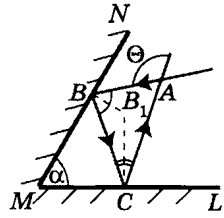


до разности потенциалов U_0. Сначала замыкают ключ K_1, и когда напряжение на конденсаторе станет равным нулю, замыкают ключ K_2. Определите максимальное напряжение на конденсаторе после замыкания ключа K_2. Сопротивлениями катушек пренебречь.

Ответ: $U_0/\sqrt{2}$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

Примеры решения задач с кратким или развернутым ответом



1. Два плоских зеркала образуют двугранный угол $\alpha = 60^\circ$. На одно из зеркал падает луч, расположенный в плоскости, перпендикулярной линии пересечения зеркал. Найти угол отклонения этого луча от первоначального направления после отражения от обоих зеркал (см. рис.).

Решение

MN и ML — плоские зеркала; AB — падающий на зеркало MN луч; $BB_1 \perp MN$; BC — падающий на зеркало ML луч; $CB_1 \perp ML$; AC — отраженный от двух зеркал луч; θ — искомый угол отклонения луча после двух отражений от зеркал.

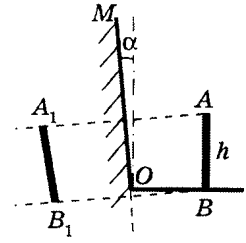
В четырехугольнике $BMCB_1$ $\angle MBB_1 = \angle MCB_1 = 90^\circ$, поэтому $\angle BMC + \angle BB_1C = 180^\circ \Rightarrow \angle BB_1C = 180^\circ - \angle BMC = 180^\circ - \alpha$.

В треугольнике BCB_1 $\angle B_1BC + \angle B_1CB = 180^\circ - \angle BB_1C = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$.

Из закона отражения следует, что $\angle ABC = 2\angle B_1\ BC$ и $\angle ACB = 2\angle B_1C\ B$. Поэтому $\angle ABC + \angle ACB = 2(\angle B_1BC + \angle B_1CB) = 2\alpha$. Искомый угол отклонения θ является внешним по отношению к ΔBAC, поэтому $\theta = \angle ABC + \angle ACB = 2\alpha = 120^\circ$.

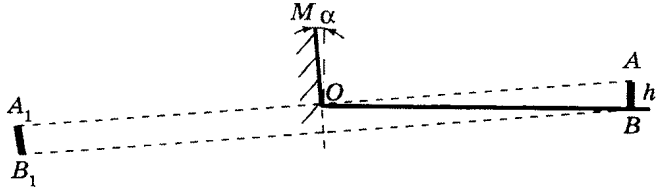
2. На стене, плоскость которой отклонена от вертикали на $4{,}87^\circ$, укреплено плоское зеркало (см. рис.). С какого максимального расстояния человек, рост которо-

го h = 170 см, сможет увидеть в зеркале хотя бы часть своего изображения?



Решение

Пусть AB — человек, стоящий у зеркала, тогда A_1B_1 — его изображение в зеркале MO (см. рис.). A_1B_1 и AB симметричны относительно зеркала MO. Ясно, что в этом случае человек видит свое изображение. Предельный случай получается, когда прямая AA_1 проходит через точку O (см. рис.). В Δ AOB $\angle AOB = \alpha$, поэтому искомое расстояние $OB = = AB/\text{tg}\alpha = h/\text{tg}\ \alpha$.

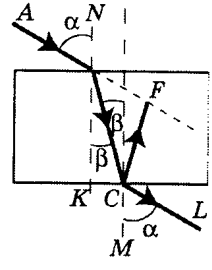


Отметим, что угол α мал, поэтому tg $\alpha = \alpha$ при условии, что α выражен в радианах: $\alpha = 4{,}87^\circ = (4{,}87/180)\times$ $\times 3{,}14$ рад = 0,085 рад.

Следовательно, $OB = h/\ \alpha = 20$ м.

3. Определить смещение луча после прохождения через плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной d = 6 см, имеющую показатель преломления n = 1,6. Угол падения луча на пластинку $\alpha = 60^\circ$ (см. рис.).

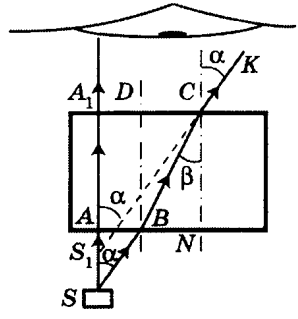
Решение



AB — падающий на пластинку луч, BN — перпендикуляр в точке падения, α — угол падения, BC — преломленный луч, β — угол преломления, CM — перпендикуляр в точке падения луча на нижнюю грань пластинки. Так как

$CM \parallel BN$, то луч падает на нижнюю грань пластинки под углом β. На основании обратимости хода световых лучей можно утверждать, что он выходит из пластинки под углом α. Итак, $AB \parallel CD$, однако происходит смещение луча на расстояние CF ($CF \perp AB$). Запишем закон преломления в точке B: $\sin\alpha/\sin\beta = n \Rightarrow \sin\beta = (\sin\alpha)/n = \sin\beta = 0{,}54 \Rightarrow \beta = 32{,}8°$; $\angle KBF = \angle ABN = \alpha$ (вертикальные углы), поэтому $\angle CBF = \alpha - \beta$. Из $\Delta\ CBK$: $BC = BK/\cos\beta = d/\cos\beta$. Из $\Delta\ CBF$ смещение луча $CF = BC\sin\angle CBF = d\ \sin(\alpha - \beta)/\cos\ \beta = 3{,}3$ см.

4. Предмет находится на расстоянии $l = 15$ см от плоскопараллельной стеклянной пластины. Наблюдатель рассматривает предмет через пластину, причем луч зрения нормален к ней. Определить расстояние x от изображения предмета до ближайшей к наблюдателю грани, если толщина пластины $d = 4{,}5$ см, показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.



Решение

Построим изображение предмета (см. рис.): S — предмет, SA — луч, падающий перпендикулярно пластине, SB — луч, падающий под углом α к пластине. Отметим, что лучи SA и SB должны попасть в глаз, поэтому угол α мал; BD — нормаль к пластине; $\angle DBC = \beta = \angle BCN$.

После прохождения пластины лучи SA и CK расходятся. Их продолжения пересекаются в точке S_1, которая является мнимым изображением точки S. Искомое расстояние $A_1S_1 = x$.

Из Δ SAB: $AB = SA \cdot \mathrm{tg}\alpha = l\mathrm{tg}\alpha$.

Из Δ CBD: $CD = BD \cdot \mathrm{tg}\ \angle DBC = d\mathrm{tg}\beta$.

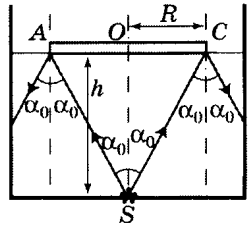
Отсюда $A_1C = A_1D + CD = AB + CD = l\mathrm{tg}\alpha + d\mathrm{tg}\beta$.

В Δ A_1S_1C: $\angle A_1S_1C = \alpha$ (так как $S_1K \parallel SB$), поэтому

$$A_1S_1 = x = A_1\ C\ \mathrm{ctg}\alpha = \frac{A_1C}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{l\,\mathrm{tg}\,\alpha + d\,\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha} = l + d\frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Изображение получается при допущении, что угол α мал, значит, мал и угол преломления β. Следовательно, $\mathrm{tg}\beta/\mathrm{tg}\alpha = \sin\beta/\sin\alpha = 1/n$. Итак, $x = l + d/n = 18$ см.

5. На дне сосуда, наполненного водой до высоты h, находится точечный источник света. На поверхности воды плавает круглый диск так, что центр диска находится над источником света. При каком минимальном радиусе диска ни один луч не выйдет через поверхность воды? Показатель преломления воды равен n.



Решение

Лучи, исходящие от источника S и попадающие на диск, отражаются от него и через поверхность воды не выходят (см. рис.). Если угол падения луча SA равен предельному углу полного отражения, то этот луч также не выходит через поверхность воды. Лучи, падающие на поверхность воды левее точки A, имеют угол падения больше α_0 и также не выходят через поверхность воды. Таким образом, для луча SA должно выполняться условие: $\sin\alpha_0 = 1/n$.

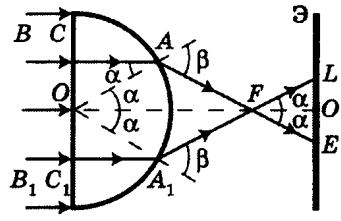
ΔAOS: $\mathrm{tg}\alpha_0 = AO/SO = R/h$. С другой стороны,

$$\mathrm{tg}\,\alpha_0 = \frac{\sin\alpha_0}{\cos\alpha_0} = \frac{(1/n)}{\sqrt{1-\sin^2\alpha_0}} = \frac{(1/n)}{\sqrt{1-(1/n)^2}} = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Приравнивая выражения для тангенсов, получаем

$$1/\sqrt{n^2-1} = R/h \Rightarrow R = h/\sqrt{n^2-1}.$$

6. На половину шара радиусом $r = 2$ см, изготовленного из стекла с показателем преломления $n = \sqrt{2}$, падает параллельный пучок лучей. Определить радиус светлого пятна на экране, расположенном на расстоянии $L = 4{,}82$ см от центра шара.



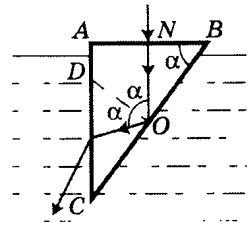
Решение

Рассмотрим луч BC, падающий на плоскую поверхность. Он проникает в шар и, не отклоняясь, попадает на сферическую поверхность в точке A. OA — радиус шара; $\angle OAC$ — угол падения луча на сферическую поверхность, причем $\sin\alpha = OC/OA = OC/r$. Следовательно, по мере удаления падающего луча от оси симметрии OO_1 увеличивается угол падения α. В некоторой точке он становится равным предельному углу полного отражения: $\sin\alpha_0 = 1/n = l/\sqrt{2} \Rightarrow \alpha_0 = 45^\circ$. При этом угол преломления β равен 90°. Из шара выйдут лишь те лучи пучка, которые падают на плоскую поверхность между точками C и C_1. Они-то и образуют после преломления на сферической поверхности светлое пятно на экране, радиус которого равен $O_1E = O_1L$. При $\alpha = 45^\circ$ AOA_1F — квадрат и

$$OF = OA\sqrt{2} = c \Rightarrow O_1F = OO_1 - OF = L - r\sqrt{2}.$$

В ΔO_1FE: $\angle O_1FE = \alpha = 45^\circ$, поэтому $O_1E = O_1F = L - r\sqrt{2} = 2$ см.

7. В воду опущен прямоугольный стеклянный клин. Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$. При каких значениях угла α луч света, падающий нормально на грань AB, целиком достигнет грани AC? Показатель преломления воды $n_B = 1{,}33$.

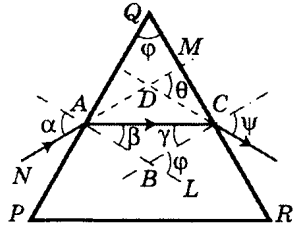


Решение

Луч, падающий перпендикулярно грани AB, не преломляется. Пусть O — точка падения его на грань BC. DO — перпендикуляр, восстановленный в точке падения, тогда $\angle DON$ — угол падения, причем $\angle DON = \angle CBA = \alpha$. Луч целиком достигнет грани AC, если от грани BC он будет полностью отражаться. Для этого необходимо, чтобы $\alpha \geq \alpha_0$, где α_0 — угол полного отражения на границе стекло—вода.

Отсюда $\sin\alpha_0 = n_B/\ n = 0{,}89 \Rightarrow \alpha_0 = 62{,}5^\circ$. При $\alpha \geq 62{,}5^\circ$ луч света целиком достигнет грани AC.

8. Луч света падает на трехгранную стеклянную призму под углом α. Показатель преломления стекла n. Преломляющий угол призмы φ. Под каким углом луч выйдет из призмы и каков угол его отклонения от первоначального направления?



Решение

NA — падающий луч; $AB \perp PQ$; AC — преломленный в призме луч; $\angle BAC = \beta$ — угол преломления; $BC \perp QR$; $\angle ACB = \gamma$; ψ — искомый угол выхода луча из призмы; $\angle CDM = \theta$ — угол отклонения луча. Проведенное построение показывает, что призма отклоняет падающий на нее

луч к основанию. Запишем закон преломления в точках A и C:

$$\sin\alpha/\sin\beta = n, \quad (1)$$

$$\sin\gamma/\sin\psi = 1/n. \quad (2)$$

Так как $AB \perp PQ$ и $BC \perp QR$, то $\angle CBL = \angle PQR = \varphi$; $\angle CBL$ — внешний угол ΔABC, поэтому он равен сумме двух внутренних углов, с ним не смежных:

$$\angle CBL = \angle BAC + \angle ACB \text{ или } \phi = \varphi + \gamma. \quad (3)$$

Из (1): $\sin\beta = (\sin\alpha)/n \Rightarrow \beta = \arcsin((\sin\alpha)/n)$. Из (3): $\gamma = \varphi - \beta = \phi - arc\sin((\sin\alpha)/n)$. Из (2): $\sin\psi = n\sin\gamma = n\sin(\varphi - \arcsin((\sin\alpha)/n)) = n(\sin\phi\cdot\cos(arc\sin((\sin\alpha)/n)) - \cos\varphi(\sin\alpha)/n)$.

Из тригонометрии известно, что $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, поэтому

$$\sin\psi = n\left(\sin\varphi\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}} - \cos\varphi\frac{\sin\alpha}{n}\right) =$$
$$= \sin\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} - \cos\varphi\sin\alpha.$$

Следовательно,

$$\psi = \arcsin\left(\sin\varphi\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} - \cos\varphi\sin\alpha\right). \quad (4)$$

Отметим, что $\angle DAB = \alpha$ (вертикальные углы) и $\angle DCB = \psi$. Поэтому $\angle DAC = \angle DAB - \beta = \alpha - \beta$, *а* $\angle ACD = \angle DCB - \gamma = \psi - \gamma$; ϕ — внешний угол ΔADC, поэтому $\phi = \angle DAC + \angle ACD = = (\alpha - \beta) + (\psi - \gamma) = = (\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)$.

Но, как уже доказывалось, $\beta + \gamma = \varphi$, следовательно, $\theta = (\alpha + \psi) - \varphi$.

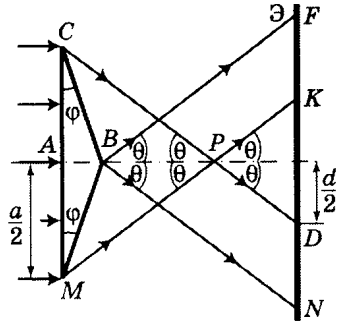
Отметим, что угол ψ вычисляется по формуле (4).

При малых преломляющих углах φ и малых углах падения α формулу для θ можно существенно упростить. Из

(1): $\sin\alpha = n\sin\beta$. Так как α и β малы, то $\alpha = n\beta$. Из (2): $\sin\psi = n \sin\gamma$. При малых α и φ углы ψ и γ также малы, поэтому $\psi = n\gamma$. Формула принимает вид

$$\theta = (n\beta + n\gamma) - \varphi = n(\beta + \gamma) - \varphi = n\varphi - \varphi = (n - 1)\varphi.$$

9. Равнобедренная стеклянная призма с малыми углами преломления φ (бипризма) помещена в параллельный пучок лучей, падающих нормально к ее основанию. Показатель преломления стекла $n = 1{,}57$, основание призмы $a = 5$ см. Найти угол φ, если в середине экрана, расположенного на расстоянии $L = 100$ см от призмы, образуется темная полоса шириной $d = 1$ см.



Решение

Указанную равнобедренную призму можно считать составленной из двух призм с общим основанием AB и малым преломляющим углом φ (см. рис.).

В задании **8** было показано, что если преломляющей угол мал, то угол отклонения любого луча от первоначального направления $\theta = (n - 1)\varphi$. Так как на верхнюю призму падает параллельный пучок, то после преломления в призме он остается параллельным (крайние лучи этого пучка — CD и BN). Совершенно аналогично параллельный пучок, падающий на нижнюю призму, остается параллельным (его крайние лучи — BF и MK). Как видно из рисунка, на экране образуется темная полоса KD.

Из ΔKPE: $PE = \dfrac{KE}{\operatorname{tg}\theta} = \dfrac{d}{2\operatorname{tg}\theta}$. Из ΔAPM:

$$AP = \frac{AM}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{a}{2\operatorname{tg}\theta}.$$

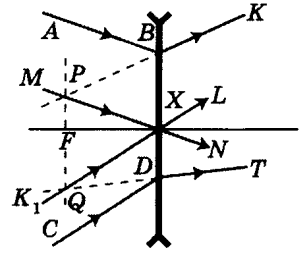
По условию задачи

$$AP + PE = L \Rightarrow \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,\theta} + \frac{d}{2\,\mathrm{tg}\,\theta} = L \Rightarrow (a+d) = 2L\,\mathrm{tg}\,\theta.$$

Так как угол θ мал, то tgθ = 0. Подставляя θ = = $(n - 1)\varphi$, получаем уравнение

$$(a+d) = 2L(n-1)\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{a+d}{2L(n-1)} = 5{,}26 \cdot 10^{-2}\ \text{рад} = 3°.$$

10. Дана рассеивающая линза, у которой задано положение главной оптической оси (положение фокусов не задано); AB — луч, падающий на линзу, BK — этот же луч после преломления в линзе. Построить ход луча CD после преломления в линзе.



Решение

Построим луч MN, идущий вдоль оптической оси линзы и параллельный лучу AB. В точке P пересекаются продолжения лучей BK и MN, причем точка P расположена в фокальной плоскости линзы. Плоскость, перпендикулярная главной оптической оси и проходящая через точку P, является фокальной плоскостью.

Проведем луч KXL, идущий вдоль оптической оси и параллельный лучу CD. Луч CD после преломления в линзе идет так, что его продолжение пересекается с лучом K_1L в точке Q, принадлежащей фокальной плоскости линзы. Таким образом, DQ — продолжение искомого луча, а DT — искомый луч.

11. Дана собирающая линза с фокусным расстоянием F. Построить график зависимости f (расстояние от изображения до линзы) от d (расстояние от предмета до линзы).

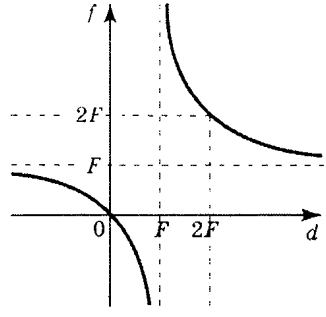
Решение

Из формулы тонкой линзы $1/F = 1/d + 1/f$ выражаем $f(d) = F(d)/(d - F)$. Таким образом, $f(d)$ является рациональной функцией. Для построения графика преобразуем последнее выражение следующим образом:

$$f(d) = \frac{Fd}{d-F} = F\left(\frac{d-F+F}{d-F}\right) = F\left(1+\frac{F}{d-F}\right).$$

Как видно, для построения графика $f(d)$ сначала необходимо построить график $1/d$, сдвинуть его на F вправо по оси абсцисс, умножить на F, сдвинуть на 1 по оси ординат и умножить на F.

Окончательный вид графика функции $f(d)$ приведен на рисунке. График представляет собой две ветви гиперболы и иллюстрирует важнейшие свойства изображений, получаемых в собирающих линзах.



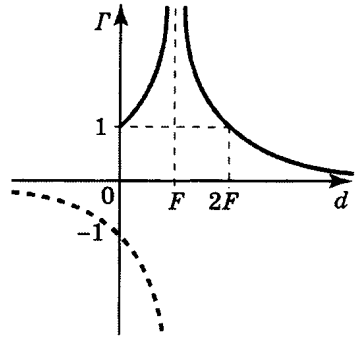
1. Если предмет находится между линзой и фокусом, т.е. $0 < d < F$, то его изображение — мнимое: $f < 0$.

2. Если предмет находится в фокусе линзы, изображения предмета не существует. При приближении предмета к фокусу, т.е. $d \to F$, изображение стремится к бесконечности: $f \to \pm\infty$.

3. Если предмет находится за фокусом линзы, т.е. $d > F$, его изображение действительное: $f > 0$. При увеличении расстояния от предмета до линзы его изображение приближается к фокусу линзы: $f \to F$.

4. Если предмет находится на двойном фокусном расстоянии от линзы, т.е. $d = 2F$, то изображение получается по другую сторону от линзы также на двойном фокусном расстоянии: $f = 2F$.

12. Дана собирающая линза с фокусным расстоянием, равным F. Построить график зависимости увеличения линзы Г от d (расстояние от предмета до линзы).



Решение

В задании **11** было показано, что расстояние от изображения до линзы выражается формулой $f(d) = Fd/(d - F)$.

Увеличение линзы $\Gamma = \left|\frac{f}{d}\right| = \left|\frac{F}{d-F}\right|$. Для построения этого графика сначала необходимо построить график $F/(d - F)$ по методике, изложенной в задании **11**. Затем часть графика, расположенную под осью абсцисс, необходимо отобразить симметрично относительно этой оси. Окончательный вид графика зависимости $\Gamma(d)$ представлен на рисунке.

Этот график иллюстрирует важнейшие свойства увеличения, получаемого при помощи собирающей линзы.

1. Если предмет расположен между линзой и фокусом, т.е. $0 < d < F$, получается мнимое увеличенное изображение: $\Gamma > 1$.

2. Если предмет находится на расстоянии $F < d < 2F$ от линзы, то изображение действительное и увеличенное: $\Gamma > 1$.

3. Если предмет находится на двойном фокусном расстоянии от линзы, т.е. $d = 2F$, то изображение действительное, расположено также на двойном фокусном расстоянии от линзы: $f = 2F$ и размер изображения равен размеру предмета: $\Gamma = 1$.

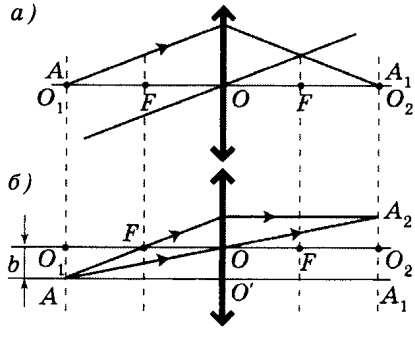
4. Если предмет находится на расстоянии $d > 2F$, то изображение действительное уменьшенное: $\Gamma < 1$.

Преобразуем формулу для увеличения, разделив числитель и знаменатель на F, тогда

$$\Gamma = \left|\frac{F}{d-F}\right| = \left|\frac{1}{d/F-1}\right|.$$

Из полученной формулы видно, что увеличение линзы возрастает с увеличением ее фокусного расстояния.

13. На экране, находящемся на расстоянии f = 60 см от собирающей линзы, получено изображение точечного источника, расположенного на главной оптической оси линзы. На какое расстояние переместится изображение на экране, если при неподвижном источнике переместить линзу в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси, на b = 2 см? Фокусное расстояние линзы F = 20 см.



Решение

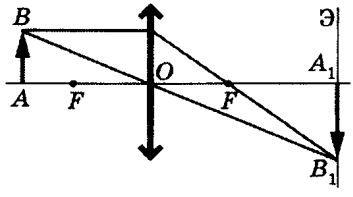
По условию задачи изображение A_1 точки A получено на экране, следовательно, это изображение действительное и $d > F$, где d — расстояние от точки A до линзы (рис. *а*). Из формулы тонкой линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$$

находим $d = Ff/(f - F)$ = 30 см.

Когда линзу перемещают перпендикулярно ее оси, то вместе с ней смещаются и главная оптическая ось, и фокус линзы. На рисунке *б*: O_1O_2 — новое положение главной оптической оси линзы, A_2 — новое изображение точки A на экране, A_1A_2 — смещение изображения. Из подобия $\Delta\ AOO'$ и $\Delta\ AA_1A_2$ получаем $AO'/AA_1 = OO'/A_1A_2$, где $AO' = d = 30$ см, $AA_1 = AO' + O'A_1 = d + f = 90$ см, $OO' = b = 2$ см. Из пропорции находим $A_1A_2 = AA_1 \times \times OO'/AO' = 6$ см.

14. Расстояние от освещенного предмета до экрана $L = 100$ см. Линза, помещенная между ними, дает четкое изображение предмета на экране при двух положениях, расстояние между которыми $l = 20$ см. Найти фокусное расстояние линзы (см. рис.).

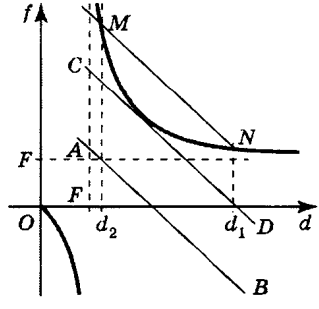


Решение

Так как изображение получено на экране, то оно является действительным, следовательно, линза является собирающей; AB — предмет, A_1B_1 — его изображение, тогда $AO = d$ и $A_1O = f$, причем по условию задачи $f + d = L$. Поэтому $f(d) = L - d$. График этой зависимости — прямая линия. Кроме того, из формулы тонкой линзы

$$f(d) = \frac{Fd}{d - F}.$$

График этой зависимости был построен в задании **12**. Графики обеих зависимостей представлены на рисунке.



Прямая $f(d) = L - d$ может не иметь ни одной общей точки с гиперболой (прямая AB), может иметь одну общую точку (прямая CD), две общие точки, соответствующие двум разным расстояниям от предмета до линзы (прямая MN). Найдем эти точки из уравнения $Fd/(d - F) = L - d \Rightarrow d^2 - Ld + + LF = 0$. Дискриминант этого уравнения $D = L^2 - 4LF = L^2 (1 - 4F/L)$. Уравнение будет иметь решения, если $D \geq 0 \Rightarrow L^2 (1 - 4F/L) \geq 0 \Rightarrow 4F \leq L$, что в нашей задаче выполняется.

Решения запишутся в виде

$$d = \frac{1}{2}\left(L \pm \sqrt{L^2(1-4F/L)}\right) = \frac{L}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4F/L}\right),$$

причем оба корня положительны. Разность этих корней $d_1 - d_2$ по условию задачи равна l, отсюда

$$L\left(1+\sqrt{1-4F/L}\right)/2 - L\left(1-\sqrt{1-4F/L}\right)/2 = l \Rightarrow L\sqrt{1-4F} = l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{4F}{L} = \frac{l^2}{L^2} \Rightarrow \frac{4F}{L} = 1 - \frac{l^2}{L^2} \Rightarrow F = \frac{L^2 - l^2}{4L} = 24 \text{ см}.$$

15. Расстояние между двумя точечными источниками света $L = 36$ см. Где между ними надо поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $F = 10$ см, чтобы изображения обоих источников получились в одной точке?

Решение

Так как линза расположена между источниками, то их действительные изображения совпадать не могут. Не могут совпадать и их мнимые изображения. Остается только одна возможность, когда изображение одного источника — действительное, другого — мнимое.

Пусть d_1 и d_2 — расстояния от источников до линзы. Предположим для определенности, что изображение первого источника — действительное, а изображение второго — мнимое, расстояния от изображений до линзы соот-

ветственно $-f_1$ и f_2, причем $f_1 > 0$, $f_2 < 0$. Применяя формулу линзы, выражаем $f_1 = d_1F/(d_1 - F)$ и $f_2 = d_2F/(d_2 - F)$.

По условию задачи

$$f_1 = -f_2 \Rightarrow f_1 = d_1\ F/(d_1 - F) = -d_2\ F/(d_2 - F) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d_1\ (F - d_2) = d_2\ (d_1 - F) \Rightarrow F(d_1 + d_2) = 2d_1d_2.$$

Из условия следует, что $d_1 + d_2 = L$. После подстановки получаем систему

$$\begin{cases} 2d_1d_2 = FL, \\ d_1 + d_2 = L, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2d_1(L - d_1) = FL, \\ d_2 = L - d_1, \end{cases} \Rightarrow 2d_1^2 - 2Ld_1 + FL = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (d_1)_{1,2} = \left(L \pm \sqrt{L^2 - 2FL}\right)/2 = L\left(1 \pm \sqrt{1 - 2F/L}\right)/2.$$

$$\begin{cases} (d_1)_1 = 30 \text{ см}, \\ (d_2)_1 = 6 \text{ см}, \end{cases} \text{или} \begin{cases} (d_1)_2 = 6 \text{ см}, \\ (d_2)_2 = 30 \text{ см}. \end{cases}$$

16. На экране с помощью тонкой линзы получили изображение предмета с увеличением $\Gamma_1 = 2$. Предмет передвинули на 1 см. Для того чтобы получить резкое изображение, пришлось передвинуть экран. При этом увеличение оказалось равным $\Gamma_2 = 4$. На какое расстояние пришлось передвинуть экран?

Решение

В обоих случаях изображения получаются на экране, следовательно, изображения — действительные, линза является собирающей. В первом случае по формуле линзы получаем: $1/F - 1/d_1 + 1/f_1$, где d_1 — расстояние от предмета до линзы, f_1 — расстояние от изображения до линзы, F — фокусное расстояние; $\Gamma_1 = |f_1/d_1| = f_1/d_1$.

Аналогично для второго случая получаем $1/F = 1/d_2 + 1/f_2$ и $\Gamma_2 = |f_2/d_2| = f_2/d_1$.

При $d > F$ увеличение $\Gamma(d)$ является убывающей функцией, поэтому из условия $\Gamma_2 > \Gamma_1$ следует, что $d_2 < d_1$, следовательно, $d_1 - d_2 = 1$ см.

При $d > F$ функция $f(d)$ (расстояние от изображения до линзы) является убывающей, поэтому $f_2 > f_1$. Расстояние, на которое необходимо сместить экран, $f_2 - f_1$.

Приравняв правые части выражений для $1/F$, получим

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1}=\frac{1}{d_2}+\frac{1}{f_2}\Rightarrow\frac{1}{f_1}-\frac{1}{f_2}=\frac{1}{d_2}-\frac{1}{d_1}\Rightarrow\frac{f_2-f_1}{f_2f_1}=\frac{d_1-d_2}{d_1d_2}\Rightarrow f_2-f_1=$$

$$=\frac{f_2f_1}{d_1d_2}(d_1-d_2)=(f_1/d_1)(f_2/d_2)(d_1-d_2)=\Gamma_1\Gamma_2(d_1-d_2)=8\text{ см}.$$

17. Вдоль главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 12$ см расположен предмет, один конец которого находится на расстоянии $d_1 = 17{,}9$ см от линзы, а другой — на расстоянии $d_2 = 18{,}1$ см. Определить увеличение k изображения.

Решение

Оба конца предмета расположены на расстояниях $d > F$ от линзы, поэтому изображение всего предмета в собирающий линзе будет действительным. Так как предмет расположен вдоль главной оптической оси, то и его изображение будет получено вдоль этой оси. Изображения концов предмета находятся на расстояниях $f_1 = Fd_1/(d_1 - F)$ и $f_2 = Fd_2(d_2 - F)$ от линзы, причем из-за убывания функции $f(d)$ при $d > F$ получаем, что $f_2 < f_1$. Размер предмета равен $(d_2 - d_1)$, а размер изображения составляет $(f_1 - f_2)$.

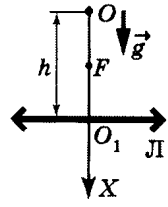
В данной задаче речь идет не о поперечном увеличении линзы, а о продольном. Очевидно, что оно равно

$$k=\frac{f_1-f_2}{d_1-d_2}=\left(\frac{Fd_1}{d_1-F}-\frac{Fd_2}{d_2-F}\right)\frac{1}{d_2-d_1}=\frac{F^2}{(d_1-F)(d_2-F)}=4.$$

18. Стальной шарик свободно падает с высоты $h = 0{,}8$ м на собирающую линзу и разбивает ее. В начальный момент времени расстояние от шарика до линзы равня-

лось расстоянию от линзы до действительного изображения шарика. Сколько времени существовало мнимое изображение шарика?

Решение



Пусть F — фокусное расстояние линзы, тогда $1/F = 1/h + + 1/f$. По условию задачи $h = f$, следовательно, $1/F = 2/h \Rightarrow$ $\Rightarrow F = h/2$ (шарик в начальный момент времени находился на двойном фокусном расстоянии). Мнимое изображение существует, когда шарик находится между фокусом и линзой. Свободное падение шарика (см. рис.) описывается формулой $x(t) = x_0 + v_0 t + gt^2/2 = gt^2/2$.

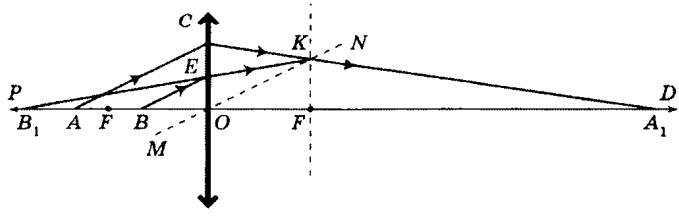
В момент удара о линзу $x = h = gt^2{}_п/2$, где $t_п = \sqrt{2h/g}$ — время падения шарика. В точке F: $x = h/2 = gt^2F/2$, $tF = \sqrt{h/g}$ — время движения на участке OF. Шарик находится между фокусом и линзой в течение

$$t_k = t_n - t_F = \sqrt{2h/g} - \sqrt{h/g} = \sqrt{h/g}\left(\sqrt{2}-1\right) = 0{,}1 \text{ с}.$$

19. На рисунке изображен отрезок AB, расположенный на главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F. Построить изображение этого отрезка в линзе.

Решение

Так как точка A расположена за фокусом линзы, то ее изображение действительное. Для построения изобра-

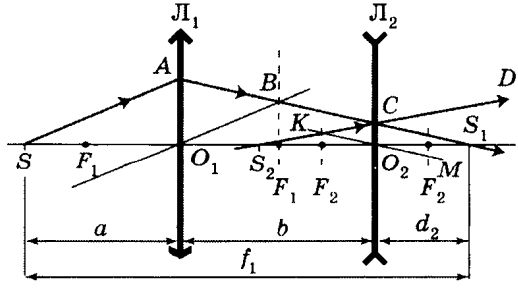


жения точки A строим произвольный луч AC, проводим параллельно ему побочную оптическую ось MN, которая пересекает фокальную плоскость в точке K; CK — ход луча AC после преломления в линзе; A_1 — изображение точки A. Аналогично можно построить действительные изображения всех точек, принадлежащих участку $[AF)$. При приближении к фокусу F изображение точек участка $[AF)$ устремляется к бесконечности (см. рис.). Таким образом, участок $[AF)$ изображается в линзе в виде луча A_1D.

Точка B расположена между линзой и фокусом, поэтому ее изображение будет мнимым. Проведем луч $BE \parallel MN$; KE — ход луча BE после преломления в линзе, B_1 — мнимое изображение точки B. Аналогично строятся мнимые изображения всех точек, принадлежащих участку $[BF)$. По мере приближения к фокусу изображения точек этого участка устремляются к бесконечности, и участок $[BF)$ изображается в виде луча B_1P.

Итак, отрезок AB изображается в линзе в виде двух лучей: действительного луча A_1D и мнимого B_1P.

20. Источник света находится на расстоянии a = 35 см от собирающей линзы с фокусным расстоянием F_1 = 20 см. По другую сторону линзы на расстоянии b = 38 см расположена рассеивающая линза с фокусным расстоянием F_2 =12 см. Где будет находиться изображение источника?



Решение

Изображение источника S можно построить на основании методики, изложенной в предыдущих задачах. Рассмотрим ход луча SA. Проводим $NO_1 \| SA$, проходящий через оптический центр линзы $Л_1$. Он пересекает фокальную плоскость этой линзы в точке B. AB — ход луча SA после преломления в линзе $Л_1$. Этот луч попадает на рассеивающую линзу $Л_2$ в точке C. Через оптический центр O_2 линзы $Л_2$ проводим луч $O_2M \| BC$. Он пересекает фокальную плоскость линзы $Л_2$ в точке K; KC — продолжение луча после преломления в линзе, CD — его ход после линзы $Л_2$. Продолжение луча CD пересекает оптическую ось системы линз в точке S_2; S_2 — мнимое изображение источника S в системе, состоящей из собирающей и рассеивающей линз.

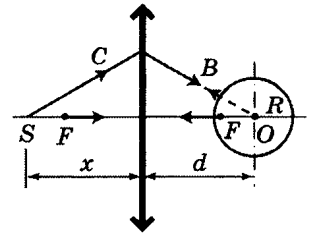
Найдем положение точки S_1 (изображение предмета в собирающей линзе). Пусть $S_1O_1 = f_1$ (расстояние от изображения S_1 до линзы $Л_1$). По формуле тонкой линзы $1/F_1 = 1/a + 1/f_1 \Rightarrow f_1 = F_1\, a/(a - F_1) = 46{,}6$ см.

Расстояние $O_2S_1 = f_1 - b = 46{,}6 - 38 = 8{,}6$ см $= d_2$, причем S_1 играет роль мнимого источника для рассеивающей линзы. Поэтому $1/F_2 = 1/\, d_2 + 1/f_2 \Rightarrow f_2 = F_2\, d_2\, /(d_2 - F_2)$.

Так как линза рассеивающая, а источник мнимый, то $F_2 = -12$ см, $d_2 = -8{,}6$ см. После подстановки находим, что $f_2 = 30{,}3$ см.

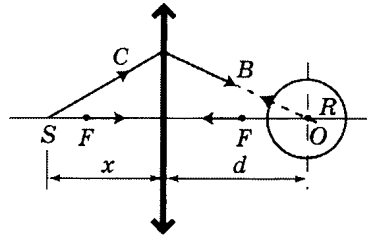
Итак, мнимое изображение источника будет находиться на расстоянии $f_2 = 30{,}3$ см влево от линзы $Л_2$.

21. Оптическая система состоит из собирающей линзы с фокусным расстоянием F и зеркального шара радиусом R, центр которого находится на оптической оси линзы на расстоянии $d > F$

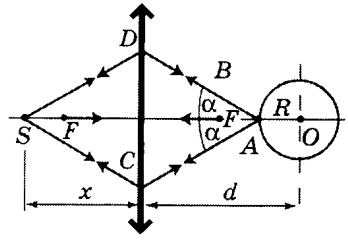


от нее. На каком расстоянии от линзы нужно расположить источник света S на оптической оси системы, чтобы его изображение совпало с самим источником?

Решение



Рассмотрим случай, изображенный на рисунке, где $d < R + F$. Если после преломления в линзе луч будет падать на зеркальный шар по направлению его радиуса, то, отразившись от шара, он пройдет тем же путем, но в обратном направлении. Изображение источника света S в системе, состоящей из линзы и шара, совпадет с источником. Итак, в этом случае изображение источника света в линзе будет находиться в точке O. Применяя формулу тонкой линзы, получаем $1/F = l/x + l/f$, где $f = d$. Отсюда $x = Ff/(f - F) = Fd/(d - F)$.



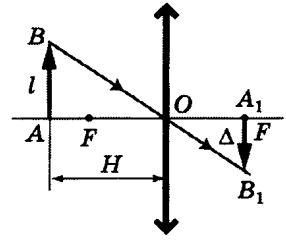
Пусть $d > R + F$. На рисунке изображен случай, аналогичный разобранному выше, из которого следует, что $x = Fd/(d - F)$. Однако при $d >> R + F$ возможен и другой вариант. В случае, представленном на рисунке, изображение источника света S в линзе получается в точке A. В силу симметрии луч, который первоначально шел по пути SDA, после отражения от шара пойдет по пути ACS, а луч, который проходил путь SCA, отразившись от шара в точке A, пройдет путем ADS. Таким образом, в этом случае изображение источника света S в системе, состоящей из линзы и шара, совпадает с источником.

Изображение источника S в линзе будет находиться в точке A, если выполняется уравнение $1/F = 1/x + l/f$, где $f = d - R$. Отсюда находим, что

$$x = Ff/(f - F) = F(d - R)/(d - R - F).$$

22. При аэрофотосъемках используется фотоаппарат, объектив которого имеет фокусное расстояние $F = 8$ см. Разрешающая способность пленки $\Delta = 10^{-2}$ мм. На какой высоте должен лететь самолет, чтобы на фотографии можно было различить листья деревьев размером $l = 5$ см? При какой скорости самолета изображение не будет размытым, если время экспозиции $\tau = 10^{-3}$ с?

Решение



H — высота, на которой летит самолет, f — расстояние от пленки до объектива. По формуле линзы получаем $1/H + 1/f = 1/F$. Так как $<< H$, то $1/H << 1/f \Rightarrow$ $\Rightarrow 1/f = 1/F \Rightarrow f = F$, т.е. изображение получается в фокальной плоскости. Расстояние между двумя соседними листьями можно взять равным l. На пленке это расстояние должно получиться не меньше Δ. Из подобия треугольников AOB и A_1OB_1 получаем $\Delta/l = F/H \Rightarrow H =$ $= Fl/\Delta = 400$ м.

Изображение считается неразмытым, если за время экспозиции оно смещается не больше чем на Δ.

За время экспозиции смещение любой точки листьев равно $\upsilon\tau$, где υ — скорость самолета, тогда и смещение изображения равно $\dfrac{F}{H}(\upsilon\tau)$.

Из условия неразмытости изображения получаем неравенство

$$\frac{F}{H}\upsilon\tau \le \Delta \Rightarrow \upsilon \le \frac{H\Delta}{F\tau} = 100 \text{ м/с} = 360 \text{ км/ч}.$$

Задачи для самостоятельного решения

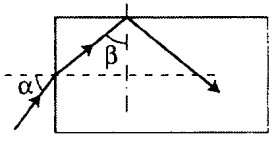
1. В кювете с жидкостью на глубине 3 см находится точечный источник света, который начинает смещаться вдоль вертикали со скоростью 10^{-3} м/с. На дне кюветы находится плоское зеркало. Слой жидкости в кювете 4 см, а на поверхности над источником света плавает черный диск радиусом 6 см. Через какое время источник света станет видим для внешнего наблюдателя? Показатель преломления жидкости $n = \sqrt{2}$.

   Ответ: 10 с.

2. В стеклянном блоке с показателем $n = 1{,}5$ имеется сферическая воздушная полость диаметром 1 см. На полость из воздуха направлен широкий параллельный пучок лучей света. Определите диаметр части пучка света, прошедшего в полость.

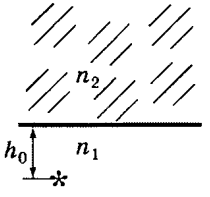
   Ответ: 0,67 см.

3. На торец стеклянного стержня падает свет под углом α. Каким должен быть наименьший показатель преломления стекла, чтобы свет, вошедший в стержень, не мог выйти через его боковую стенку независимо от угла α?



   Ответ: $\sqrt{1+\sin^2\alpha}$.

4. Светящуюся точку, находящуюся в среде с показателем преломления n_1, рассматривают невооруженным глазом из среды с показателем преломления n_2, причем $n_1 < n_2$. Каково будет кажущееся расстояние точки до границы раздела сред, если точка находится от этой границы на расстоянии



h_0, а глаз находится так, что в него попадают лучи, падающие на границу раздела под небольшими углами.

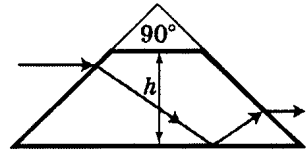
5. Наблюдатель рассматривает горошину через толстое стекло, нижняя грань которого расположена на расстоянии l = 5 см от горошины. Толщина стекла H = = 3 см, коэффициент его преломления 1,5. Определите, на каком расстоянии от нижней грани стекла находится видимое изображение горошины.

   Ответ: 4 см.

6. На грань стеклянной призмы с преломляющим углом 60° падает луч света под углом 45°. Найдите угол преломления луча при выходе его из призмы и угол отклонения луча от первоначального направления, если показатель преломления стекла призмы n = 1,5.

   Ответ: 53°; 38°.

7. Для обращения изображения часто используют призму, представляющую собой усеченную прямоугольную равнобедренную призму. Определите минимальную длину основания призмы, при которой пучок света, целиком заполняющий боковую грань, полностью пройдет через призму. Высота призмы h = 2,1 см. Показатель преломления стекла n = 1,41.

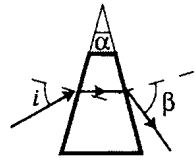


   Ответ: 10 см.

8. Сечение полости в стеклянном брусе имеет форму равностороннего треугольника. Показатель стекла $\sqrt{3}$. Перпендикулярно грани падает луч света. Определите угол выхода луча из другой грани призмы.

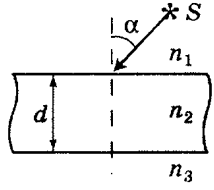
   Ответ: 30°.

9. На рисунке показан симметричный ход луча в равнобедренной призме с углом при вершине $\alpha = 30^\circ$ (внутри призмы луч распространяется параллельно основанию). Найдите угол отклонения луча β. Показатель преломления призмы $n = 2$.



Ответ: 32°.

10. Плоско-параллельная пластина толщиной d с показателем преломления n_2 находится в среде с показателем преломления $n_1 < n_2$. Луч света из точки S падает на пластинку под углом α_1. На сколько ближе будет казаться точка S, если ее рассматривать через пластинку под малым углом к нормали?



Ответ: $Y = d(1 - n_1/n_2)$.

11. Собирающая линза дает изображение некоторого предмета на экране. Высота изображения при этом равна a. Оставляя неподвижным экран и предмет, начинают двигать линзу и находят, что при втором четком изображении предмета на экране высота изображения равна b. Определите высоту предмета.

Ответ: $h = \sqrt{ab}$.

12. Предмет в виде отрезка длины L расположен на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием F. Середина отрезка расположена на расстоянии a от линзы так, что линза дает действительное изображение всех точек предмета. Определите, во сколько раз длина изображения больше длины предмета?

Ответ: $\Gamma = \dfrac{4F^2}{4(F-a)^2 - L^2}$.

13. Вдоль оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 12$ см расположен предмет, один конец которого находится на расстоянии $d_1 = 17{,}9$ см от линзы, а другой конец — на расстоянии $d_2 = 18{,}1$ см. Определите продольное увеличение изображения предмета.

Ответ: $K = 4$.

14. Чему равно наименьшее возможное расстояние S_0 между предметом и его действительным изображением, создаваемым с помощью собирающей линзы с фокусным расстоянием F?

Ответ: $S_0 = 4F$.

15. На каком расстоянии от собирающей линзы надо поместить предмет, чтобы расстояние между предметом и его действительным изображением было минимальным? Фокусное расстояние линзы равно F.

Ответ: $2F$.

16. Расстояние между точечным источником света и экраном L. Между ними помещается собирающая линза, которая дает на экране резкое изображение точечного источника при двух положениях линзы. Определите фокусное расстояние F линзы, если расстояние между указанными положениями линзы l.

Ответ: $F = (L^2 - l^2)/4L$.

17. С помощью линзы с фокусным расстоянием F на экране получают уменьшенное и увеличенное изображение предмета, находящегося на расстоянии L от экрана. Найдите отношение размеров изображений в обоих случаях.

Ответ: $H_1 / H_2 = 16L^2F^2 / \left(L + \sqrt{L^2 - 4LF}\right)^4$.

18. Плоскую поверхность плосковыпуклой линзы посеребрили (фокусное расстояние линзы $F_л$). Найдите фокусное расстояние получившегося зеркала. Свет падает со стороны стекла.

Ответ: $F = F_л/2$.

19. Выпуклая сторона плосковыпуклой линзы с радиусом кривизны R посеребрена. Свет падает на плоскую поверхность линзы. Фокусное расстояние такой оптической системы равно F. Определите показатель преломления материала линзы.

Ответ: $n = \dfrac{R}{2F}$.

20. Вогнутая сторона плосковогнутой линзы с радиусом кривизны R посеребрена. Свет падает на плоскую поверхность линзы. Определите оптическую силу такой системы, если показатель преломления стекла линзы n.

Ответ: $D = -2n/R$.

21. Вогнутое зеркало с радиусом кривизны $R = 40$ см заполнено водой ($n = {}^4/_3$). Найдите оптическую силу этой системы.

Ответ: $D = 7$ дптр.

22. Источник света расположен на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы на ее оси. За линзой перпендикулярно к оптической оси помещено плоское зеркало. На каком расстоянии от линзы нужно поместить зеркало, чтобы лучи, отраженные от зеркала, пройдя вторично через линзу, стали параллельными.

Ответ: $3F/2$.

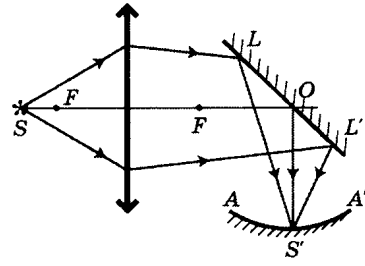
23. Слева от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 40$ см расположен точечный источник света на расстоянии $d = 60$ см. Справа от линзы на расстоянии $l = 70$ см расположено перпендикулярно главной оптической оси плоское зеркало. Определите расстояние по отношению к линзе до действительного и мнимого изображения источника света.

Ответ: 20 см; 120 см.

24. Оптическая система состоит из собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 30$ см и плоского зеркала, находящегося за линзой на расстоянии $b = 15$ см от нее. Найдите положение изображения в этой системе, если предмет находится перед линзой на расстоянии $d_1 = 15$ см от нее. Постройте ход лучей.

Ответ: 60 см.

25. Светящаяся точка S с помощью линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ см и вращающегося зеркала LL' проектируется на круглый экран AA'. Определите линейную скорость V, с которой перемещается изображение точки по экрану, если зеркало вращается вокруг оси O с угловой скоростью $\omega = 1$ рад/с. Расстояние от центра линзы до оси зеркала $L = 300$ см, расстояние от светящейся точки до центра линзы $d = 10{,}2$ см.



Ответ: $V = 4{,}2$ м/с.

26. Расположите две линзы так, чтобы параллельные лучи, пройдя сквозь обе линзы, оставались параллельными: а) в случае двух собирающих линз; б) в случае одной рассеивающей и одной собирающей линзы.

27. Две одинаковые тонкие собирающие линзы сложены вплотную так, что главные оптические оси их совпадают. Эта система линз дает увеличение в $k = 4$ раза действительного изображения предмета, помещенного на расстоянии $d = 25$ см перед системой линз. Найдите оптическую силу одной линзы.

Ответ: $D_л = 2{,}5$ дптр.

28. Две равнофокусные линзы: выпуклая и вогнутая с $F = 80$ см — находятся одна от другой на расстоянии 80 см. Где нужно поместить светящуюся точку перед выпуклой линзой, чтобы лучи, пройдя через обе линзы, вышли параллельным пучком.

Ответ: 160 см.

29. Точечный источник света помещен на оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 0{,}2$ м на расстоянии 0,5 м от нее. По другую сторону линзы в ее фокальной плоскости помещена рассеивающая линза. Каким должно быть фокусное расстояние рассеивающей линзы, чтобы мнимое изображение в ней источника совпало с самим источником?

Ответ: 0,1 м.

30. Две тонкие линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 7$ см и $F_2 = -6$ см расположены на расстоянии $l = 3$ см друг от друга. На каком расстоянии от второй линзы находится фокус системы?

Ответ: 2,4 см.

31. Две тонкие выпуклые линзы с оптической силой D каждая расположены так, что центр одной лежит в фокусе другой линзы. На расстоянии $2F$ от первой линзы расположен предмет. Где находится изображение?

Ответ: $F/2$.

32. При пользовании лупой человек с нормальным зрением помещает предмет на расстоянии 3,8 см от ее центра. Какое увеличение дает лупа? Какова ее оптическая сила?

Ответ: 5,5; 22 дптр.

33. Для топографической съемки с самолета, летящего на высоте 2 км, необходимо получить снимок в масштабе 1:4000. Каково должно быть фокусное расстояние объектива фотоаппарата?

Ответ: 50 см.

34. Бегун был сфотографирован с расстояния l = 10 м фотоаппаратом, имеющим объектив с фокусным расстоянием F = 50 мм. Размытие деталей изображения на пленке оказалось равным d = 1 мм. Время экспозиции t = 0,02 с. Определите скорость бегуна.

Ответ: 10 м/с.

35. В течение какого времени может быть открыт затвор фотоаппарата при съемке прыжка в воду с вышки высотой 5 м? Фотографируется момент погружения в воду. Фотограф находится на расстоянии 10 м от прыгуна. Фокусное расстояние объектива фотоаппарата 10 мм. На негативе допустимо размытие изображения 0,5 мм.

Ответ: $5 \cdot 10^{-2}$ с.

36. Изображение предмета на матовом стекле фотоаппарата при фотографировании с расстояния 15 м получилось высотой 30 мм, а с расстояния 9 м — 51 мм. Найдите фокусное расстояние объектива.

Ответ: $^3/_7$ м.

ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

Примеры решения задач с кратким или развернутым ответом

1. Радиолокатор работает на длине волны λ = 15 см и испускает импульсы с частотой ν = 4 кГц. Длительность каждого импульса τ = 2 мкс. Какова наибольшая дальность обнаружения цели?

Решение

Зависимость напряженности поля E электромагнитного излучения от времени приведена на рисунке. Радиолокатор излучает электромагнитные волны с частотой

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{15 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}} = 2 \cdot 10^9 \text{ Гц}$$

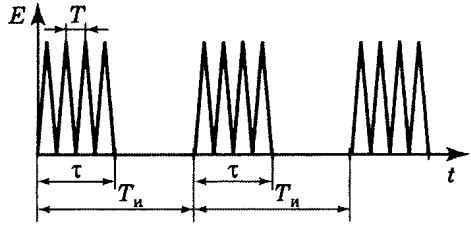
и периодом $T = 1/f = 0{,}5 \cdot 10^5$ с $= 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ мкс.

Число колебаний в одном импульсе

$$N = \frac{\tau}{T} = \frac{2 \text{ мкс}}{0{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ мкс}} = 4000.$$

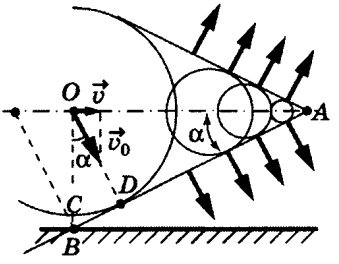
Период следования импульсов

$$T_и = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{4 \cdot 10^3 \text{ Гц}} = 0{,}25 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 250 \text{ мкс}.$$



Пусть цель находится на расстоянии L от радиолокатора. Электромагнитный импульс проходит до цели и обратно расстояние $2L$, распространяясь со скоростью света c, затрачивая на это время $t = 2L/c$. При этом обратно на радиолокатор электромагнитный импульс должен вернуться до того, как будет излучен следующий импульс, т.е. $t \le T_и \Rightarrow 2L/c \le T_и \Rightarrow L \le cT_и/2 = 37{,}5$ км.

2. Самолет летит горизонтально на высоте $H = 4$ км со сверхзвуковой скоростью. Звук дошел до наблюдателя через $l = 10$ с после того, как над ним пролетел самолет. Определить скорость самолета, если скорость звука $v_0 = 340$ м/с.



Решение

B — точка, в которой находится наблюдатель, A — точка, в которой находится самолет в момент времени t. Из каждой точки, которую пролетает самолет, распространяется сферическая звуковая волна. Если сложить все звуковые волны для момента, когда самолет находится в точке A, то получится волновая поверхность в виде конуса. По мере движения самолета эта поверхность (фронт волны) распространяется со скоростью звука v_0. Это и есть ударная звуковая волна. На рисунке $OD \perp AB$, причем $OD = v_0 t$, $AO = vt$, $OB = H$ и

$$BD = \sqrt{OB^2 - OD^2} = \sqrt{H^2 - (v_0 t)^2};\ \angle BOD = \angle BAO$$

как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Поэтому прямоугольные треугольники BOD и BOA подобны. Из подобия следует, что

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{BD} \Rightarrow \frac{vt}{v_0 t} = \frac{H}{\sqrt{H^2 - (v_0 t)^2}} \Rightarrow v = \frac{Hv_0}{\sqrt{H^2 - (v_0 t)^2}} = 648 \text{ м/с}.$$

3. Колебательный контур приемника состоит из катушки и конденсатора с площадью пластин S = 800 см^2 и расстоянием d = 1 мм между ними; пространство между пластинами заполнено слюдой (диэлектрическая проницаемость ε = 7). На какую длину волны настроен контур, если известно отношение максимального напряжения на конденсаторе к максимальному току в катушке n = 100 В/А? Активным сопротивлением можно пренебречь.

Решение

Частота свободных колебаний в контуре $\nu_0 = 1/\left(2\pi\sqrt{LC}\right)$, где $C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d$ — емкость конденсатора, а L — индуктивность катушки, которую можно определить из условия сохранения энергии в контуре. Когда напряжение на конденсаторе максимально, т.е. $u = u_m$, вся энергия сосредоточена в электрическом поле конденсатора: $W_э = Cu^2/2$.

Если ток через катушку максимален, т.е. $I = I_m$, то вся энергия контура сосредоточена в магнитном поле катушки: $W_м = LI^2/2$.

По закону сохранения энергии

$$W_Э = W_М \Rightarrow Cu_m^2/2 = LI_m^2/2 \Rightarrow L = C(u_m/I_m)^2 = Cn^2.$$

Таким образом, собственная частота контура

$$\nu_0 = 1/\left(2\pi\sqrt{LC}\right) = 1/\left(2\pi\sqrt{C^2n^2}\right) = 1(2\pi Cn).$$

Контур настроен на длину волны λ электромагнитного излучения, частота которого $\nu = \nu_0$ (условие резонанса). Так как $\nu = c/\lambda$, где $c = 3\cdot10^8$ м/с — скорость света, то получаем $c/\lambda = 1/(2\pi Cn) \Rightarrow \lambda = 2\pi cCn = 2\pi cn\varepsilon\varepsilon_0 S/d =$ $= 933$ м.

4. Наблюдатель удаляется со скоростью v от источника звука с частотой ν. Какой частоты звук он будет воспринимать, если скорость звука v_0?

Решение

Пусть в некоторый момент времени наблюдатель принимает звуковую волну в определенной фазе колебаний (например, ее максимум). Если бы наблюдатель был неподвижен, то следующий максимум колебаний он принял бы через время, равное периоду звуковых колебаний T. Но так как наблюдатель удаляется от источника, то он принимает следующий максимум колебаний через время $\tau > T$ на промежуток времени, необходимый для того, чтобы волна прошла расстояние $v\tau$, на которое смещается наблюдатель. Этот промежуток времени равен $v\tau/v_0$, где v_0 — скорость звука. Итак,

$$\tau - T = \tau v/v_0 = \tau = T + \tau v/v_0. \qquad (1)$$

Таким образом, период звуковых колебаний, воспринимаемых наблюдателем, равен τ, а их частота ν', причем $\tau = 1/\nu'$. Период излучаемых источником колебаний $T = 1/\nu$. Подставляя это в формулу (1), получаем

$$\frac{1}{\nu'} = \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu'}\frac{v}{v_0} \Rightarrow \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu'}\left(1 - \frac{v}{v_0}\right).$$

В итоге

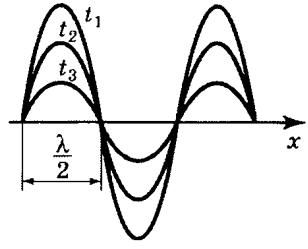
$$\nu' = \nu(1 - v/v_0). \qquad (2)$$

Из формулы (2) видно, что наблюдатель принимает звук более низкой частоты. Если наблюдатель движется к источнику, то он будет принимать звук более высокой частоты. Рассмотренное выше справедливо и в том случае, когда неподвижен наблюдатель, а движется источник.

Это явление называется эффектом Доплера. Эффект Доплера можно наблюдать и для волн другой физической природы, например для волн оптического диапазона.

5. Вдоль оси X распространяются в противоположных направлениях две плоские волны с одинаковой частотой ω и амплитудой A. Что получится в результате сложения этих волн?

Решение



Уравнение одной из волн можно записать в виде $s_1(x, t) = A\cos(\omega t - kx)$, тогда уравнение волны, распространяющейся навстречу: $s_2(x, t) = A\cos(\omega t + kx)$, где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. В результате сложения получаем

$$s(x,t) = s_1 + s_2 = A\cos(\omega t - kx) + A\cos(\omega t + kx) =$$
$$= A(\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)) =$$
$$= 2A\cos\left(\frac{(\omega t - kx) + (\omega t + kx)}{2}\right)\cos\left(\frac{(\omega t - kx) + (\omega t + kx)}{2}\right) =$$
$$= 2A\cos\omega t\cos kx.$$

Как видно, после сложения образуется волна $s(x, t)$ с амплитудой колебаний, равной $2A$. Отметим также, что $\cos kx = 0$ при

$$kx = \frac{\pi}{2} + \pi n = \frac{\pi}{2}(2n+1),$$

где $n = 0, 1, 2,\ldots$ ($n < 0$ не подходит по смыслу задачи).

Следовательно, в точках волны $x_n = \frac{\pi}{2k}(2n+1)$ отклонение $s(x, t) = 0$. Подставляя $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, получаем $x_n = \frac{\lambda}{4}(2n+1)$.

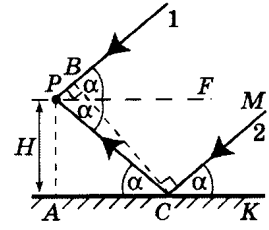
Расстояние между любыми двумя соседними точками волны, в которых отклонение обращается в нуль:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{4}(2(n+1)+1) - \frac{\lambda}{4}(2n+1) = \frac{\lambda}{2}.$$

Волну, задаваемую уравнением $s(x, t) = 2A\cos\omega\cdot\cos kx$, называют стоячей волной, а ее неподвижные точки x_n называют узлами волны. Все точки волны, расположенные между двумя узлами, колеблются в одинаковых фазах; при переходе через узел фаза колебаний точек изменяется на π. Стоячая волна не переносит энергию.

На рисунке представлена стоячая волна для трех различных моментов времени t_1, t_2, t_3.

6. Приемник радиосигналов, следящий за появлением спутника Земли из-за горизонта, расположен на берегу озера на высоте $H = 3$ м над поверхностью воды. По мере поднятия спутника над горизонтом наблюдаются периодические изменения интенсивности принимаемого сигнала. Определить частоту радиосигнала спутника, если максимумы интенсивности наблюдались при углах возвышения спутника над горизонтом $\alpha_1 = 3^\circ$ и $\alpha_2 = 6^\circ$.



Решение

Так как спутник находится на большом расстоянии от приемника, то принимаемый от него радиосигнал можно считать плоской волной (BC — волновая поверхность). В приемник P попадает луч 1, идущий непосредственно от спутника, и луч 2, отразившийся от поверхности озера, причем в точке C выполняется закон отражения. Поэтому $\angle ACP = \angle MCK = \alpha$ (α — угол возвышения спутника над горизонтом).

Проводим $PF \parallel AC$, тогда $\angle CPF = \angle ACP = \alpha$ и $\angle BPF = \angle MCK = \alpha$ как углы с соответственно параллельными сторонами. Итак, $\angle BPC = 2\alpha$.

Разность хода лучей равна $CP - BP$. Из ΔACP: $CP = H/\sin\alpha$, а из $\Delta\ BCP$: $BP = CP\cos 2\alpha = (H/\sin\alpha)\cos 2\alpha$. Следовательно,

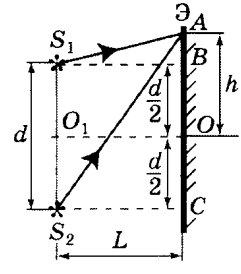
$$CP - BP = \frac{H}{\sin\alpha} - \frac{H}{\sin\alpha}\cos 2\alpha = \frac{H}{\sin\alpha}(1 - \cos 2\alpha) =$$
$$= \frac{H}{\sin\alpha}\cdot 2\sin^2\alpha = 2H\sin\alpha.$$

Поскольку угол α мал, $\sin\alpha = \alpha$, тогда $CP - BP = 2H\alpha$.

Максимум интенсивности принимаемого сигнала наблюдается, если разность хода равна целому числу волны, следовательно, для углов α_1 и α_2 получаем уравнения: $2H\alpha_1 = k\lambda$, $2H\alpha_2 = (k + 1)\lambda$, где k — целое число. После вычитания первого уравнения из второго получим $(k + 1)\lambda - k\lambda = 2H(\alpha_2 - \alpha_1) \Rightarrow \lambda = 2H(\alpha_2 - \alpha_1)$.

Частота радиосигнала $\upsilon = c/\lambda = c/(2H(\alpha_2 - \alpha_1))$, где $c = 3\cdot 10^8$ м/с — скорость света, $\alpha_1 = 3^\circ = \pi/60$ рад, а $\alpha_2 = 6^\circ = \pi/30$ рад. После подстановки получим $\nu = 10^9$ Гц.

7. Два точечных когерентных источника света S_1 и S_2 расположены на расстоянии d друг от друга. На расстоянии $L >> d$ от источников помещен экран. Найти расстояние между соседними интерференционными полосами вблизи середины экрана, если источники излучают свет с длиной волны λ.



Решение

Пусть A — точка, в которой наблюдается интерференционный максимум, расположена на расстоянии h от середины экрана O. Разность хода световых волн, излучаемых источниками, равна $S_2A - S_1A$. Из прямоугольного ΔS_1AB:

$$S_1A^2 = S_1B^2 + AB^2 = L^2 + (h - d/2)^2 = L^2(1 + (h - d/2)^2/L^2);$$
$$S_1A = L\sqrt{1 + ((h - d/2)/L)^2}.$$

По условию задачи $d << L$ и $h << L$, поэтому $(h - d/2)/L << 1$. Известно, что при $|x| << 1$

$$\sqrt{1+x} = 1 + (1/2)x,$$

поэтому

$$S_1A = L\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{h - d/2}{L}\right)^2\right) = L + \frac{1}{2}\frac{(h - d/2)^2}{L}.$$

Из прямоугольного Δ S_2AC: $S_2A^2 = S_2C^2 + AC^2 = L^2 + (h + d/2)^2$ или

$$S_2A^2 = L^2\ (l + ((h + d/2)/L)^2) \Rightarrow S_2\ A =$$
$$= L\sqrt{1 + ((h + d/2)/L)^2}.$$

Так как $(h + d/2)^2/L << l$, то

$$S_2A = L\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{h + d/2}{L}\right)^2\right) = L + \frac{1}{2}\frac{(h + d/2)^2}{L}.$$

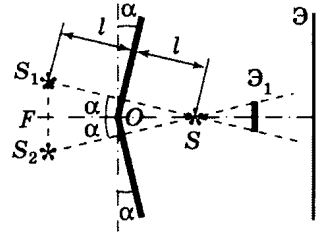
Следовательно, разность хода

$$S_2A - S_1A = \frac{1}{2}\frac{(h+d/2)^2}{L} - \frac{1}{2}\frac{(h-d/2)^2}{L} =$$
$$= \frac{(h+d/2)^2 - (h-d/2)^2}{2L} = \frac{hd}{L}.$$

С другой стороны, так как A — точка интерференционного максимума, то $S_2A - S_1A = k\lambda$, где $k = 0, 1, 2$. Следовательно, $k\lambda = hd/L$. Отсюда получаем, что интерференционные максимумы располагаются на экране симметрично относительно линии O_1O на расстояниях $h = hk = k\lambda L/d$. Максимум, соответствующий целому числу k, называется максимумом порядка k. Максимум порядка $(k + 1)$ будет находиться на расстоянии $h_{k+1} = (k + l)\lambda L/d$ от середины экрана. Расстояние между максимумами $h_{k+1} - h_k = (k + 1)\lambda L/d - k\lambda L/d = \lambda L/d$.

Из последней формулы следует, что расстояние между максимумами тем больше, чем больше отношение L/d.

8. Два плоских зеркала образуют между собой угол, близкий к 180°. На равных расстояниях l от зеркал расположен источник света S. Определить расстояние между соседними интерференционными полосами на экране, находящимися на расстоянии $L >> l$ от линии пересечения зеркал. Длина световой волны λ. Непрозрачный экран $Э_1$ препятствует прямому попаданию света на экран Э (см. рис.). Угол α задан.

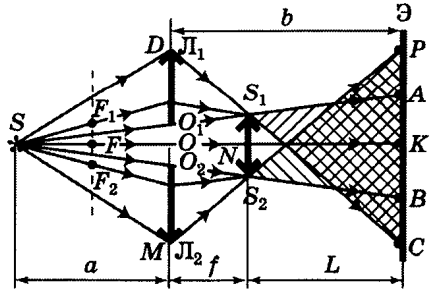


Решение

После отражения света от плоских зеркал образуются когерентные волны, которые на экране Э создают интерференционную картину. Можно считать, что источниками этих когерентных волн являются мнимые изображения S_1 и S_2 источника S в плоских зеркалах. В равнобедренном $\Delta\ S_1S_2S$: $S_1S = S_2S = 2l$ и $\angle S_1SO = \angle S_2SO = \alpha$, причем угол α мал, так как угол между зеркалами близок к 180°. Расстояние между мнимыми источниками $d = S_1S_2 = 2S_1F = 2S_1\ S \sin\alpha = 2{\cdot}2l\sin\alpha = 4l\alpha$.

Так как $L >> l$, то можно считать, что расстояние от источников S_1, и S_2 до экрана Э равно L. Тогда найдем, что расстояние между интерференционными полосами равно $\lambda L/d = \lambda L/(4\alpha l)$.

9. Собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 10$ см разрезана пополам вдоль главной оптической оси, и половинки раздвинуты на расстояние $l = 0{,}5$ мм. Оценить число интерференционных полос на экране, расположенном за линзой на расстоянии $b = 60$ см, если перед линзой находится точечный источник монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм, удаленный от нее на $a = 15$ см. Участок O_1O_2 закрыт непрозрачным экраном.



Решение

После того как линзу разрезали, образовалось две линзы $Л_1$ и $Л_2$ с оптическими центрами O_1 и O_2 и фокусами F_1 и F_2. Так как радиусы кривизны поверхностей не изменились, то фокусные расстояния образовавшихся линз равны фокусному расстоянию неразрезанной линзы F. Свет от источника S разделяется на два когерентных пучка: через линзу $Л_1$ проходит пучок, ограниченный лучами SO_1 и SD, а через линзу $Л_2$ проходит световой пучок, ограниченный лучами SO_2 и SM. Все лучи верхнего пучка пересекаются в точке S_1, являющейся изображением источника S в линзе $Л_1$. Световой пучок, прошедший через линзу $Л_1$, падает на экран между точками A и C.

Все лучи нижнего пучка пересекаются в точке S_2, являющейся изображением источника S в линзе $Л_2$. На экран этот световой пучок попадает между точками B и P. Таким образом, на экране когерентные пучки перекрываются между точками A и B. На этой части экрана можно наблюдать интерференционную картину. Можно также считать, что интерферирующие пучки созданы источниками S_1 и S_2.

Пусть f — расстояние от линз до изображений S_1 и S_2. По формуле тонкой линзы $1/F = 1/a + 1/f \Rightarrow f = Fa/(a - F) = 30$ см.

Расстояние между изображениями S_1 и S_2 обозначим через d, тогда из подобия $\Delta\ SO_1O_2$ и $\Delta\ SS_1S_2$ получим

$$\frac{O_1O_2}{S_1S_2} = \frac{SO}{SN} \Rightarrow \frac{l}{d} = \frac{a}{a+f} \Rightarrow d = \frac{l(a+f)}{a} = l\left(1+\frac{f}{a}\right) = 0{,}15 \text{ см}.$$

Расстояние от S_1 и S_2 до экрана Э: $L = b - f = 30$ см. Следовательно, можно определить расстояние между интерференционными максимумами:

$$\lambda L/d = 30\lambda/0{,}15 = 200\lambda = 10^{-4} \text{ см} = 10^{-2} \text{ см}.$$

Размер AB интерференционной картины на экране можно найти из подобия $\Delta\ SO_1O_2$ и $\Delta\ SAB$:

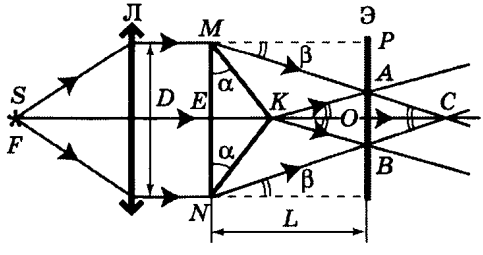
$$\frac{O_1O_2}{AB}=\frac{SO}{SK}\Rightarrow AB=\frac{O_1O_2\cdot SK}{SO}=\frac{l(a+b)}{a}=l\left(1+\frac{b}{a}\right)=0{,}25\text{ см}.$$

Число интерференционных полос на экране равно размеру интерференционной картины AB, деленной на расстояние между максимумами, т.е. N = 0,25 см/10^{-2} см = 25.

10. Точечный источник света S расположен в фокусе линзы, за которой находится бипризма с углом α = = 0,01 рад. На каком расстоянии L от бипризмы можно наблюдать наибольшее число интерференционных полос? Сколько полос в этом случае можно увидеть на экране? Чему равна ширина полос? Коэффициент преломления стекла бипризмы n = 1,5, длина волны света λ = 0,5 мкм, диаметр линзы D = 6 см.

Решение

Поскольку источник света находится в фокусе линзы, на бипризму падает параллельный пучок света. Параллельный пучок света разбивается бипризмой на два параллельных пучка, которые отклонены от первоначального направления на угол $\beta = (n - 1)\alpha$. Наибольшее число интерференционных полос можно наблюдать в том месте, где самая большая площадь пересечения интерферирующих пучков (как видно из построения, это будет между



точками A и B). На экране Э, проходящем через точки A и B, можно наблюдать интерференционную картину.

Из ΔCEM: $CE = ME/(\text{tg}\beta) = D/(2\text{tg}\beta)$.

Отметим, что $CE = KE + CK = CK$, так как $KE << CK$. Четырехугольник $ACBK$ — ромб, поэтому $CO = KO = CK = 2KO = CE \Rightarrow KO = CK/2 = CE/2 = D/(4\text{tg}\beta) = L$. Учитывая, что угол β мал и $\text{tg}\beta = \beta$, находим $L = D/(4\beta) = D/(4\alpha(n - 1)) = 300$ см $= 3$ м.

Пренебрегая KE, получим $AO = ME/2 \Rightarrow AB = MN/2 = D/2 = 3$ см. Это и есть размер интерференционной картины. При этом максимальная разность хода лучей двух пучков равна $MA - KA$. Выразим эту разность.

Из $\Delta\ APM$: $MA = L/\cos\beta$.

Из $\Delta\ KEM$: $KE = (D/2)\text{tg}\alpha$; $KO = EO - KE = L - (D/2)\text{tg}\alpha$.

Из $\Delta\ AOK$: $KA = KO/\cos\beta = (L - (D/2)\text{tg}\alpha)/\cos\beta$.

Итак,

$$MA - KA = \frac{L}{\cos\beta} - \frac{L-(D/2)\text{tg}\,\alpha}{\cos\beta} =$$

$$= \frac{(D/2)\text{tg}\,\alpha}{\cos\beta} = \frac{D\,\text{tg}\,\alpha}{2\cos\beta} = \frac{D\alpha}{2} = 0{,}03 \text{ см}.$$

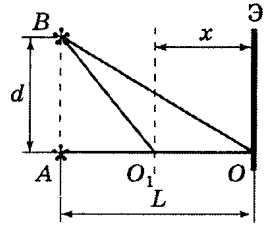
(При малых углах α и $\beta\text{tg}\alpha = \alpha$, $\cos\beta = 1$.)

Разность хода, соответствующая двум соседним максимумам, равна длине волны λ. Таким образом, число интерференционных полос, образующихся на экране,

$$N = \frac{MA - KA}{\lambda} = \frac{3\cdot10^{-4}\text{ м}}{0{,}5\cdot10^{-6}\text{ м}} = 6\cdot10^{2}.$$

Так как вся интерференционная картина занимает 3 см, то ширина одной полосы 3 см/($6\cdot10^2$) = $0{,}5\cdot10^{-2}$ см = $0{,}5\cdot10^{-4}$ м = 50 мкм.

11. От точечного монохроматического источника A отодвигают точечный монохроматический источник B (источники когерентны и синфазны) до тех пор, пока в точке O, где наблюдается интерференция, не наступает потемнение. При этом расстояние между A и B d = 2 мм. Расстояние между источником и экраном L = 9 м. На сколько нужно передвинуть экран, чтобы в точке O_1 возникло потемнение?



Решение

При удалении источника B первое потемнение в точке O возникает при условии, что разность хода волн от источников B и A равна половине длины волны, т.е. $BO - AO = \lambda/2$ или

$$\sqrt{L^2+d^2}-L=\lambda/2 \Rightarrow \sqrt{L^2(1+d^2/L^2)}-L=\lambda/2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L\left(\sqrt{1+(d/L)^2}-1\right)=\lambda/2. \qquad (1)$$

Известно, что при

$$|x| << 1 \Rightarrow 1+\sqrt{1+x}=1+x/2.$$

В нашей задаче $d/L << 1$, поэтому

$$\sqrt{1+(d/L)^2}=1+(d/L)^2/2$$

и, следовательно, уравнение (1) приводится к виду:

$$d^2/2L = \lambda/2 \Rightarrow d^2 = L\lambda.$$

Если экран приблизить к источникам на расстояние x, то минимум в точке O_1 будет соответствовать разности хода $3\lambda/2$, т.е. $BO_1 - AO_1 = 3\lambda/2$ или

$$\sqrt{(L-x)^2+d^2}-(L-x)=3\lambda/2.$$

Следовательно,

$$(L-x)\left(\sqrt{1+(d/(L-x))^2}-1\right)=3\lambda/2.$$

Учитывая, что и в этом случае $d/\ (L - x) << 1$, приходим к уравнению

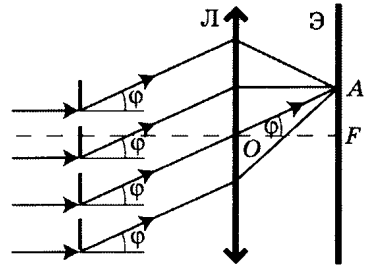
$$d^2/(2(L - x)) = 3\lambda/2 \Rightarrow d^2 = 3(L - x)\lambda.$$

Приравнивая выражения для d^2, получаем

$$L\lambda = 3(L - x)\lambda = x = 2L/3 = 6 \text{ м}.$$

12. Период дифракционной решетки $d = 4$ мкм. Дифракционная картина наблюдается с помощью линзы Л с фокусным расстоянием $F = 40$ см.

Определить длину λ световой волны падающего нормально на решетку света, если первый максимум получается на расстоянии $b = 5$ см от центрального.



Решение

Пусть направление на первый максимум характеризуется углом φ, тогда по формуле дифракционной решетки $d\sin\varphi = k\lambda = \lambda$, так как $k = 1$.

Из $\Delta\ OAF$: $\text{tg}\ \varphi = AF/OF = b/F$. При малых φ $\text{tg}\varphi = \sin\varphi = b/F$, поэтому $\lambda = db/F = 0{,}5$ мкм.

13. Дифракционная решетка содержит 400 штрихов на 1 мм. Нормально на решетку падает монохроматический красный свет с длиной волны $\lambda = 650$ нм. Под каким углом виден первый максимум? Сколько всего максимумов дает эта решетка? Каков максимальный угол отклонения лучей, соответствующих последнему дифракционному максимуму?

Решение

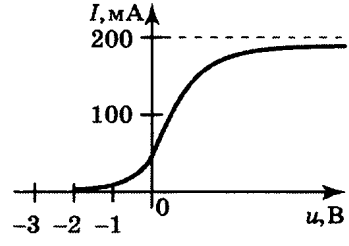
На 1 м решетки приходится $N = 400 \cdot 10^3 = 4 \cdot 10^5$ штрихов. Период дифракционной решетки $d = 1/N = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ м. Из формулы дифракционной решетки $d \sin\varphi = k\lambda$ при $k = 1$ находим угол φ_1, под которым виден первый максимум: $\sin \varphi_1 = \lambda/d = 0{,}26 \Rightarrow \varphi_1 = 15^\circ$.

При помощи дифракционной решетки можно наблюдать максимумы порядка $k \le d/\lambda = 3{,}8$. Учитывая, что k — целое число, получаем $k_{max} = 3$. Итак, данная дифракционная решетка будет давать центральный максимум, соответствующий $k = 0$, и по два симметрично расположенных максимума первого, второго и третьего порядков. Всего получаем 7 максимумов.

Максимальный угол отклонения лучей соответствует максимуму третьего порядка:

$$d\sin\varphi_{max} = 3\lambda \Rightarrow \sin\varphi_{max} = 3\lambda/d = 0{,}78 \Rightarrow \varphi_{max} = 51{,}3^\circ.$$

14. Красная граница фотоэффекта у лития $\lambda_{кр} = 5{,}2 \cdot 10^{-7}$ м. Какую задерживающую разность потенциалов нужно приложить к фотоэлементу, чтобы задержать электроны, излучаемые литием под действием ультрафиолетовых лучей с длиной волны $\lambda = 2 \cdot 10^{-7}$ м.



Решение

По заданной красной границе фотоэффекта легко определить работу выхода лития

$$h\nu_{кр} = AB \Rightarrow hc/\lambda_{кр} = AB. \quad (1)$$

В случае, когда литий освещается ультрафиолетовым светом, кванты которого обладают большей энергией, вырвавшиеся фотоэлектроны обладают скоростью v, а значит, и кинетической энергией, равной $m_e v^2/2$, где m_e — масса электрона.

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта запишется в виде

$$hc/\lambda = A + m_e v^2/2. \quad (2)$$

Для того чтобы задержать электроны, прикладывают задерживающую разность потенциалов $u_з$, причем

$$m_e v^2/2 = |e|\,|u_з|, \quad (3)$$

где $|e|$ — модуль заряда электрона.

После подстановки значений работы выхода из (1) и максимальной кинетической энергии из (3) в уравнение (2) получим

$$hc/\lambda = hc/\lambda_{кр} + |e||u_з| \Rightarrow |u_з| =$$
$$= pc(\lambda_{кр} - \lambda)/(|e|\lambda\lambda_{кр}) = 3{,}8 \text{ В}.$$

15. На рисунке представлена вольтамперная характеристика вакуумного фотоэлемента. Катод освещается светом с длиной волны $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^{-7}$ м.

Найти количество электронов N, вырываемых светом в единицу времени, а также работу выхода из катода.

Решение

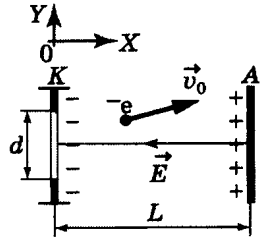
Как следует из графика, ток насыщения I_H = 200 мА, и он соответствует тому, что все N электронов, вырываемые из катода за Δt = 1 с, достигают анода. Заряд всех электронов $q = N|e|$, где $|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл — заряд электрона.

Тогда $I_H = q/\Delta t = N|e| = N = IH/|e| = 1{,}25 \cdot 10^{18}$.

Из рисунка также следует, что фототок прекращается при $u = -2$ В, следовательно, это и есть задерживающая разность потенциалов, которая связана с максимальной кинетической энергией электрона равенством $m_e v^2/2 = |e||u_з|$. Из уравнения Эйнштейна

$$h\nu = m_e v^2/2 + A_B \Rightarrow hc/\lambda = |e||u_з| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_B = hc/\lambda - |e||u_з| = 2{,}8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1{,}75 \text{ эВ}.$$

16. Излучение аргонового лазера с длиной волны λ = 500 нм сфокусировано на плоском фотокатоде в пятно диаметром d = 0,1 мм. Работа выхода фотокатода A_B = 2 эВ. На плоский анод, расположенный на расстоянии L = 30 мм от катода, подано ускоряющее напряжение u = 4 кВ. Найти диаметр пятна фотоэлектронов на аноде. Анод A расположен параллельно поверхности катода K.



Решение

Используя уравнение Эйнштейна для фотоэффекта, можно определить v_0 — скорость фотоэлектронов, вылетевших из катода:

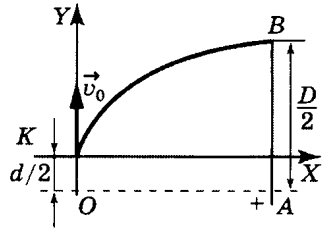
$$hc/\lambda = A_B + m_e v_0^2/2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{2(hc/\lambda - A_B)/m_e},$$

причем вектор скорости электрона $\vec{v}_0$ направлен произвольно в пространстве.

Между анодом и катодом существует однородное электрическое поле с напряженностью $E = u/L$, направленное от анода к катоду. Это поле действует на электрон с силой, равной по модулю $|e|E$ и направленной в сторону, противоположную вектору $\vec{E}$ ($|e|$ — модуль заряда электрона). Введем оси координат X и Y, направленные, как показано на рисунке. В направлении оси X электрон приобретает постоянное ускорение $a_x = |e|E/m_e$ (m_e — масса электрона) и совершает равноускоренное движение.

В направлении оси Y на электрон не действуют силы, его ускорение в этом направлении равно нулю, а движение является прямолинейным равномерным.

Диаметр пятна на аноде определяется электронами, вылетевшими из крайних точек катода. Кроме того, диаметр пятна тем больше, чем больше смещение электронов в направлении оси Y. В свою очередь, это смещение максимально, когда проекция скорости электрона на ось Y максимальна и когда время пролета электрона максимально. Это соответствует тому, что скорость электронов направлена вдоль оси J (см. рис.).



Поместив начало координат в центре катода, запишем уравнения движения электрона по осям координат:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + a_x t^2/2 = \\ = |e|Et^2/(2m_e);$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t = d/2 + v_0 t.$$

При попадании электрона на анод

$$x(t) = L = |e|Et^2_{\text{п}}/(2me).$$

Отсюда следует, что $t_{\text{п}} = \sqrt{2m_eL/(|e|E)}$, где $t_{\text{п}}$ — время пролета. В точке B, в которой электрон попадает на анод, $y_B = d/2 + v_0t_{\text{п}}$. Диаметр пятна на аноде

$$D = 2y_B = d + 2v_0t_{\text{п}} = d + 2\cdot\sqrt{\frac{2(hc/\lambda - A_B)}{m_e}}\sqrt{\frac{2m_eL}{|e|E}} =$$

$$= d + 4L\cdot\sqrt{\frac{hc/\lambda - A_B}{|e|u}}.$$

17. Мощность точечного источника монохроматического света $P_0 = 10$ Вт. Длина волны $\lambda = 500$ нм. На каком максимальном расстоянии этот источник будет замечен человеком, если глаз реагирует на световой поток $n = 60$ фотонов в секунду? Диаметр зрачка $d = 0{,}5$ см.

Решение

За промежуток времени Δt точечный источник излучает энергию $P_0\,\Delta t$, причем в любой момент времени эта энергия распределяется равномерно по поверхности сферы радиусом R. На единицу поверхности приходится энергия излучения $P_0\,\Delta t/(4\pi R^2)$, и, следовательно, в зрачок, находящийся на расстоянии R, попадает энергия $P_0\,\Delta tS/(4\pi R^2)$, где $S = \pi d^2/4$. Пусть за время Δt в зрачок попадает N фотонов, тогда световую энергию можно выразить как $Nh\nu = Nhc/\lambda$. Приравнивая значения энергий, получаем

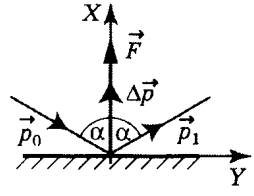
$$\frac{P_0\Delta t}{4\pi R^2}\left(\frac{\pi d^2}{4}\right) = Nh\frac{c}{\lambda} \Rightarrow \frac{P_0}{16R^2}d^2 = \frac{N}{\Delta t}h\frac{c}{\lambda}.$$

Но $\frac{N}{\Delta t} = n$, поэтому

$$\frac{P_0}{16R^2}d^2 = nh\frac{c}{\lambda} \Rightarrow R = \frac{d}{4}\sqrt{\frac{P_0\lambda}{nhc}} = 10^6 \text{ м} = 10^3 \text{ км}.$$

18. Свет от солнца падает на плоское зеркало площадью $S = 1$ м^2 под углом $\alpha = 60^\circ$. Найти силу светового давления, считая, что зеркало полностью отражает весь падающий на него свет. Известно, что средняя мощность солнечного излучения, приходящаяся на 1 м^2 перпендикулярной к излучению земной поверхности, $P = 1{,}4 \cdot 10^3$ Вт/м^2.

Решение



Падающие на зеркало фотоны упруго отражаются от него, причем их скорость остается равной скорости света c. После отражения импульс фотонов направлен вдоль отраженного луча. Изменение импульса фотонов обусловлено импульсом силы, действующей со стороны зеркала на фотоны. По третьему закону Ньютона точно такая же по модулю сила будет действовать на зеркало со стороны фотонов. За промежуток времени Δt на площадку S, расположенную перпендикулярно направлению распространения света, падает световая энергия, равная $P\Delta tS$. Если же площадка расположена (как в нашем случае) под углом, то энергия, которая на нее падает, $W = P\Delta tS\cos\alpha$.

На площадку падает белый свет, содержащий фотоны разных частот, поэтому падающая энергия $W = \sum N_i(h\nu_i)$, где N_i — количество фотонов частоты υ, прошедших через площадку за время Δt.

Рассмотрим фотон частоты υ_1, упруго отражающийся от площадки. Модули его импульса до и после отражения равны, т.е. $p_0 = p_1 = h\upsilon_1/c$. Введем оси X и Y, направленные, как показано на рисунке. Проекции начального и конечного импульсов выражаются формулами:

$$P_{0x} = -P_0\cos\alpha;\ P_{0y} = P_0\sin\alpha;$$

$$P_{1x} = P_0\cos\alpha;\ P_{1y} = P_0\sin\alpha.$$

Отсюда следует, что изменение импульсов по осям X и Y равны: $\Delta p_x = p_{1x} - p_{0x} = 2p_0\cos\alpha$, $\Delta p_y = 0$. Изменение импульса фотона

$$\Delta p = \sqrt{\Delta p_x^2 + \Delta p_y^2} = 2p_0\cos\alpha.$$

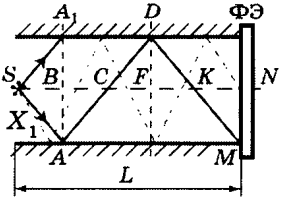
Изменение импульса N_i фотонов равно $(2p_0\cos\alpha)N_i$, а изменение импульса всех фотонов — $\Sigma N_i p_0\cos\alpha$. Из основного уравнения динамики изменение импульса равно импульсу действующей силы:

$$\sum(N_i 2p_0\cos\alpha) = F\Delta t \Rightarrow \sum\left(N_i 2\frac{h\nu_i}{c}\cos\alpha\right)F\Delta t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{c}\cos\alpha\sum(N_i h\nu_i) = F\Delta t.$$

Как уже отмечалось, сумма $\sum N_i h\nu_i = W$ — энергия излучения, равная, в свою очередь, $P\Delta tS\cos\alpha$. После подстановки в последнее уравнение получаем $(2/c)\cos\alpha P\Delta tS\cos\alpha = F\Delta t = F = (2P\cos^2\alpha)/c = 2{,}3\cdot10^{-6}$ H.

19. На оси длинной тонкостенной трубки радиусом $r = 1$ см с зеркально отражающими внутренними стенками расположен точечный источник S мощностью



$P = 1$ Вт, дающий излучение с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм. У торца трубки на расстоянии $L = 1$ м от источника расположен фотоэлемент ФЭ. Найти число фотонов, попадающих на фотоэлемент в одну секунду после двукратного отражения на стенках трубки.

Решение

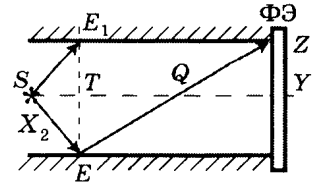
Прежде чем решать эту задачу, надо определить телесный угол как пространственный угол с вершиной в центре сферической поверхности радиусом R. Если этот угол опирается на сферической поверхности на площадку S, то $\alpha = S/R^2$.

На рисунке приведен ход луча SA, который испытывает два отражения на стенках трубки. Если луч выходит из точки S под большим углом к оси трубки, то он испытывает более двух отражений. Ход такого луча изображен пунктирной линией на рисунке.

AB и DF — перпендикуляры, восстановленные в точках падения луча. Так как $\angle SAB = \angle BAC$, то $\Delta\ SAB = \Delta BAC$. Аналогично $\Delta CDF = \Delta KDF$; $\angle BCA = \angle DCF$ как вертикальные, поэтому $\angle BAC = \angle CDF$. Аналогично доказываем, что $\Delta\ KDF = \Delta\ KMN$. В итоге получаем, что $\Delta\ SAB = \Delta\ BAC = \Delta\ CDF = \Delta\ KDF = \Delta\ KMN$.

Следовательно, $SB = BC = CF = FK = KN = L/5$.

Из точки S выходит также луч, распространяющийся симметрично относительно оси трубки, — это луч SA_1. Телесный угол α_1, соответствующий лучам SA и SA_1, имеет вершину в точке S. Так как $r << L$, то радиус сферы с центром в точке S $SA = SA_1 = SB = L/5$, а площадь сферической поверхности, на которую опирается угол α_1, равен площади сечения трубки πr^2. Таким образом, $\alpha_1 = \pi r^2/(L/5)^2 = 25\pi r^2/L^2$.



Если уменьшить угол выхода луча с осью трубки, то при некотором значении этого угла количество отражений от стенок станет равным одному. Ход такого луча SE представлен на рисунке.

Используя закон отражения, доказываем, что $\Delta STE = \Delta TEQ = \Delta QZY \Rightarrow ST = TQ = QY = L/3$. Телесный угол, соответствующий лучам SE и SE_1:

$$\alpha_2 = \pi r^2/(L/3)^2 = 9\pi r^2/L^2.$$

Итак, все лучи, испытывающие два отражения, находятся в пределах $\alpha_2 \le \alpha \le \alpha_1$. Точечный источник S излучает равномерно по всем направлениям, поэтому мощность, приходящаяся на единичный телесный угол, равна $P/(4\pi)$. (Телесный угол, опирающийся на всю сферу, равен 4π.) Следовательно, мощность излучения в телесном угле $(\alpha_1 - \alpha_2)$ равна

$$\frac{P}{4\pi}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{P}{4\pi}\left(\frac{25\pi r^2}{L^2} - \frac{9\pi r^2}{L^2}\right) = 4P\frac{r^2}{L^2}.$$

С другой стороны, мощность излучения можно выразить, умножив энергию фотона на число фотонов в 1 с, т.е. $h\nu N = hcN/\lambda$. Получаем уравнение

$$4P\left(\frac{r}{L}\right)^2 = h\frac{c}{\lambda}N \Rightarrow N = \frac{4P\lambda}{hc}\left(\frac{r}{L}\right)^2 = 10^{17}.$$

Задачи для самостоятельного решения

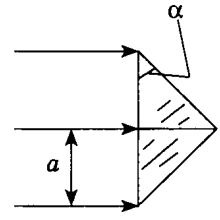
1. Фронт волны зеленого света прошел в стекле путь, равный 4 см. Какой путь пройдет свет за то же время в воде? Показатель преломления воды $^4/_3$, а стекла $^3/_2$.

   Ответ: 4,5 см.

2. При какой минимальной оптической разности хода две когерентные световые волны с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм будут ослаблять друг друга при интерференции?

Ответ: $3 \cdot 10^{-7}$ м.

3. Равнобедренная стеклянная призма с малыми углами преломления помещена в параллельный пучок лучей, падающих нормально к ее основанию. Показатель преломления стекла призмы $n = 1{,}57$, размер основания $2a = 5$ см. Найдите угол преломления α, если в середине экрана, расположенного на расстоянии $L = 100$ см от призмы, образуется темная полоса ширины $2d = 1$ см.



Ответ: 3°.

4. Найдите наибольший порядок спектра для желтой линии натрия с длиной волны 589 нм, если период дифракционной решетки равен 2 мкм.

Ответ: $k = 3$.

5. Дифракционная решетка содержит 120 штрихов на 1 мм. Найдите длину волны монохроматического света, падающего нормально на решетку, если угол между двумя спектрами первого порядка равен 8°.

Ответ: 580 нм.

6. При помощи дифракционной решетки с периодом 0,02 мм получено первое дифракционное изображение на расстоянии 3,6 см от центрального и на расстоянии 1,8 м от решетки. Найдите длину световой волны.

Ответ: 400 нм.

7. Определите угол отклонения лучей зеленого света $\lambda = 0{,}55$ мкм в спектре первого порядка, полученном с помощью дифракционной решетки, период которой $d = 0{,}02$ мм.

Ответ: 1,57°.

8. При нормальном падении на дифракционную решетку света паров натрия ($\lambda = 589$ нм) оказалось, что на экране спектр третьего порядка расположен на расстоянии $L_1 = 6{,}5$ см от центра дифракционной картины. Определите период решетки, если она расположена на расстоянии $L_2 = 1{,}5$ м от экрана.

Ответ: $4{,}1 \cdot 10^{-5}$ м.

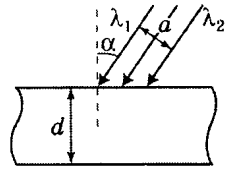
9. На стеклянный клин с углом $\alpha = 2°$ перпендикулярно грани клина падает луч белого света. На какой угол β разойдутся после выхода из клина красный и фиолетовый лучи вследствие дисперсии? Показатель преломления стекла для красных лучей $n_{кр} = 1{,}74$, а для фиолетовых $n_ф = 1{,}8$. Считать $\sin\alpha \approx \alpha$.

Ответ: 0,12°.

10. В спектре излучения аргонового лазера наиболее интенсивными являются линии с длинами волн $\lambda_1 = 488$ нм и $\lambda_2 = 515$ нм. При каких углах преломления α призмы, поставленной на пути лучей, из призмы выйдет пучок, содержащий компоненту λ_2 и не содержащий компоненту λ_1? На первую грань призмы лучи падают нормально. Зависимость показателя преломления призмы от длины волны имеет вид $n = 1 + \frac{a}{\lambda^2}$, где $a = 2{,}38 \cdot 10^9$ см^2.

Ответ: $30° \le \alpha \le 31°45'$.

11. На плоскопараллельную стеклянную пластинку под углом α падает пучок света шириной a, содержащий две спектральные компоненты с длинами волн λ_1 и λ_2. Показатели преломления стекла для этих длин волн различны: n_1 (для λ_1) и n_2 (для λ_2). Определите минимальную толщину пластинки, при которой свет, пройдя через нее, будет распространяться в виде двух отдельных пучков, каждый из которых содержит только одну спектральную компоненту.



Ответ: $\dfrac{2a}{\sin 2\alpha}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n_2^2-\sin^2\alpha}}-\dfrac{1}{\sqrt{n_1^2-\sin\alpha}}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

12. Найдите массу, импульс и энергию фотона красных лучей света, для которых $\lambda = 7\cdot10^{-5}$ см.

Ответ: $3{,}2\cdot10^{-36}$ кг; $9{,}6\cdot10^{-28}$ кг·м/с; $28{,}8\cdot10^{-20}$ Дж.

13. Максимальная энергия электронов, вырываемых светом с поверхности металла, равна $2{,}9\cdot10^{-19}$ Дж. Определите длину волны света, если работа выхода электрона из этого металла равна 2 эВ.

Ответ: $\lambda = 3{,}2\cdot10^{-7}$ м.

14. Определите максимальную кинетическую энергия электронов, вырываемых с поверхности металла при облучении его ультрафиолетовым излучением с длиной волны 200 нм, если работа выхода электрона из этого металла равна $4\cdot10^{-19}$ Дж.

Ответ: $5{,}9\cdot10^{-19}$ Дж.

15. Определите энергию γ -кванта, если соответствующая ему длина волны $\lambda = 1{,}6\cdot10^{-12}$ м.

Ответ: $12{,}4\cdot10^{-14}$ Дж.

16. Энергия скольких фотонов с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм равна энергии неподвижного электрона?

Ответ: $205 \cdot 10^3$.

17. Энергия скольких фотонов с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм равна полной энергии электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов 100 В?

Ответ: $4 \cdot 10^3$.

18. Сколько квантов излучает за одну секунду гелий-неоновый лазер мощностью $P = 10$ мВт? Длина волны, излучаемая лазером, $\lambda = 0{,}6$ мкм.

Ответ: $3 \cdot 10^{16}$ Ф/с.

19. Фотон рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda = 2{,}4 \cdot 10^{-11}$ м при рассеянии на электроне передал ему 20% своей энергии. Определите частоту рассеянного излучения.

Ответ: $\upsilon = 10^{19}$ Гц.

20. Вольфрамовый шарик радиусом 10 см, находящийся в вакууме, облучается светом с $\lambda = 2000$ $\overset{0}{A}$. Определите установившийся заряд шарика, если работа выхода для вольфрама $A = 4{,}5$ эВ (1 $\overset{0}{A} = 10^{-10}$ м).

Ответ: $q = 1{,}02 \cdot 10^{-10}$ Кл.

21. Определите наибольшую длину волны света, облучение которым поверхности меди еще может вызвать фотоэффект. Работа выхода электрона из меди $A = 4$эВ.

Ответ: $3{,}1 \cdot 10^{-7}$ м.

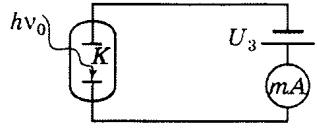
22. Катод фотоэлемента освещается монохроматическим светом с длиной волны λ. При отрицательном потенциале на аноде $u_1 = -1{,}6$ В ток в цепи прекращается. При изменении длины волны света в 1,5 раза для прекращения тока потребовалось подать на анод отрицательный потенциал $u_2 = -1{,}8$ В. Определите работу выхода материала катода.

Ответ: $1{,}9 \cdot 10^{-19}$ Дж.

23. Какую задерживающую разность потенциалов надо приложить к фотоэлементу, чтобы «остановить» электроны, испускаемые вольфрамом под действием ультрафиолетовых лучей с длиной волны 130 нм? Работа выхода электрона из вольфрама 4,5 эВ.

Ответ: 5 В.

24. При исследовании вакуумного фотоэлемента оказалось, что при освещении катода светом частотой $\upsilon_0 = 10^{15}$ Гц фототок с поверхности катода прекращается при задерживающей разности потенциалов $U_3 = 2$ В между катодом и анодом. Определите работу выхода материала катода.



Ответ: 2,1 эВ.

25. Свет с длиной волны $\lambda = 0{,}66$ мкм падает нормально на поверхность. Какой импульс передает этой поверхности световой фотон, если поверхность:

а) полностью отражает свет;

б) полностью поглощает свет.

Ответ: а) $2 \cdot 10^{-27}$ кг·м/с; б) 10^{-27} кг·м/с.

26. Пучок света с длиной волны $\lambda = 4900\ \overset{0}{A}$, падая перпендикулярно поверхности, производит давление $5 \cdot 10^{-6}$ Па. Коэффициент отражения поверхности $\rho = 0{,}25$. Сколько фотонов падает ежесекундно на единицу площади этой поверхности?

Ответ: $3 \cdot 10^{21}$.

ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА. ФИЗИКА АТОМА И АТОМНОГО ЯДРА. СОСТАВ АТОМНЫХ ЯДЕР. РАДИОАКТИВНОСТЬ

Примеры решения задач с кратким или развернутым ответом

1. Масса тела, движущегося с определенной скоростью, увеличилась на 20%. Во сколько раз при этом уменьшилась его длина?

Решение

Пусть масса покоя тела равна m_0, а его длина, когда оно покоится, — l_0. Из формул теории относительности следует, что при движении тела со скоростью v его масса m и длина l будут:

$$m = m_0 / \sqrt{1-(v/c)^2},\ l = l_0\sqrt{1-(v/c)^2}.$$

По условию задачи $m = 1{,}2m_0$, поэтому из первого уравнения следует, что $\sqrt{1-(v/c)^2} = m_0 / m = 1/1{,}2$. Подставляя это во второе уравнение, находим, что $l = l \cdot 1{,}2$, т.е. длина уменьшится в 1,2 раза.

2. Доказать, что энергия частицы W и модуль ее импульса p связаны соотношением $W^2 - p^2c^2 = m^2{}_0c^4$, где c — скорость света, m_0 — масса покоя частицы.

Решение

Энергия частицы

$$W = mc^2 = m_0c^2/\sqrt{1-(v/c)^2},$$

а ее импульс

$$p = m_0v\ /\sqrt{1-(v/c)^2}.$$

Поэтому

$$W^2 - p^2c^2 = \left(m_0c^2/\sqrt{1-(v/c)^2}\right)^2 - \left(m_0v/\sqrt{1-(v/c)^2}\right)^2 c^2 =$$

$$= \frac{m_0^2c^4}{1-(v/c)^2} - \frac{m_0^2c^2(c^2-v^2)}{1-(v/c)^2} = \frac{m_0^2c^2(c^2-v^2)}{1-(v/c)^2} = m_0^2c^4 = W_0^2.$$

3. Во сколько раз увеличится масса движущегося электрона по сравнению с массой покоя, если электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов, приобрел кинетическую энергию W = 0,76 МэВ?

Решение

Кинетическая энергия электрона есть разность между полной энергией $W = mc^2$ и энергией покоя $W_0 = m_ec^2$ = = 0,511 МэВ.

Итак, $W_k = W - W_0 = mc^2 - m_ec^2$. После деления обеих частей уравнения на m_ec^2 получаем

$$\frac{W_k}{m_ec^2} = \frac{m}{m_e} - 1 \Rightarrow \frac{m}{m_e} = 1 + \frac{W_k}{W_0} = 1 + \frac{0{,}76}{0{,}511} = 2{,}49.$$

Масса электрона увеличивается примерно в 2,5 раза.

4. Определить скорость электрона, разогнанного из состояния покоя электрическим полем с ускоряющей разностью потенциалов $|u| = 10^6$ В.

Решение

Под действием ускоряющей разности потенциалов электрон приобретает кинетическую энергию $W = |e||u| = 10^6$ эВ = 1 МэВ (пройдя разность потенциалов 1 В, электрон приобретает энергию 1 эВ, при прохождении разности потенциалов 10^6 В электрон приобретает энергию 10^6 эВ).

Как и в задании 3, кинетическую энергию выразим как разность между полной энергией W и энергией покоя электрона $W_0 = m_e c^2 = 0{,}511$ МэВ.

Итак:

$$Wk = mc^2 - m_e c^2 \Rightarrow \frac{m}{m_e} = \frac{W_k}{m_e c^2} + 1.$$

Подставляя $m = m_e / \sqrt{1-(v/c)^2}$ и учитывая, что $m_e c^2 = W_0$, получим уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{W_k}{W_0} + 1 \Rightarrow 1-(v/c)^2 = \frac{1}{(W_k/W_0+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (v/c)^2 = 1 - \frac{1}{(W_k/W_0+1)^2} = \frac{8}{9}.$$

Следовательно,

$$v = \frac{2\sqrt{2}}{3} c = 2{,}83 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

5. Электрон обладает кинетической энергией $W_k = 2$ МэВ. Определить модуль импульса электрона.

Решение

Как и в предыдущем задании, получаем

$$W_k = W - W_0 = mc^2 - m_e c^2 \Rightarrow m/m_e = W_k/(m_e c^2) + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 + 2/0{,}5 = 5.$$

Но

$$\frac{m}{m_e} = 1/\sqrt{1-(v/c)^2} = 5 \Rightarrow v = \frac{2\sqrt{6}}{5}c.$$

Модуль импульса электрона вычисляется по формуле

$$p = m_e v/\sqrt{1-(v/c)^2} = 5m_e\frac{2\sqrt{6}}{5}c = 2\sqrt{6}m_e c = 1{,}33\cdot 10^{-21} \text{ кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}.$$

6. Рентгеновское тормозное излучение возникает при бомбардировке быстрыми электронами металлического антикатода рентгеновской трубки. Определить длину волны коротковолновой границы спектра тормозного излучения, если скорость электронов составляет 40% от скорости света.

Решение

Так как электрон движется со скоростью v = 0,4 с, сравнимой со скоростью света, то его кинетическую энергию выразим, как и в предыдущих заданиях:

$$W_k = mc^2 - m_e c^2 = m_e c^2/\sqrt{1-(v/c)^2} - m_e c^2 =$$
$$= m_e c^2\left(1/\sqrt{1-(v/c)^2} - 1\right).$$

Коротковолновая граница спектра излучения соответствует случаю, когда вся кинетическая энергия электрона переходит в энергию кванта рентгеновского излучения, равную $h(\nu) = hc/\lambda$.

Итак, получаем уравнение

$$m_e c^2\left(1/\sqrt{1-(v/c)^2} - 1\right) = hc/\lambda.$$

Откуда

$$\lambda = \frac{h}{m_e c}\left(1/\sqrt{1-(v/c)^2} - 1\right)^{-1} = 2{,}7\cdot 10^{-11} \text{ м}.$$

7. Радиус первой орбиты в атоме водорода $r_1 = 5{,}3 \cdot 10^{-11}$ м. Найти напряженность электрического поля ядра на этом расстоянии и кинетическую энергию электрона на этой орбите.

Решение

Напряженность электрического поля найдем по формуле

$$E = k|e|/r_1^2,$$

где $k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл², $|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

После подстановки числовых значений получим $E = 5{,}1 \cdot 10^{11}$ В/м.

Чтобы найти второй параметр, запишем второй закон Ньютона, принимая во внимание тот факт, что на электрон действует кулоновская сила притяжения $F_k = ke^2/r^2_1$, которая сообщает ему центростремительное ускорение $a_n = v^2/r$, где v — скорость движения электрона. Итак, получаем уравнение $F_k = m_e a_п \Leftrightarrow ke^2/r^2 = m_e v^2/r_1 \Rightarrow m_e v^2 = ke^2/r_1$.

Следовательно, кинетическая энергия электрона $W_k = m_e v^2/2 = ke^2/(2r_1) = 2{,}17 \cdot 10^{-18}$ Дж = 13,6 эВ.

8. Во сколько раз увеличится радиус орбиты электрона у атома водорода, находящегося в основном энергетическом состоянии, при поглощении атомом фотона с энергией 12,09 эВ?

Решение

Согласно теории Бора, полная энергия атома водорода равна сумме кинетической энергии электрона и потенциальной энергии электростатического взаимодействия между электроном и протоном ядра, причем в любом энергетическом состоянии

$$W_n = \frac{1}{2}W_p = \frac{1}{2}\left(-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}\right).$$

В основном состоянии $W_1 = -13{,}6$ эВ $= -e^2/(8\pi\varepsilon_0 r_1)$. При поглощении фотона атом водорода переходит в состояние с бóльшей энергией $W_n = (W_1 + 12{,}09)$ эВ $=$ $= (-13{,}6 + 12{,}09)$ эВ $= -1{,}51$ эВ. С другой стороны, $W_n =$ $= -e^2/((8\pi\varepsilon_0 r_n)$, где r_n — радиус орбиты электрона.

Тогда

$$\frac{W_1}{W_n} = \frac{r_n}{r_1} = \frac{-13{,}6\ \text{эВ}}{-1{,}51\ \text{эВ}} = 9.$$

Радиус орбиты электрона увеличится в 9 раз.

9. Первоначально невозбужденный водород начнет излучать фотоны, если через него пропустить пучок электронов, прошедших разность потенциалов $u_0 = 10{,}2$ В. Какую минимальную ускоряющую разность потенциалов должен пройти пучок протонов, чтобы при пропускании их через первоначально невозбужденный водород последний начал излучать фотоны? Считать, что масса электрона много меньше массы протона, а атом водорода перед столкновением покоился.

Решение

Пусть масса налетающей частицы m, ее скорость v_0, масса атома водорода M, скорости частиц после столкновения v_1 и v_2. По закону сохранения импульса $mv_0 = mv_1 +$ $+ Mv_2$. При столкновении атом водорода поглощает энергию $W_{n,k}$, поэтому по закону сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} + W_{n,k}.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} mv_0 = mv_1 + Mv_2, \\ \dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{mv_1^2}{2} + \dfrac{Mv_2^2}{2} + W_{n,k}. \end{cases}$$

Докажем, что энергия налетающей частицы $W_0 = mv^2{}_0/2$ будет минимальна, если после столкновения частица и атом водорода движутся с одинаковыми скоростями (абсолютно неупругое столкновение). Выразим из первого уравнения системы $v_2 = (mv_0 - mv_1)/M$ и подставим во второе уравнение, тогда получим:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{M}{2}\left(\frac{mv_0 - mv_1}{M}\right) + W_{n,k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{m^2v_0^2}{2M} - \frac{m^2v_0v_1}{M} + \frac{m^2v_1^2}{2M} + W_{n,k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{mv_0^2}{2}\left(1 - \frac{m}{M}\right) = \frac{mv_1^2}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right) - \frac{m^2v_0v_1}{M} + W_{n,k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{mv_0^2}{2}\left(\frac{M-m}{M}\right) = \frac{mv_1^2}{2}\left(\frac{m+M}{M}\right) = \frac{m^2v_0}{M}v_1 + W_{n,k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_0 = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2}\left(\frac{M+m}{M-m}\right) - \frac{m^2v_0}{(M-m)}v_1 + \frac{M}{(M-m)}W_{n,k}.$$

Таким образом, энергия налетающей частицы W_0 выражена как квадратичная функция от v_1 с первым положительным коэффициентом

$$a = \frac{m}{2}\cdot\left(\frac{M+m}{M-m}\right) > 0.$$

Такая функция имеет минимум в точке $v_1 = -b/2a$, где $b = m^2v_0/\ (M - m)$. Итак, скорость, соответствующая минимуму W_o:

$$v_1 = \frac{(m^2 v_0/(M-m))}{2(m/2)((M+m)/(M-m))} = \frac{mv_0}{(M+m)}.$$

При этом $v_2 = (mv_0 - mv_1)/M = m(v_0 - mv_0/(M+m))/M = mv_0/(M+m)$.

Итак, доказано, что энергия налетающей частицы минимальна, если после столкновения частицы движутся с одинаковыми скоростями, т.е. $v_1 = v_2$. Минимальное значение энергии налетающей частицы

$$W_0 = W_{\min} = mv_1^2/2 + Mv_1^2/2 + W_{n,k} = (m+M)v_1^2/2 + W_{n,k} =$$
$$= \frac{(m+M)(mv_0/(M+m))^2}{2} + W_{n,k} = \frac{mv_0^2}{2}\left(\frac{m}{m+M}\right) + W_{n,k} =$$
$$= W_{\min}\frac{m}{m-M} + W_{n,k} \Rightarrow W_{\min} - W_{\min}\frac{m}{m-M} = W_{n,k} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow W_{\min} = W_{n,k}(1 + m/M).$$

В случае, когда через водород пропускают электроны, $m/M \to 0$, поэтому $W_{\min} = W_{nk}$, т.е. вся энергия электронов поглощается водородом, который переходит в возбужденное состояние. Электроны приобретают энергию, пройдя ускоряющую разность потенциалов u_0, т.е.

$$W_{\min} = |e|u_0 = W_{n,k} = 10{,}2 \text{ эВ}.$$

В случае, когда через водород пропускают протоны, отношение $m/M = 1$, поэтому минимальная энергия налетающих протонов

$$W'_{\min} = W_{n,k}(1+1) = 2W_{n,k} = 20{,}4 \text{ эВ}.$$

Таким образом, минимальная ускоряющая разность потенциалов для протонов равна 20,4 В.

10. Какие спектральные линии появятся при возбуждении атомарного водорода электронами с энергией $W = 12{,}1$ эВ?

Решение

Вся энергия электронов поглощается водородом, который возбуждается и переходит из основного энергетического состояния с $n = 1$ в некоторое состояние, характеризуемое натуральным числом k. По закону сохранения энергии $W = Wk - W_n$. С другой стороны: $Wk - W_n = W_{\text{ион}}(1/n^2 - 1/k^2)$, где $W_{\text{ион}} = 13{,}6$ эВ. Получаем уравнение

$$W = W_{\text{ион}}(1-1/k^2) \Rightarrow 1-1/k^2 = W/W_{\text{ион}} \Rightarrow 1/k^2 = 1-W/W_{\text{ион}} =$$
$$= 1-\frac{12{,}1\ \text{эВ}}{13{,}6\ \text{эВ}} = 0{,}11 \Rightarrow k^2 = \frac{1}{0{,}11} = 9{,}09 \Rightarrow k = 3 \quad k \in N.$$

Из состояния с $k = 3$ возможен прямой переход в состояние с $n = 1$ или $n = 2$, а также переход со второго энергетического уровня на первый. Таким образом, получится три спектральных линии. Рассчитываем соответствующие длины волн, используя формулу

$$h\nu_{n,k} = W_{\text{ион}}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right) \Rightarrow \nu_{n,k} = \frac{W_{\text{ион}}}{h}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_{n,k} = \frac{c}{\nu_{n,k}} = \frac{ch}{W_{\text{ион}}(1/n^2-1/k^2)}.$$

Переходу из состояния с $k = 3$ в состояние с $n = 1$ соответствует спектральная линия с длиной волны

$$\lambda_{3,1} = \frac{ch}{W_{\text{ион}}(1-1/3^2)} = 1{,}03\cdot 10^{-7}\ \text{м}.$$

Переходу из состояния с $k = 3$ в состояние с $n = 2$ соответствует спектральная линия с длиной волны

$$\lambda_{2,3} = \frac{ch}{W_{\text{ион}}(1/2^2 - 1/3^2)} = 6{,}6 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Переходу из состояния с $k = 2$ в состояние с $n = 1$ соответствует спектральная линия с длиной волны

$$\lambda_{2,1} = \frac{ch}{W_{\text{ион}}(1 - 1/2^2)} = 1{,}22 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

11. Напряженность электрического поля в электромагнитной волне с частотой $\omega = 2 \cdot 10^{16}$ с$^{-1}$, модулированной по амплитуде с частотой $\Omega = 2 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$, меняется со временем по закону: $E = A(1 + \cos\Omega t)\cos\omega t$, где A — постоянная. Определить энергию электронов, выбиваемых этой волной из атомов газообразного водорода с энергией ионизации $W_{\text{ион}} = 13{,}6$ эВ.

Решение

Преобразуем выражение для напряженности электрического поля:

$$E = A(1 + \cos\Omega t) \cdot \cos\omega t = A\cos\omega t + A\cos\Omega t \cdot \cos\omega t =$$
$$= A\cos\omega t + 1/2\cos(\omega - \Omega)t + 1/2A \cdot \cos(\omega + \Omega)t.$$

Таким образом, модулированная по амплитуде волна представляет собой сумму трех монохроматических волн с частотами ω, $\omega_1 = (\omega - \Omega)$ и $\omega_2 = (\omega + \Omega)$. В соответствии с постулатами Бора атом водорода может излучать и поглощать электромагнитную энергию только определенными порциями (квантами). Вычислим кванты энергии, соответствующие найденным монохроматическим волнам.

Для волны с частотой ω:

$$W = h\upsilon = h\omega/(2\pi) = 2{,}1 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}.$$

Для волны с частотой $\omega_1 = (\omega - \Omega)$:

$$W_1 = h\nu_1 = h\frac{\omega_1}{2\pi} = 1{,}89 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}.$$

Для волны с частотой $\omega_2 = (\omega + \Omega)$:

$$W_2 = h\nu_2 = h\frac{\omega_2}{2\pi} = 2{,}31 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}.$$

Энергия ионизации атома водорода $W_{\text{ион}} = 13{,}6$ эВ $= 2{,}168 \cdot 10^{-18}$ Дж, и, как видно, она больше, чем W и W_1. Поэтому кванты с частотами ω и $(\omega - \Omega)$ не могут ионизировать атом водорода. Ионизацию вызывает только квант с частотой $(\omega + \Omega)$, и по закону сохранения энергии энергия выбитых этим квантом электронов

$$W_e = W_2 - W_{\text{ион}} = 0{,}142 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 0{,}88 \text{ эВ}.$$

12. В периодической таблице рядом расположены три элемента X, Y, S. Радиоактивный изотоп элемента X превращается в элемент Y, а тот, в свою очередь, — в элемент S. Последний превращается в изотоп исходного элемента X. Какими процессами обусловлены переходы $X \to Y$, $Y \to S$, $S \to X$?

Решение

Заряд ядра элемента Y на 1 элементарный заряд больше, чем заряд ядра элемента X (по условию задачи в периодической таблице эти элементы расположены рядом). Следовательно, переход $X \to Y$ есть β-распад. По аналогии переход $Y \to S$ — также β-распад. В процессе $S \to X$ заряд ядра уменьшается на 2 элементарных заряда, следовательно, это α-распад.

13. Ядро нептуния $^{237}_{93}Np$ после α- и β-распадов превращается в ядро висмута $^{209}_{83}Bi$. Какое число α- и β-распадов происходит при этом?

Решение

В результате распадов массовое число изменяется на 237 – 209 = 28 атомных единиц. Как известно, при β-распаде масса ядра не изменяется, следовательно, изменение массового числа происходит только за счет α-распадов. При одном α-распаде массовое число изменяется на 4 атомные единицы, значит, должно произойти 28/4 = 7 α-распадов. При этом заряд ядра должен уменьшиться на 7·2 = 14 элементарных зарядов. В нашем случае уменьшение заряда ядра равно 93 – 83 = 10. Следовательно, в результате β-распадов заряд увеличился на 14 – 10 = 4 элементарных заряда. Так как при одном β-распаде заряд ядра увеличивается на 1 элементарный заряд, то должно произойти 4/1 = 4 β-распада.

14. Активность радиоактивного препарата за t_1 = 24 ч уменьшилась в 8 раз. Найти период полураспада T этого препарата. Определить, какая часть радиоактивных ядер этого препарата распадется за время, равное четвертой части периода полураспада.

Решение

Как известно, активность радиоактивного препарата есть число распадов в единицу времени. Очевидно, что число распадов пропорционально количеству нераспавшихся ядер в данный момент времени. Поэтому из условия уменьшения активности в 8 раз следует, что во столько же раз уменьшилось число нераспавшихся ядер: $N(t_1)$. Итак, $N_0/N(t_1) = 8$.

Из закона радиоактивного распада $N(t_1) = N_0 \cdot 2^{-t_1/T}$, где T — период полураспада. Следовательно,

$$N_0 / N_0 \cdot 2^{-t_1/T} = 8 \Rightarrow 2^{t_1/T} = 8 \Rightarrow t_1/T = 3 \Rightarrow T = \frac{t_1}{3} = 8 \text{ ч.}$$

Для ответа на второй вопрос задачи рассмотрим момент времени $t_2 = T/4$ от начала наблюдения за препаратом. Количество нераспавшихся ядер в этот момент

$$N(t_2) = N_0 \cdot 2^{-t_2/T} = N_0 \cdot 2^{-1/4} = N_0 / \sqrt[4]{2}.$$

Следовательно, к этому моменту распалось

$$\Delta N = N_0 - N(t_2) = N_0 - N_0 / \sqrt[4]{2} = N_0(1 - 1/\sqrt[4]{2}) \text{ ядер.}$$

Отношение к начальному числу ядер

$$\Delta N / N_0 = 1 - 1/\sqrt[4]{2} \approx 0{,}16.$$

15. Радон $^{222}_{86}\text{Rn}$ — это α-радиоактивный газ с атомной массой $A = 222$. Какую долю полной энергии, освобождаемой при распаде радона, уносит α-частица? Считать, что до распада ядро радона покоится.

Решение

Радон распадается на α-частицу и неизвестный элемент $^{A}_{Z}\text{X}$ так:

$$^{222}_{86}\text{Rn} - ^{4}_{2}\text{He} + ^{A}_{Z}\text{X}.$$

По законам сохранения заряда и массового числа порядковый номер элемента $Z = 86 - 2 = 84$ и его атомная масса $A = 222 - 4 = 218$. В периодической таблице находим, что этим элементом является полоний $^{218}_{84}\text{Po}$, и окончательно распад радона записывается в виде

$$^{222}_{86}\text{Rn} - ^{4}_{2}\text{He} + ^{218}_{84}\text{Po}.$$

Пусть m — масса α-частицы, а M — масса ядра полония, v_α и v_{P0} — соответственно их скорости после распада. Начальный импульс системы по условию задачи равен нулю, конечный импульс равен $mv_\alpha - Mv_{Po}$ (очевидно, что α-частица и ядро $^{218}_{84}$Po разлетаются в противоположные стороны, отсюда и появляется знак «–»).

По закону сохранения импульса: $0 - mv_\alpha - Mv_{Po} \Rightarrow$ $\Rightarrow v_{Po}/v_\alpha = m/M$.

Энергия, которой обладает система, складывается из кинетических энергий α-частицы и полония, т.е. $W = mv^2_\alpha/2 + Mv^2_{Po}/2$. Следовательно, α -частица уносит долю энергии

$$\frac{mv_\alpha^2/2}{mv_\alpha^2/2+Mv_{Po}^2/2}=\frac{1}{1+(M/m)(v_{Po}/v_\alpha)^2}=$$

$$=\frac{1}{1+(M/m)(m/M)^2}=\frac{1}{(1+m/M)}=1/(1+4/218)=0{,}98,\text{ или }98\%.$$

16. В калориметр с теплоемкостью c = 100 Дж/К помещен образец радиоактивного кобальта с молярной массой $\mu = 61\cdot10^{-3}$ кг/моль. Масса образца m = 10 мг. При распаде одного ядра кобальта выделяется энергия $W = 2\cdot10^{-19}$ Дж. Через время τ = 50 мин температура калориметра повысилась на Δt = 0,06°С. Каков период полураспада кобальта?

Решение

Повышение температуры калориметра обусловлено выделением энергии Q при распаде атома кобальта. Эту энергию можно рассчитать как $Q = c\Delta t$, а с другой стороны, как ΔNW, где ΔN — число распавшихся за время τ ядер, которое определяется из закона радиоактивного распада

$$\Delta N = N_0 - N(t) = N_0 - N_0\cdot2^{-t/T} = N_0(1-2^{-t/T}),$$

здесь N_0 — первоначальное количество радиоактивных атомов. Найдем его, определив количество вещества $\nu = m/\mu$. Следовательно, $N_0 = N_A\nu = N_A m/\mu$, где N_A — число Авогадро.

Итак, имеем уравнение

$$c\Delta t = \Delta NW \Rightarrow c\Delta t = N_A\,(m/\mu)(1 - 2^{-\frac{t}{T}})W \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-2^{-\frac{t}{T}} = \frac{c\Delta t}{N_A\frac{m}{\mu}W} = \frac{c\Delta t\mu}{N_A mW} \Rightarrow 2^{-\frac{t}{T}} = 1-\frac{c\Delta t\mu}{N_A mW} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\tau}{T} = \log_2\left(1-\frac{c\Delta t\mu}{N_A mW}\right).$$

$$T = -\tau/\log_2\left(1-\frac{c\Delta t\mu}{N_A mW}\right) \approx 5700\text{ с} \approx 95\text{ мин.}$$

17. Написать недостающие обозначения в ядерной реакции

$$^{41}_{19}\text{K} + \ldots \rightarrow {}^{44}_{20}\text{Ca} + {}^{1}_{1}\text{H}.$$

Решение

При протекании ядерных реакций выполняется закон сохранения заряда и массовых чисел. Следовательно, заряд неизвестного ядра в левой части ядерной реакции $Z = (20 + 1) - 18 = 2$, а массовое число $A = (44 + 1) = 4$. Отсюда следует, что неизвестно ядро — ядро атома гелия $^{4}_{2}\text{He}$ (α-частица). Ядерная реакция записывается в виде

$$^{41}_{19}\text{K} + {}^{4}_{2}\text{He} \rightarrow {}^{44}_{20}\text{Ca} + {}^{1}_{1}\text{H}.$$

18. Вычислить энергию связи ядра атома алюминия.

Решение

Напомним, что в атомной физике масса выражается в атомных единицах массы, причем 1 а.е.м. = $1{,}6606 \cdot 10^{-27}$ кг, соответствующая ей энергия: $W = mc^2 = 1{,}6606 \cdot 10^{-27}$ кг $(3 \cdot 10^8$ м/с) = $14{,}9454 \cdot 10^{-9}$ Дж = 931 МэВ.

Ядро $^{27}_{13}\mathrm{Al}$ содержит $Z = 13$ протонов и $N = A - Z = 14$ нейтронов. Масса протона составляет 1,0078 а.е.м., а масса нейтрона — 1,0087 а.е.м. Масса всех нуклонов ядра равна (131,0078 + 13·1,0087) а.е.м. = 27,2232 а.е.м.

Масса ядра $^{27}_{13}\mathrm{Al}$ – 26,9815 а.е.м. Дефект масс $\Delta m = (27{,}2232 - 26{,}9815) = 0{,}2417$ а.е.м.

Энергия связи $W_{св} = \Delta m W = 0{,}2417 \cdot 931 = 225$ МэВ.

19. Какое количество $^{235}_{92}\mathrm{U}$ расходуется в сутки на атомной электростанции мощностью $P = 5 \cdot 10^3$ кВт? Коэффициент полезного действия $\eta = 17\%$. При распаде одного ядра $^{235}_{92}\mathrm{U}$ выделяется энергия $W_0 = 200$ МэВ.

Решение

За сутки электростанция вырабатывает полезную энергию $W_п = Pt$, где $t = 24$ ч = 86 400 с. Затраченная энергия $W_з$ — это энергия, выделившаяся в результате управляемой цепной реакции, при которой происходит распад ядер урана $^{235}_{92}\mathrm{U}$. Пусть за сутки расходуется масса m урана.

В ней содержится $N = \dfrac{m}{\mu} N_A$ атомов; здесь

$\mu = 235 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса,

$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ 1/моль — число Авогадро.

Следовательно, за сутки выделяется энергия

$$W_з = NW_0 = \frac{m}{\mu} N_A W_0.$$

Из определения КПД

$$\eta = \frac{W_п}{W_з} = Pt / \left(\frac{m}{\mu} N_A W_0 \right) \Rightarrow m = \frac{Pt\mu}{\eta N_A W_0} = 0{,}031 \text{ кг}.$$

20. Термоядерная реакция ${}^2_1H + {}^3_2H \to {}^4_2He + {}^1_1p$ идет с выделением энергии Q_1 = 18,4 МэВ. Какая энергия выделяется в реакции ${}^3_2H + {}^3_2H \to {}^4_2He + 2{}^1_1p$, если дефект масс ядра ${}^3_2He$ на Δm = 0,006 а.е.м. больше, чем у ядра ${}^2_1H$? Какая энергия выделится во второй реакции при синтезе 1 кг гелия?

Решение

Пусть m_p — масса протона, $m_п$ — масса нейтрона, m_1 — масса ядра ${}^3_2He$, m_2 — масса ядра ${}^2_1H$. Дефект масс у ядра ${}^3_2He$, содержащего 2 протона и 1 нейтрон, $\Delta m_1 = (2m_p + m_п) - m_1$. Дефект масс у ядра ${}^2_1H$, содержащего 1 протон и 1 нейтрон, $\Delta m_2 = (m_p + m_п) - m_2$. По условию задачи $\Delta m = \Delta m_1 - \Delta m_2 = (2m_p + m_п) - m_1 - (m_p + m_п) + m_2 = m_p - (m_1 - m_2)$.

Следовательно, $m_1 - m_2 = m_p - \Delta m$.

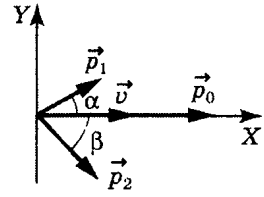
Пусть m_3 — масса ядра гелия ${}^4_2He$, тогда энергетический выход первой ядерной реакции $Q_1 = ((m_1 + m_2) - (m_3 + m_p))c^2$. Энергетический выход второй ядерной реакции $Q_2 = (2m_1 - (m_3 + 2m_p)\ c^2$. Следовательно, $Q_2 - Q_1 = ((m_1 - m_2) - m_p)c^2$. Учитывая, что $m_1 - m_2 - m_p - \Delta m$, получаем, что $Q_2 - Q_1 = -\Delta mc^2$. Отсюда $Q_2 = Q_1 - \Delta mc^2$. Так как 1 а.е.м. соответствует энергия 931 МэВ, то $\Delta mc^2 = 0{,}006 \cdot 931 = 5{,}6$ МэВ.

Итак, во второй реакции при синтезе одного ядра гелия ${}^4_2He$ выделяется энергия Q_2 = 18,4 − 5,6 = 12,8 МэВ. 1 кг гелия содержит ν = 1 кг/($4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) = $0{,}25 \cdot 10^3$

молей и, следовательно, содержит $N = \nu NA = 0{,}25 \cdot 10^3 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 1{,}5 \cdot 10^{26}$ атомов гелия. Поэтому при синтезе 1 кг гелия во второй реакции выделится энергия

$$W = Q_2 N = 19{,}2 \cdot 10^{26} \text{ Мэв} =$$
$$= 19{,}2 \cdot 10^{32} \text{ эВ} = 3{,}1 \cdot 10^{14} \text{ Дж}.$$

21. При распаде нейтральной частицы образовалось два фотона, летящих под углами α и β к направлению движения частицы. Определить скорость распавшейся частицы.



Решение

Пусть W_0 — энергия частицы, а W_1 и W_2 — энергии образовавшихся фотонов. По закону сохранения энергии $W_0 = = W_1 + W_2$. Пусть масса покоя частицы m_0, тогда

$$W_0 = m_0 c^2 / \sqrt{1-(v/c)^2},$$

где v — скорость частицы.

При распаде частицы выполняется также закон сохранения импульса. Если p_0 — импульс частицы, а p_1 и p_2 — импульсы фотонов, то выполняется векторное равенство $\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. Введем координатные оси X и Y, как показано на рисунке, и спроецируем векторное равенство на эти оси. Получим два уравнения: по оси Y: $p_1 \sin\alpha - p_2 \sin\beta = 0$, по оси X: $p_0 = p_1 \cos\alpha + p_2 \cos\beta = 0$. Отметим, что $p_0 = m_0 v / \sqrt{1-(v/c)^2}$, а импульсы фотонов равны $p_1 = W_1/c$ и $p_2 = W_2/c$. После подстановок получаем систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} W_1 + W_2 = W_0, \\ (W_1 \sin\alpha)/c = (W_2 \sin\beta)/c, \\ (W_1 \cos\alpha)/c + (W_2 \cos\beta)/c = p_0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} W_1 + W_2 = m_0 c^2 / \sqrt{1-(v/c)^2}, \\ W_1 \sin\alpha = W_2 \sin\beta, \\ W_1 \cos\alpha + W_2 \cos\beta = m_0 v c / \sqrt{1-(v/c)^2}. \end{cases}$$

Из второго уравнения $W_2 = W_1 \cdot \sin\alpha/\sin\beta$. Подставляя это в третье уравнение, получаем

$$W_1 \cos\alpha + W_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta = \frac{m_0 v c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_1 \frac{\sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta} =$$

$$= \frac{m_0 v c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \Rightarrow W_1 \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} = \frac{m_0 v c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_1 = \frac{m_0 v c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_2 = \frac{m_0 v \beta}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Подставляя найденные значения в первое уравнение системы, находим

$$\frac{m_0 v c}{\sqrt{1-(v/c)^2}\sin(\alpha+\beta)}(\sin\alpha + \sin\beta) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{c\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha + \sin\beta}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Пользуясь теорией Бора, определите для атома водорода радиус первой орбиты электрона и его скорость на ней.

   Ответ: $0{,}53 \cdot 10^{-10}$ м; $2{,}2 \cdot 10^{6}$ м/с.

2. Определите напряженность и потенциал поля ядра атома водорода на первой боровской орбите.

   Ответ: $5{,}13 \cdot 10^{11}$ В/м; 27,2 В.

3. Определите кинетическую, потенциальную и полную энергию электрона, находящегося на первой орбите в атоме водорода $r_1 = 0{,}53\ \overset{0}{A}$.

   Ответ: 13,6 эВ; −27,2 эВ; −13,6 эВ.

4. Определите, возможна ли ионизация невозбужденного атома водорода внешним электрическим полем напряженностью $E = 108$ В/м.

   Ответ: нет.

5. Определите потенциал ионизации атома водорода и первый потенциал возбуждения атома водорода, $r_1 = 0{,}53\ \overset{0}{A}$.

   Ответ: 13,6 В; 10,2 В.

6. Резерфорд и Бор предложили модель атома водорода, в которой электрон вращается по круговой орбите вокруг небольшого положительно заряженного ядра. При переходе с одной орбиты на другую, расположенную ближе к ядру, атом испускает фотон. Какова энергия фотона, испущенного атомом водорода при переходе электрона с орбиты радиуса $r_2 = 2{,}1 \cdot 10^{-8}$ см на орбиту радиуса $r_1 = 5{,}3 \cdot 10^{-9}$ см? Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

   Ответ: $1{,}63 \cdot 10^{-18}$ Дж.

7. При переходе электрона в атоме водорода с третьей стационарной орбиты на вторую излучаются фотоны, соответствующие длине волны $\lambda = 0{,}625$ мкм (красная линия водородного спектра). Какую энергию теряет при этом атом водорода?

Ответ: $\Delta E = 3 \cdot 10^{-19}$ Дж.

8. При переходе электрона в атоме водорода с одной стационарной орбиты на другую его энергия уменьшилась на $\Delta E = 3 \cdot 10{-}19$ Дж. Какова длина волны света, испущенного при этом атомом?

Ответ: $6{,}6 \cdot 10^{-7}$ м.

9. Полная энергия ионизации атома водорода $E_1 = 13{,}6$ эВ. Определите минимальную энергию фотона, излученного атомом водорода в области видимого света, при переходе с третьей орбиты на вторую.

Ответ: 1,89 эВ.

10. Атом водорода в основном состоянии поглотил квант света с $\lambda = 1215$ Å. Определите круговую частоту обращения электрона в возбужденном атоме водорода и энергию этого стационарного состояния.

Ответ: $1{,}55 \cdot 10^{16}$ рад/с; $5{,}4 \cdot 10^{-19}$Дж.

11. Определите энергию и импульс фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьей орбиты на первую.

Ответ: $1{,}77 \cdot 10^{-18}$ Дж; $6{,}47 \cdot 10^{-27}$ кг·м/с.

12. Сколько происходит α- и β-распадов при радиоактивном распаде $^{238}_{92}U$, если он превращается в $^{198}_{82}Pb$?

Ответ: 10.

13. Активность радиоактивного элемента уменьшилась в 4 раза за 8 дней. Найдите период полураспада.

Ответ: 4 дня.

14. Вычислите дефект массы ядра азота $^{14}_{7}N$, если: m_p = = 1,00728 а.е.м., $m_п$ = 1,00866 а.е.м., $M_я$ = 14,0007 а.е.м.

Ответ: $1{,}822348 \cdot 10^{-28}$ кг.

15. Вычислить энергию связи ядра азота.

Ответ: 102,3 МэВ.

16. Ядро какого элемента получается при взаимодействии нейтрона с протоном, сопровождающемся выделением γ-кванта? Напишите реакцию.

17. При бомбардировке нейтронами атома азота $^{14}_{7}N$ испускается протон. В ядро какого изотопа превращается ядро азота? Напишите реакцию.

18. Ядро тория $^{230}_{90}Th$ превратилось в ядро радия $^{226}_{85}Ra$. Какую частицу выбросило ядро тория? Напишите реакцию.

19. При взаимодействии атома дейтерия с ядром бериллия $^{9}_{4}Be$ испускается нейтрон. Напишите ядерную реакцию.

20. Допишите реакцию: $^{10}_{5}B + ^{1}_{0}n \rightarrow ? + ^{7}_{3}Li$.

21. При взаимодействии ядра изотопа лития $^{7}_{3}Li$ и протона образуются две одинаковые частицы и выделяется 17,3 МэВ энергии. Определите полную энергию, которая выделится, если с протонами прореагируют ядра, содержащиеся в 1 г изотопа лития.

Ответ: $26{,}4 \cdot 10^{10}$Дж.

22. При захвате нейтрона ядром изотопа лития $^{6}_{3}Li$ образуется ядро трития $^{3}_{1}H$, неизвестная частица и выделяется ΔE = 4,8 МэВ энергии. Определите энергию продуктов реакции. Кинетической энергией исходных частиц пренебречь.

Ответ: $E_{тр}$ = 2,74 МэВ, E_{α} = 2,06 МэВ.

23. При слиянии ядер дейтерия и лития выделяется энергия ΔE = 3,37 МэВ, образуется ядро берилия $^{7}_{4}Be$ и неизвестная частица. Считая кинетическую энергию исходных частиц пренебрежимо малой, найдите распределение энергии между продуктами реакции.

Ответ: E_{n} =2,95 МэВ, E_{Be} = 0,42 МэВ.

24. При бомбардировке лития (Li) протонами он превращается в гелий (He). Определите объем гелия, образовавшегося из m = 1 г лития, если гелий в конце опыта имеет температуру t = 30°C и давление P = $= 9{,}3 \cdot 10^{4}$ Па.

Ответ: $V = 7{,}7 \cdot 10^{-3}$ м^3.

25. Известно, что M = 1 г радия за время τ = 1 с дает $3{,}7 \cdot 10^{10}$ ядер гелия. Каково будет давление гелия, образующегося в герметичной ампуле объема V = 1 см^3,

в которой в течение года находилось m = 100 мг радия? Температура ампулы t = 15°С.

Ответ: $P = 4{,}67 \cdot 10^3$ Па.

26. В микрокалориметр с теплоемкостью C = 100 Дж/К помещен m = 1 мг изотопа кремния (атомная масса A = 31). При распаде ядра ^{31}Si выделяется энергия $Q = 4{,}4 \cdot 10^{-19}$ Дж. Период полураспада изотопа кремния $\tau^1/_2$ = 2 часа 36 мин. На сколько повысится температура калориметра через 52 минуты после начала опыта?

Ответ: 0,017 К.

Рекомендуемая литература

1. *Дмитриев С.Н., Васюков В.И., Струков Ю.А.* Физика: Сборник задач для поступающих в вузы. Изд. 6-е, доп. — М.: Ориентир, 2004.

2. *Буховцев Б.Б., Кривченко В.Д., Мякишев Г.Я., Сараева И.М.* Сборник задач по элементарной физике. — М.: Наука, 1987.

3. Конкурсные задачи по математике и физике: Пособие для поступающих в МГТУ им. Н.Э. Баумана / Андреев А.Г., Гладков Н.А., Струков Ю.А. / Под ред. С.В. Белова. — М: Машиностроение, 1993.

4. Сборник задач по физике / Под ред. С.М. Козела. — М.: Наука, 1983.

5. Справочное пособие для абитуриента: Программы и содержание заданий вступительных экзаменов по физике, математике, русскому языку и литературе / Под ред. С.В. Белова. — М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999.

6. Задачи вступительных испытаний и олимпиад по физике в МГУ. — М., 2005.

7. Билеты вступительных экзаменов в МФТИ. — М., 2005.

8. Варианты письменных профильных тестирований по физике. — М.: МИЭТ, 2004.

10. *Горбунов А.К., Панаиотти Э.Д.* Сборник задач по физике для поступающих в вуз. — М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007.

11. *Колесников В.А.* Пособие для поступающих в вузы. — М.: Изд. НЦ ЭНАС, 2005.

Содержание

Издание для дополнительного образования

Для старшего школьного возраста

ЕГЭ. СДАЕМ БЕЗ ПРОБЛЕМ

Зорин Николай Иванович

ЕГЭ 2012

ФИЗИКА

Решение задач

Сдаем без проблем!

Ответственный редактор *А. Жилинская*
Ведущий редактор *Т. Судакова*
Художественный редактор *Е. Брынчик*
Технический редактор *Л. Зотова*
Компьютерная верстка *А. Попов*

ООО «Издательство «Эксмо»
127299, Москва, ул. Клары Цеткин, д. 18/5. Тел. 411-68-86, 956-39-21.
Home page: **www.eksmo.ru** E-mail: **info@eksmo.ru**

Подписано в печать 30.11.2011. Формат 60×90 1/16.
Гарнитура «Школьная». Печать офсетная. Бумага тип. Усл. печ. л. 20,0.
Доп. тираж 3000 экз. Заказ № 4102670

Отпечатано с готовых файлов заказчика
в филиале «НИЖПОЛИГРАФ»,
ОАО «Первая Образцовая типография»
603950, г.Нижний Новгород, ГСП-123, ул. Варварская, 32 .

ISBN 978-5-699-51304-8

9 785699 513048 >