

СЕРГЕЙ ТЫЧИНИН



**ЕГЭ–2014 по математике
для «чайников»:
советы репетитора**

**Часть3. «Простейшие уравнения
и преобразования»
(Задания В7 и В11)**

**НОВАЯ
ВЕРСИЯ
ЭКЗАМЕНА**

ВВЕДЕНИЕ

Вниманию учащихся, сдающих ЕГЭ в 2014 году,
предлагается учебное пособие для самостоятельной подготовки

«ЕГЭ-2014 ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ «ЧАЙНИКОВ»: СОВЕТЫ РЕПЕТИТОРА»

Пособие состоит из 5 тематических разделов–шагов, в соответствии с которыми,
как мне представляется, довольно удобно готовиться к этому экзамену.

А именно:

- | | |
|---|-----------------------------|
| ✓ Шаг №1: «Начни с простого...» | (задания В1 – В4) |
| ✓ Шаг №2: «Геометрия» | (задания В5, В8, В10 и В13) |
| ✓ Шаг №3: «Простейшие уравнения и преобразования» | (задания В7 и В11) |
| ✓ Шаг №4: «Производная функции» | (задание В9 и В15) |
| ✓ Шаг №5: «Текстовые задачи» | (задания В6, В12 и В14) |

Свои отзывы и пожелания (если они вдруг неожиданно обнаружатся :)
вы можете отправить мне, перейдя по этой ссылке:

<http://egeprosto.ru/kontakty>



ЛЕНИВО ГОТОВИТЬСЯ ПО КНИЖКЕ САМОСТОЯТЕЛЬНО?

Запишись на дистанционный курс здесь: <http://egeprosto.ru/besplatnyj-material/#reg>

ЖЕЛАЮ УСПЕХОВ В РАБОТЕ!

АВТОР

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	2
ГЛАВА 3: «УРАВНЕНИЯ И ВЫРАЖЕНИЯ»	4
ЗАДАНИЕ В7	5
7.1. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	6
ОТСТУПЛЕНИЕ: «СТЕПЕНИ ЧИСЕЛ»	6
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	8
7.2. УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ КОРЕНЬ	11
7.3. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ	15
ОТСТУПЛЕНИЕ: «НЕМНОГО О ЛОГАРИФМАХ»	16
ЛОГАРИФМЫ – ЧТО ЭТО?	16
ЛОГАРИФМЫ: «ИНСТРУКЦИЯ ПО ПРИМЕНЕНИЮ»	18
И ЕЩЕ ОДНА ОСОБЕННОСТЬ ЛОГАРИФМОВ	18
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ	19
ЗАДАНИЕ В11	22
11.1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ	23
ОТСТУПЛЕНИЕ: «ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ»	24
ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ	26
11.2. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ И СТЕПЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ	34

ГЛАВА 3: «УРАВНЕНИЯ И ВЫРАЖЕНИЯ»

После насыщенной различной информацией и относительно сложной предыдущей главы, в которой было показано решение геометрических заданий В5, 8, 10 и В13, эта глава может показаться отдыхом. Хотя, понятное дело, кому-то хорошо отдыхалось и на геометрии, да и вообще на просмотривании (или разглядывании) любого текста ☺.

Итак, Глава 3 состоит всего лишь из двух заданий ЕГЭ: В7 и В11. Задание В7 предлагает решить несложное уравнение (как правило, логарифмическое или «с корнем»), а задание В11 – найти значение выражения (как правило, тригонометрического).

Рассмотрим наиболее распространенные примеры обоих заданий.

ЗАДАНИЕ В7

Еще одна возможность заработать весьма легкий балл – решить уравнение, которое предлагает задание В7 («найдите корень уравнения»). Предлагаемое на ЕГЭ уравнение, судя по всему, будет относиться к одному из 3-х типов:

- 1) **Показательное** уравнение. Например, $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-12} = \frac{1}{9}$.
В этих уравнениях x находится в показателе степени, то есть «наверху»;
- 2) Уравнение, содержащее **корень**. Например, $\sqrt{2x+7} = 5$.
В этих уравнениях x находится «под знаком корня»;
- 3) **Логарифмическое** уравнение. Например, $\log_2(8-x) = 4$.
Эти уравнения, как следует из названия, содержат так называемые «логарифмы», и x находится «под знаком логарифма».

Раздел, посвященный заданию В7, получится довольно большим, так как придется рассматривать решение уравнений всех 3-х типов. Но придется потерпеть – не отказываться же из-за этого от возможности заработать балл на столь раннем этапе ЕГЭ!

Для того чтобы вспомнить (или узнать) сведения, необходимые для успешного выполнения заданий В7, сделаем на протяжении этой главы еще два Тематических Отступления, посвященных степеням чисел и логарифмам.

Поскольку это Пособие предназначено, в первую очередь, для категории «чайников», то все объяснения написаны соответствующим языком. В этих Отступлениях, для «облегчения понимания» (как говорится в известной рекламе), порой специально искажается и огрубляется суть разбираемой темы, а некоторые вещи не объясняются вообще.

И причина этого проста – иногда проще и правильнее «просто сделать», имея лишь общее и приблизительное понимание, чем тратить время и силы на изучение всех деталей. К тому же – часто ненужное. Подобно тому, как многие люди вполне успешно работают на компьютере, не зная принципов его работы. А тем более – не зная компьютерного «железа».

И вот – для поддержания умственного тонуса – первое Тематическое Отступление этой главы, посвященное степеням чисел.

7.1. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**ОТСТУПЛЕНИЕ: «СТЕПЕНИ ЧИСЕЛ»**

Освежим память когда-то знакомыми сведениями.

Как известно, степени чисел могут быть целыми и дробными, положительными и отрицательными. Кратко напомним об этом конкретными примерами.

- 1) **Целая положительная** степень (то есть 1, 2, 3 ... и так далее).

$$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32,$$

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

$$10^1 = 10$$

- 2) **Целая отрицательная** степень (то есть $-1, -2, -3$... и так далее).

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$$

В общем случае, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

- 3) **Дробная положительная** степень.

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4} = \sqrt{4} = 2$$

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$$

В числителе дроби не обязательно должна стоять 1.

В этом случае число нужно понимать так:

$$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3}$$

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$81^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{81^5}$$

- 4) **Дробная отрицательная** степень. Здесь получается комбинация пунктов 2) и 3).

$$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4^3}} = \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8}$$

Вместе с тем, многие числа, возведенные в дробную степень, не могут быть выражены в виде целых чисел (и даже простых дробей).

Например, $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$, $20^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{20}$.

В этих случаях их именно так и записывают, без дальнейшего вычисления.

- 5) Любое число в **нулевой степени** равно 1.

Например, $4^0 = 1$, $10^0 = 1$.

- 6) 1 в любой степени равно 1.

Например, $1^5 = 1$, $1^{-2} = 1$, $1^{99} = 1$.

Следующий набор правил показывает, какие действия можно выполнять с двумя и более числами, имеющими степени (то есть любыми числами, указанными в предыдущих пунктах).

Обратите внимание, что умножать и делить друг на друга можно только числа

с одинаковыми основаниями!

Этот набор правил, позволяющий «собирать и разбирать» выражения, содержащие степень, я называю **«Показательным конструктором»**. Итак, вот эти формулы:

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Например, $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$

2) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Например, $\frac{3^3}{3^2} = 3^{3-2} = 3^1 = 3$

3) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Например, $(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Например, $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$

5) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Например, $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$

Вот такое получилось первое Отступление этой главы – интересное и бодрящее ☺.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**В7.1.1. НАЙДИТЕ КОРЕНЬ УРАВНЕНИЯ**

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-12} = \frac{1}{9}$$

Показательные уравнения удобно решать по следующей простой схеме.

1-Й ЭТАП: ПРИВЕСТИ ОБЕ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ К ОДИНАКОВЫМ ОСНОВАНИЯМ.

В принципе, можно приводить левое основание к правому, правое к левому или оба основания к какому-либо третьему. А выбирать нужно тот вариант приведения, который проще с точки зрения вычислений. Зачем создавать себе лишние трудности? Здесь удобнее поработать с правой частью:

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = \frac{1^2}{3^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Тогда уравнение будет выглядеть так: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-12} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯТЬ «ВЕРХУШКИ», ТО ЕСТЬ СТЕПЕНИ.

$$x - 12 = 2; \quad x = 2 + 12 = 14$$

3-ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ КОРЕНЬ.

Подставляем $x = 14$ в исходное уравнение и проверяем, будут ли равны обе части уравнения

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{14-12} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

Действительно, при $x = 14$, левая часть уравнения равна правой.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1	4						
---	---	--	--	--	--	--	--

В7.1.2. НАЙДИТЕ КОРЕНЬ УРАВНЕНИЯ $4^{5x-13} = \frac{1}{64}$.

1-Й ЭТАП: ПРИВЕСТИ ОБЕ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ К ОДИНАКОВЫМ ОСНОВАНИЯМ.

Проще преобразовать правую часть уравнения к основанию 4:

$$\frac{1}{64} = \frac{1}{4^3} = 4^{-3}$$

Тогда уравнение будет выглядеть так:

$$4^{5x-13} = 4^{-3}$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯТЬ «ВЕРХУШКИ», ТО ЕСТЬ СТЕПЕНИ.

$$5x - 13 = -3$$

$$5x = -3 + 13 = 10$$

$$x = \frac{10}{5} = 2$$

3-ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ КОРЕНЬ.

$$4^{5 \cdot 2 - 13} = 4^{10 - 13} = 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

Проверка показала, что корень $x = 2$ найден правильно.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

2							
---	--	--	--	--	--	--	--

В7.1.3. НАЙДИТЕ КОРЕНЬ УРАВНЕНИЯ

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{x-12} = 64$$

1-Й ЭТАП: ПРИВЕСТИ ОБЕ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ К ОДИНАКОВЫМ ОСНОВАНИЯМ.

В этом примере лучше преобразовать обе части уравнения к основанию 8.

С учетом того, что $\frac{1}{8} = 8^{-1}$, а $64 = 8^2$, получим такое уравнение:

$$(8^{-1})^{x-12} = 8^2$$

$$8^{-x+12} = 8^2$$

2-Й ЭТАП: ПРИРАВНЯТЬ «ВЕРХУШКИ», ТО ЕСТЬ СТЕПЕНИ.

$$-x + 12 = 2$$

$$x = 12 - 2 = 10$$

3-ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ КОРЕНЬ.

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{10-12} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-2} = 1 / \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 8^2 = 64$$

Уравнение решено правильно.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1	0						
----------	----------	--	--	--	--	--	--

А теперь перейдем ко второму типу уравнений, ожидаемых в задании В5.

7.2. УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ КОРЕНЬ

Судя по всему, в задании В5 может встретиться как корень 2-й степени («квадратный» корень, то есть $\sqrt{\quad}$), так и корень 3-й степени, то есть $\sqrt[3]{\quad}$.



В7.2.1. НАЙДИТЕ КОРЕНЬ УРАВНЕНИЯ $\sqrt{2x+7} = 9$.

Уравнения такого типа удобно решать по следующей простой схеме.

1-Й ЭТАП: ВОЗВЕДЕНИЕ ОБЕИХ ЧАСТЕЙ УРАВНЕНИЯ В КВАДРАТ (ТО ЕСТЬ ВО 2-Ю СТЕПЕНЬ) ДЛЯ ТОГО, ЧТОБЫ ИЗБАВИТЬСЯ ОТ КОРНЯ.

$$(\sqrt{2x+7})^2 = 9^2$$

$$2x + 7 = 81$$

$$2x = 81 - 7 = 74$$

$$x = \frac{74}{2} = 37$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ КОРЕНЬ.

$$\sqrt{2 \cdot 37 + 7} = \sqrt{74 + 7} = \sqrt{81} = 9$$

И действительно, при $x = 37$ левая часть уравнения равна правой части.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3	7						
---	---	--	--	--	--	--	--

В7.2.2. НАЙДИТЕ КОРЕНЬ УРАВНЕНИЯ $\sqrt{\frac{2x+53}{7}} = 11$.

1-Й ЭТАП: ВОЗВЕДЕНИЕ ОБЕИХ ЧАСТЕЙ УРАВНЕНИЯ В КВАДРАТ
(ТО ЕСТЬ ВО 2-Ю СТЕПЕНЬ).

$$\left(\sqrt{\frac{2x+53}{7}}\right)^2 = 11^2$$

$$\frac{2x+53}{7} = 121$$

$$2x + 53 = 121 \cdot 7 = 847$$

$$2x = 847 - 53 = 794$$

$$x = \frac{794}{2} = 397$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ КОРЕНЬ.

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 397 + 53}{7}} = \sqrt{\frac{847}{7}} = \sqrt{121} = 11$$

Именно так подробно и должна выполняться качественная проверка полученного результата – не смотря на лень и возможную тошноту ☺!

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3	9	7					
----------	----------	----------	--	--	--	--	--

В7.2.3. НАЙДИТЕ КОРЕНЬ УРАВНЕНИЯ

$$\sqrt{\frac{6}{5x-34}} = \frac{1}{11}$$

1-Й ЭТАП: ВОЗВЕДЕНИЕ ОБЕИХ ЧАСТЕЙ УРАВНЕНИЯ В КВАДРАТ (ТО ЕСТЬ ВО 2-Ю СТЕПЕНЬ).

$$\left(\sqrt{\frac{6}{5x-34}}\right)^2 = \left(\frac{1}{11}\right)^2$$

$$\frac{6}{5x-34} = \frac{1}{121}$$

Примечание. Для дальнейшего преобразования таких выражений можно воспользоваться известным приемом, который показан на рис. 7а.

В пропорции (то есть равенстве вида $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$) любое из входящих в нее чисел удобно находить именно таким способом, который будет применен ниже.

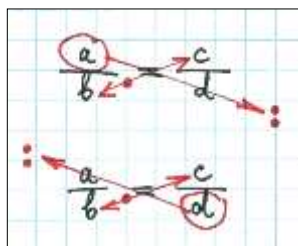


РИСУНОК 7а

В нашем примере это будет означать следующее:

$$5x - 34 = \frac{6 \cdot 121}{1} = 726$$

$$5x = 726 + 34 = 760$$

$$x = \frac{760}{5} = 152$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ КОРЕНЬ.

Все вычисления этого этапа выполняем, не глядя на вычисления, сделанные ранее!

$$\sqrt{\frac{6}{5 \cdot 152 - 34}} = \sqrt{\frac{1}{121}} = \frac{1}{11}$$

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1	5	2					
---	---	---	--	--	--	--	--

И еще один пример – решения уравнения с корнем 3-й степени.

В7.2.4. НАЙДИТЕ КОРЕНЬ УРАВНЕНИЯ $\sqrt[3]{x-2} = 5$.

1-Й ЭТАП: ВОЗВЕДЕНИЕ ОБЕИХ ЧАСТЕЙ УРАВНЕНИЯ В 3-Ю СТЕПЕНЬ.

Именно так: раз в уравнении корень 3-й степени, то в нее и нужно возводить.

$$(\sqrt[3]{x-2})^3 = 5^3$$

$$x - 2 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

$$x = 125 + 2 = 127$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ КОРЕНЬ.

$$\sqrt[3]{127-2} = \sqrt[3]{125} = 5$$

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1	2	7					
----------	----------	----------	--	--	--	--	--

Вот так, быстро и «совсем не больно» и решаются уравнения с корнем в заданиях В7.

А теперь поговорим о так называемых «логарифмах», и связанных с ними уравнениях на предстоящем ЕГЭ.

7.3. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

А теперь мы переходим к нелюбимой многими теме, связанной с понятием логарифма. В связи с ее относительной сложностью, можно предложить такую систему работы.

Во-первых, просто прочитать следующее Тематическое Отступление.

И постепенно заучить упомянутые там формулы их многократным написанием, не особо задумываясь над их происхождением.

Во-вторых, разобраться с приведенными примерами решения логарифмических уравнений, после чего самостоятельно решить как можно больше подобных уравнений по предложенной схеме.

А если разобраться с Отступлением совсем уж лень – тогда можно попробовать ограничиться только разбором примеров (но внимательным!). Может быть, хватит и этого.

ОТСТУПЛЕНИЕ: «НЕМНОГО О ЛОГАРИФМАХ»

ЛОГАРИФМЫ – ЧТО ЭТО?

В математике придумано много странных вещей. И среди них – так называемые «логарифмы». Логарифмы – это обыкновенные числа, которые записываются не привычными цифрами, а странным, зашифрованным способом.

Иными словами, число прямо не называется (например: 1, 2, 3, –1, –2, –3), а «кодируется» с помощью специальной записи. Запись эта выглядит так: «log ».

Например: $\log_2 16$, $\log_5 25$, $\log_{\frac{1}{2}} 8$ и так далее.

Численное значение некоторых логарифмов можно найти («расшифровать»).

Или совсем легко, или с небольшими усилиями. Самый простой способ это сделать – применить простой прием, который назовем «крутилкой» (рис. 76). Смысл этого приема будет понятен из дальнейших примеров.

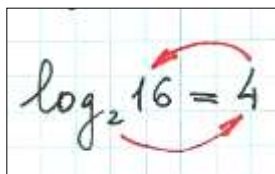


РИСУНОК 76

Пример 1. $\log_2 16 = x$.

«Крутилка», которая изображается в виде 2-х стрелок, создающих впечатление некоего вращения, в этом примере обозначает следующее: $2^x = 16$.

Значение x можно легко подобрать – это число «4» (так как $2^4 = 16$).

Таким образом, $\log_2 16 = 4$.

Пример 2. $\log_5 25 = x$.

Опять «расшифровка» этого числа выполняется тем же способом: $5^x = 25$.

Очевидно, что $x = 2$, значит $\log_5 25 = 2$.

Пример 3. $\log_{\frac{1}{2}} 8 = x$.

В этом случае «расшифровка» такова:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$$

Здесь случай немного сложнее, так как нужно будет решить показательное уравнение.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$$

$$2^{-x} = 2^3$$

$$-x = 3$$

$$x = -3$$

Таким образом, $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$.

Пример 4. $\log_{27} 3 = x$.

$$27^x = 3$$

$$(3^3)^x = 3^1$$

$$3^{3x} = 3^1$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Таким образом, $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$.

Пример 5. $\log_{\frac{1}{7} 49} \frac{1}{49} = x$.

$$\left(\frac{1}{7}\right)^x = \frac{1}{49} = \left(\frac{1}{7}\right)^2$$

$$x = 2$$

Таким образом, $\log_{\frac{1}{7} 49} \frac{1}{49} = 2$.

Выше были специально подобраны такие логарифмы, значения которых находятся довольно легко. И эти найденные значения имеют простой вид: целые числа или простые дроби.

Но можно придумать или найти примеры таких логарифмов, значения которых невозможно вычислить «вручную».

Пример 6. $\log_2 5 = x$.

$$2^x = 5$$

В этом примере нельзя подобрать значение x .

Ясно только, что $2 < x < 3$ (так как $2^2 = 4$ – «недолет», а $2^3 = 8$ – «перелет»).

Нельзя вычислить x и решением показательного уравнения (как в Примерах 3, 4, 5), поскольку обе части уравнения $2^x = 5$ невозможно привести к одинаковому основанию.

В подобных случаях эти числа именно так окончательно и записывают, не называя прямо их значения: $\log_2 5$, $\log_3 7$, $\log_3 7$.

И такая запись означает:

$\log_2 5$ – «та степень, в которую нужно возвести 2, чтобы получить 5»,

$\log_4 52$ – «та степень, в которую нужно возвести 4, чтобы получить 52», и так далее.

ЛОГАРИФМЫ: «ИНСТРУКЦИЯ ПО ПРИМЕНЕНИЮ»

Этот блок Отступления окажется, в некотором смысле, сложнее предыдущего, потому что его недостаточно только прочитать. Его, как говорилось ранее, нужно заучить.

Но не просто глядя на него – так не получится, а написав по памяти много раз (да знаю, знаю, как не хочется это делать ☺).

А теперь перейдем к тем самым формулам, которые предстоит запомнить.

Набор этих формул-правил можно назвать **«логарифмическим конструктором»**, потому что они похожи на набор инструментов для работы с логарифмами. С помощью этого «конструктора» с ними и производятся перечисленные ниже действия (и только они!).

Подобно этому, ранее мы говорили о **«показательном конструкторе»**, с помощью которого работают с числами, возведенными в степень.

Итак, с логарифмами, с этими забавными «зашифрованными» числами, можно выполнять следующие действия:

$$1) \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

$$2) \log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

$$3) \log_a x^p = p \log_a x = \log_a x^p$$

$$4) \log_{a^p} x = \frac{1}{p} \log_a x = \log_a x^p$$

$$5) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Примечание.

На самом деле существуют и другие формулы «конструктора», но в заданиях В5 они вряд ли могут встретиться.

Кроме этих формул, которые описывают действия над логарифмами, нужно помнить так называемое «основное логарифмическое тождество»: $a^{\log_a x} = x$ (например, $3^{\log_3 7} = 7$, $8^{\log_8 23} = 23$, и так далее).

Задания на его применение встречаются довольно часто. Поэтому его нужно хорошо зрительно помнить, и уметь распознавать выражения, похожие на него. Подробнее об этом – в задании В7.

И ЕЩЕ ОДНА ОСОБЕННОСТЬ ЛОГАРИФМОВ

И последний момент, которым закончим это Отступление: «начинка» логарифмов, то есть «большое число справа» всегда должно быть больше нуля (и с точки зрения «правильной математики» нужно всегда проверять полученные корни логарифмических уравнений на выполнение этого условия).

А теперь, после такой зажигательной и нереально любопытной теории – «долгожданные» примеры логарифмических уравнений ☺.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

**В7.3.1. НАЙДИТЕ КОРЕНЬ УРАВНЕНИЯ $\log_5(12 - 3x) = 2 + \log_5 3$.**

Решение подобных уравнений удобно разбивать на следующие этапы.

1-й ЭТАП: ПРИВЕСТИ УРАВНЕНИЕ К ВИДУ $\log_a f(x) = \text{ЧИСЛО}$.

$$\log_5(12 - 3x) - \log_5 3 = 2$$

$$\log_5 \frac{(12 - 3x)}{3} = 2 \quad (*)$$

(для преобразования использовалась формула 2 «конструктора»).

2-й ЭТАП: ПРИМЕНИТЬ «КРУТИЛКУ» И НАЙТИ ЗНАЧЕНИЕ x .

$$5^2 = \frac{(12 - 3x)}{3}$$

$$25 = \frac{(12 - 3x)}{3}$$

$$12 - 3x = 75; \quad 3x = -63; \quad x = -21$$

А на вопрос «правильно ли то, что мы нашли?», отвечает 3-й этап.

3-ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ КОРЕНЬ.

В этом уравнении удобнее подставлять найденное значение корня в уравнение (*).

$$\log_5 \frac{(12 - 3(-21))}{3} = \log_5 25 = 2$$

4-й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

-	2	1					
---	---	---	--	--	--	--	--

В7.3.2. НАЙДИТЕ КОРЕНЬ УРАВНЕНИЯ $\log_2(6 - x) = 4$.1-Й ЭТАП: ПРИВЕСТИ УРАВНЕНИЕ К ВИДУ $\log_a f(x) = \text{ЧИСЛО}$.

Исходное уравнение уже имеет нужный вид.

2-Й ЭТАП: ПРИМЕНИТЬ «КРУТИЛКУ» И НАЙТИ ЗНАЧЕНИЕ x .

$$2^4 = 6 - x$$

$$x = 6 - 16 = -10.$$

3-ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ КОРЕНЬ.

$$\log_2(6 - (-10)) = 4$$

$$\log_2 16 = 4 \text{ — правильно.}$$

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

-	1	0					
---	---	---	--	--	--	--	--

В7.3.3. НАЙДИТЕ КОРЕНЬ УРАВНЕНИЯ $\log_{\frac{1}{4}}(12 - x) = -3$.1-Й ЭТАП: ПРИВЕСТИ УРАВНЕНИЕ К ВИДУ $\log_a f(x) = \text{ЧИСЛО}$.

Исходное уравнение уже имеет нужный вид.

2-Й ЭТАП: ПРИМЕНИТЬ «КРУТИЛКУ» И НАЙТИ ЗНАЧЕНИЕ x .

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 12 - x$$

С учетом того, что $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 1 / \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 4^3 = 64$, запишем предыдущее уравнение так:

$$12 - x = 64; \quad x = 12 - 64 = -52$$

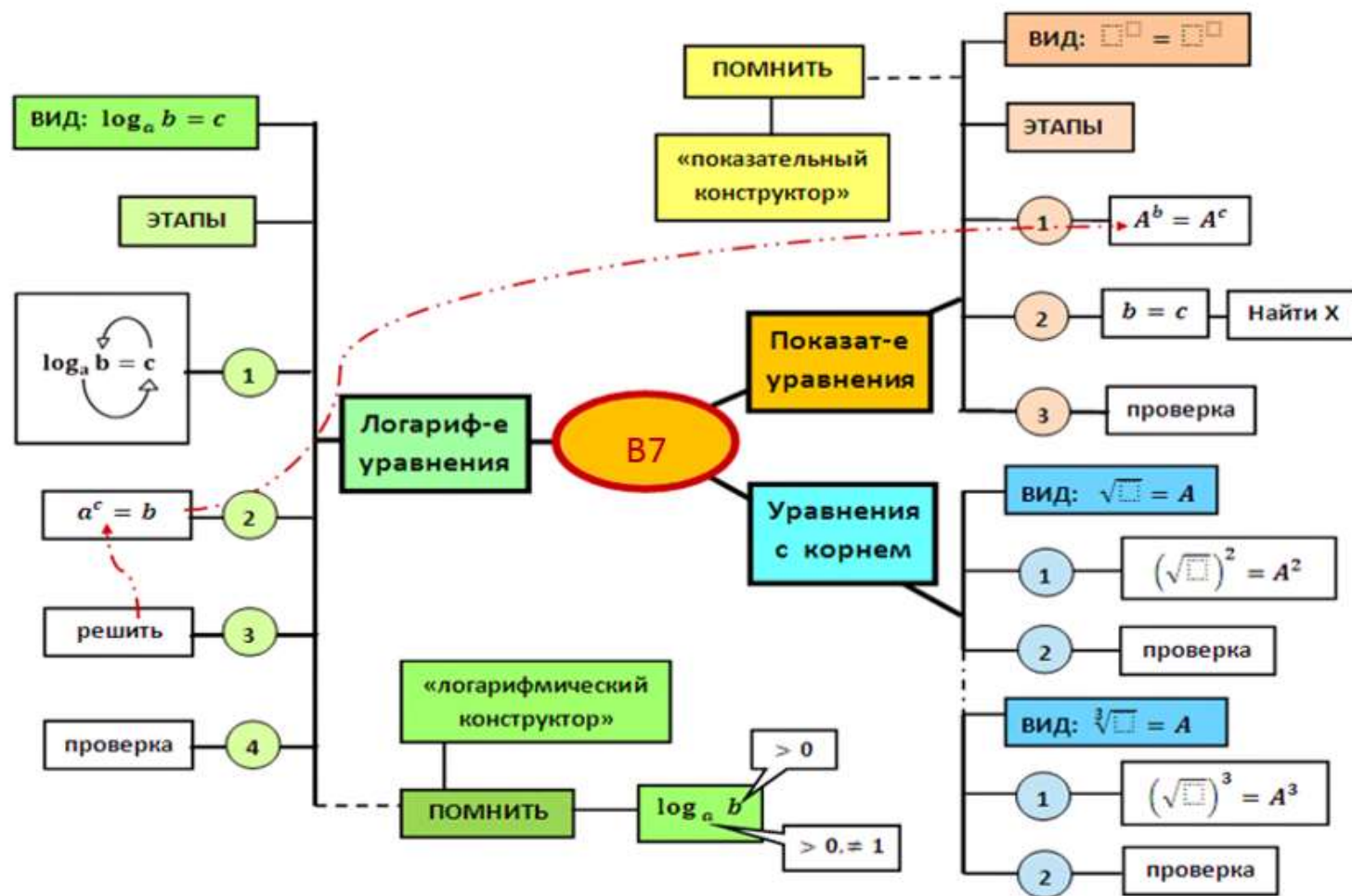
3-ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ КОРЕНЬ.

$$\log_{\frac{1}{4}}(12 - (-52)) = \log_{\frac{1}{4}} 64 = \log_{4^{-1}} 4^3 = -1 \cdot 3 \log_4 4 = -3$$

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

-	5	2					
---	---	---	--	--	--	--	--

Думаю, что приведенных примеров будет достаточно для успешного освоения заданий В7.



ЗАДАНИЕ В11

Задания В11, судя по всему, будут заключаться в вычислении выражений, содержащих тригонометрические функции (и, возможно, степенные и логарифмические выражения).

Это задание перекликается с В7, где приходилось решать различные уравнения (в том числе – логарифмические). А также с заданием В8, где уже встречались элементы тригонометрии.

Поэтому, прорабатывая задания В7 и В8, получившиеся такими ~~большими и нудными~~ живительными и интересными ☺, вы, по сути, «убиваете еще одного зайца» – по имени В11.

11.1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

А теперь настало время посмотреть и на них.

Для того чтобы успешно справляться тригонометрическими выражениями в задании В11, необходимо помнить следующее:

- 1) **Таблицу значений** тригонометрических функций для острых углов;
- 2) **Основное тригонометрическое тождество**;
- 3) Правила работы с **формулами приведения**.

Если первые пункты списка уже обсуждались в главе В8, то третий пункт, как показывает практика, все же требует разъяснения, для которого мы временно уходим на очередное Тематическое Отступление.

ОТСТУПЛЕНИЕ: «ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ»

Эти формулы называются так потому, что позволяют выразить (заменить) тригонометрические функции «особых» углов 2 – 4 четвертей через известные табличные значения «особых» углов 1 четверти.

То есть «привести» их к уже знакомым значениям этих функций для углов $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$.

Формулы приведения – часто используемый в учебных заданиях инструмент для вычисления тригонометрических функций углов больше 90° .

Формулы приведения могут быть сведены к двум **Правилам**, которые, для простоты, лучше объяснить на конкретных примерах.

Пример 1. Требуется найти $\sin 150^\circ$.

Угол 150° можно получить как от ближайшей горизонтальной оси ($180^\circ - 30^\circ$), так и от ближайшей вертикальной ($90^\circ + 60^\circ$).

Правило №1 утверждает следующее (рис. 11а):

Если угол образован от горизонтали (например, углов $0^\circ, 360^\circ, \pm 180^\circ$), то «приводимая» функция не изменяется, а первоначальный угол заменяется на прибавляемый (вычитаемый).
В нашем примере $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = 1/2$.

Если же угол образован от вертикали (например, углов $\pm 90^\circ, \pm 270^\circ$), то «приводимая» функции изменится на противоположную (синус на косинус, тангенс на котангенс и так далее).

В нашем примере $\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = 1/2$.

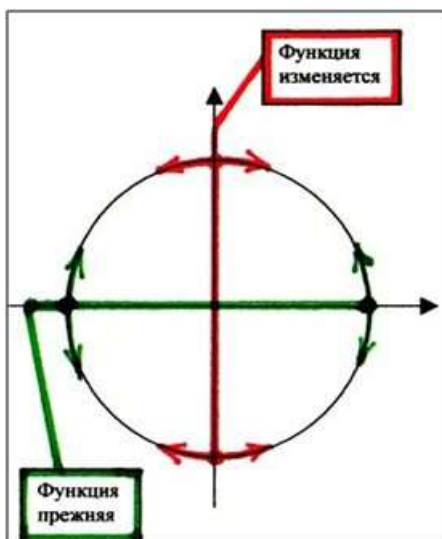


РИСУНОК 11а

Правило №2 устанавливает знак полученной функции:

он будет таким же, как у исходной, «приводимой» функции.

В нашем примере $\sin 150^\circ > 0$, значит, и полученные $\sin 30^\circ$ или $\cos 60^\circ$ будут иметь знак «+».

Пример 2. Требуется найти $\cos 600^\circ$.

Угол 600° соответствует второму обороту вокруг окружности. В этом случае нужно отнять от 600° наибольшее целое число полных оборотов, то есть, в нашем случае 360° . После этого мы получим угол 240° , совпадающий на окружности с углом 600° . Учтем, что $\cos 240^\circ < 0$.

Итак,

$$\cos 600^\circ = \cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -1/2$$

Или, в другом варианте

$$\cos 600^\circ = \cos 240^\circ = \cos(270^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -1/2$$

Пример 3. Требуется найти $\operatorname{tg} 225^\circ$.

$$\operatorname{tg} 225^\circ = \sin 225^\circ / \cos 225^\circ.$$

На единичной окружности видно, что $\sin 225^\circ < 0^\circ$ и $\cos 225^\circ < 0^\circ$, следовательно, $\operatorname{tg} 225^\circ = \sin 225^\circ / \cos 225^\circ > 0^\circ$.

Если угол образовать от горизонтали, то $\operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 45^\circ) = +\operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

Если же угол образовать от вертикали, то $\operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg}(270^\circ - 45^\circ) = +\operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

Пример 4. Требуется найти $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{6}$.

Если угол дан в радианах, то часто удобнее сначала перевести его в градусы, а затем выполнить уже привычные вычисления. Перевод в градусы проще всего сделать так:

$$\frac{11\pi}{6} = \frac{11 \cdot 180^\circ}{6} = 11 \cdot 30^\circ = 330^\circ$$

Таким образом, исходный угол равен 330° , а знак искомой величины

$$\operatorname{ctg} 330^\circ = \cos 330^\circ / \sin 330^\circ < 0.$$

Теперь воспользуемся формулами приведения:

$$\operatorname{ctg} 330^\circ = \operatorname{ctg}(360^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{ctg} 30^\circ = -\sqrt{3} \quad \text{или}$$

$$\operatorname{ctg} 330^\circ = \operatorname{ctg}(270^\circ + 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}.$$

А теперь, после перерыва на это Отступление, переходим к обещанным примерам В11 «из чистой тригонометрии».

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

В11.1.1. ВЫЧИСЛИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $12 \cdot (\sin \alpha)^2$, ЕСЛИ $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$.

Подобные задания можно решать, по крайней мере, двумя способами.

Способ 1.**1-ЭТАП: РЕШЕНИЕ.**

Раз в условии дан котангенс, распишем его через синус и косинус:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{3}$$

После возведения в квадрат получится:

$$(\operatorname{ctg} \alpha)^2 = \frac{(\cos \alpha)^2}{(\sin \alpha)^2} = \frac{1 - (\sin \alpha)^2}{(\sin \alpha)^2} = 3$$

$$\frac{1 - (\sin \alpha)^2}{(\sin \alpha)^2} = 3$$

$$3(\sin \alpha)^2 = 1 - (\sin \alpha)^2$$

$$(\sin \alpha)^2 = \frac{1}{4}$$

А теперь, найдя значение $(\sin \alpha)^2$, легко найдем и значение искомого выражения:

$$12(\sin \alpha)^2 = 12 \cdot \frac{1}{4} = 3$$

Способ 2.

Если решение первым способом было основано на применении основного тригонометрического тождества, то сейчас мы пойдем другим путем. И для него будет достаточно всего лишь помнить табличные значения тригонометрических функций.

Тогда выстраивается такая цепочка выводов (она должна быть понятна и без пояснений):

$$\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3} \rightarrow \alpha = 30^\circ \rightarrow \sin \alpha = 1/2 \rightarrow (\sin \alpha)^2 = 1/4 \rightarrow 12(\sin \alpha)^2 = 12/4 = 3$$

С точки зрения «правильной» математики, в этой цепочке есть неточность (на этапе преобразования $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3} \rightarrow \alpha = 30^\circ$), но она никак не влияет на правильность ответа.

Кстати, вопрос на сообразительность – для самых «продвинутых чайников»: что это за неточность?

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.**3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.**

3							
---	--	--	--	--	--	--	--

В11.1.2. ВЫЧИСЛИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $9(\operatorname{tg} \alpha)^2$, ЕСЛИ $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.**Способ 1.****1-ЭТАП: РЕШЕНИЕ.**

Раз в условии упомянут тангенс, распишем его через синус и косинус:

$$(\operatorname{tg} \alpha)^2 = \frac{(\sin \alpha)^2}{(\cos \alpha)^2} = \frac{1 - (\cos \alpha)^2}{(\cos \alpha)^2} = \frac{1 - 3/4}{3/4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

А теперь найдем значение искомого выражения:

$$9(\operatorname{tg} \alpha)^2 = 9 \cdot \frac{1}{3} = \frac{9}{1} \cdot \frac{1}{3} = 3$$

2-й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.**Способ 2.****1-ЭТАП: РЕШЕНИЕ.**

В этом примере получается такая цепочка выводов:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \alpha = 30^\circ \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow (\operatorname{tg} \alpha)^2 = \frac{1}{3} \rightarrow 9(\operatorname{tg} \alpha)^2 = \frac{9}{3} = 3$$

И опять цепочка содержит похожую неточность, которая не влияет на правильность ответа.

2-й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.**3-й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.**

3							
----------	--	--	--	--	--	--	--

В11.1.3. ВЫЧИСЛИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{3\pi}{4}$.

Ну что ж, наверное, на экзамене может встретиться и такое.

И опять: достаточно помнить табличные значения тригонометрических функций для острых углов и уметь работать с формулами приведения.

1-ЭТАП: РЕШЕНИЕ.

Итак, $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Значение $\cos \frac{3\pi}{4}$ найдем по формуле приведения. Причем, для удобства работы, величину угла можно перевести в градусы (но это не обязательно).

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{4} = 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ$$

$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Вообще говоря, к такому же выводу можно придти, сообразив, что на единичной окружности точки, соответствующие углам 135° и 45° симметричны относительно оси ОУ. И, значит, их синусы равны, а косинусы равны по величине, но противоположны по знаку.

Таким образом, приходим к тому же выводу: $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Итак, искомое выражение равно

$$\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.**3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.**

-	0	,	5				
---	---	---	---	--	--	--	--

В11.1.4. ВЫЧИСЛИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $2\sin(\pi - \alpha) + 3\cos\frac{\pi}{2}$, ЕСЛИ $\sin\alpha = 0,4$.

1-ЭТАП: РЕШЕНИЕ.

Согласно таблице значений $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, остается только найти $\sin(\pi - \alpha)$.

Правила формул приведения (да и просто рисунок на единичной окружности) утверждают, что $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, а поскольку $\sin\alpha = 0,4$, то ответ, что называется, уже «в кармане».

$$2\sin(\pi - \alpha) + 3\cos\frac{\pi}{2} = 2\sin\alpha + 3\cos\frac{\pi}{2} = 2 \cdot 0,4 + 0 = 0,8$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

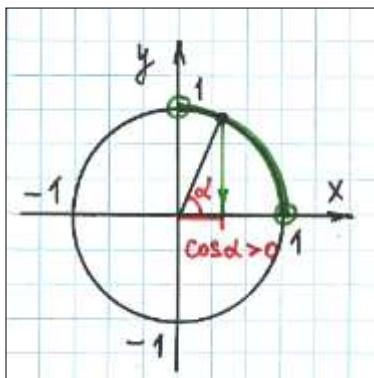
0	,	8					
---	---	---	--	--	--	--	--

А теперь посмотрим, как решаются, пожалуй, самые популярные задания подобного плана.

В11.1.5. НАЙДИТЕ $\cos \alpha$, ЕСЛИ $\sin \alpha = \frac{7}{25}$ И $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$.

1-ЭТАП: ВЫБОР ПУТИ РЕШЕНИЯ. ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Обозначим дугой на рисунке «зону» разрешенного в условии угла.



В этом примере (как и во многих подобных) следует воспользоваться известной формулой, связывающей между собой значения синуса и косинуса.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Можно для простоты вычисления сразу подставить в нее известное значение синуса:

$$\left(\frac{7}{25}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2$$

Далее возможны, например, такие варианты вычислений (выбирайте из них наиболее удобный или придумайте что-нибудь свое).

Вариант 1.

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= 1^2 - \left(\frac{7}{25}\right)^2 = \left(1 - \frac{7}{25}\right)\left(1 + \frac{7}{25}\right) = \left(\frac{25}{25} - \frac{7}{25}\right)\left(\frac{25}{25} + \frac{7}{25}\right) = \frac{18}{25} \cdot \frac{32}{25} = \\ &= \frac{9 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 2}{25 \cdot 25} = \frac{9 \cdot 4 \cdot 16}{25 \cdot 25}; \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{9 \cdot 4 \cdot 16}{25 \cdot 25}} = \pm \frac{3 \cdot 2 \cdot 4}{5 \cdot 5} = \pm \frac{24}{25} \end{aligned}$$

По рисунку видно, что выбирать в данном случае нужно положительное значение косинуса.

$$\cos \alpha = \frac{24}{25} = \frac{24 \cdot 4}{25 \cdot 5} = \frac{96}{100} = 0,96$$

Вариант 2.

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2 = 1 - \frac{49}{625} = \frac{625}{625} - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}; \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{576}{625}} = \pm \sqrt{\frac{576}{625}}$$

Корень из числа 576 можно найти разными способами. Рассмотрим один из них: попытаемся разбить число 576 на множители, из которых легко извлекается корень.

$$576 = 4 \cdot 144 = 4 \cdot 2 \cdot 72 = 4 \cdot 2 \cdot 36 \cdot 2 = 4 \cdot 4 \cdot 36$$

Таким образом,

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{576}{625}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4 \cdot 36}{25 \cdot 25}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 6}{5 \cdot 5} = \frac{24}{25} = 0,96$$

2-й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

В данном случае проверкой являлось вычисление, сделанное другим способом.

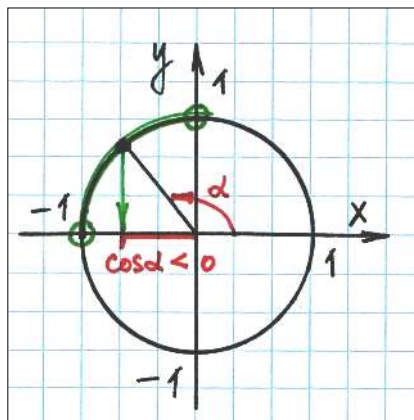
3-й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

0	,	9	6				
---	---	---	---	--	--	--	--

В11.1.6. НАЙДИТЕ $26\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, ЕСЛИ $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ И $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

1-ЭТАП: ВЫБОР ПУТИ РЕШЕНИЯ. ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Обозначим дугой на рисунке «зону» разрешенного в условии угла.



Проще всего начать решение этого задания, применив формулу приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha.$$

Таким образом, для решения задания требуется найти значение выражения $26\cos\alpha$, имея известное значение $\sin\alpha$.

В этом примере (как и во многих подобных) следует воспользоваться известной формулой, связывающей между собой значения синуса и косинуса:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Для простоты вычисления сразу подставим в нее известное значение синуса:

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

Далее возможны, например, такие варианты вычислений:

Вариант 1.

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha &= 1^2 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \left(1 - \frac{5}{13}\right)\left(1 + \frac{5}{13}\right) = \left(\frac{13}{13} - \frac{5}{13}\right)\left(\frac{13}{13} + \frac{5}{13}\right) = \frac{8}{13} \cdot \frac{18}{13} = \\ &= \frac{4 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 2}{13 \cdot 13} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 9}{13 \cdot 13} \\ \cos\alpha &= \pm \sqrt{\frac{4 \cdot 4 \cdot 9}{13 \cdot 13}} = \pm \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{13} = \pm \frac{12}{13}\end{aligned}$$

По рисунку видно, что выбирать в данном случае нужно отрицательное значение косинуса:

$$\cos \alpha = -\frac{12}{13}$$

Найдем теперь искомое выражение:

$$26 \cos \alpha = -\frac{26 \cdot 12}{13} = -24$$

Вариант 2.

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169}{169} - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{144}{169}} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$$

$$26 \cos \alpha = -\frac{26 \cdot 12}{13} = -24$$

2-й ЭТАП: ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА.

3-й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

-	2	4					
---	---	---	--	--	--	--	--

11.2. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ И СТЕПЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Во всех разобранных примерах применяются одно или несколько правил из набора **«логарифмического конструктора»**. Для успешного решения этих заданий необходимо помнить также **«показательный конструктор»**. Напомню, что упомянутые «конструкторы» – это наборы правил работы со степенями и логарифмами (непреренно еще раз загляните в главу В7).



Разбивка решения логарифмических примеров В11.2 на этапы довольно условна. Ее цель – еще раз осознать и закрепить полезную привычку: вычислить – проверить – записать ответ.

В11.2.1. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $51\log_7 \sqrt[3]{7}$.

1-й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ.

$$51\log_7 \sqrt[3]{7} = 51 \log_7 7^{\frac{1}{3}} = 51 \cdot \frac{1}{3} \log_7 7 = \frac{51}{3} \cdot 1 = 17$$

2-й и 3-й ЭТАПЫ: ПРОВЕРКА ОТВЕТА И ЕГО ЗАПИСЬ.

1	7						
---	---	--	--	--	--	--	--

В11.2.2. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $25^{\log_5 \sqrt{17}}$.

1-й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ.

$$25^{\log_5 \sqrt{17}} = 5^{2\log_5 17^{\frac{1}{2}}} = 5^{\log_5 17^{\frac{2}{2}}} = 5^{\log_5 17^1} = 5^{\log_5 17} = 17$$

(на последнем этапе преобразований применяется основное логарифмическое тождество).

2-й и 3-й ЭТАПЫ: ПРОВЕРКА ОТВЕТА И ЕГО ЗАПИСЬ.

1	7						
---	---	--	--	--	--	--	--

В11.2.3. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

$$\frac{\log_9 \sqrt{22}}{\log_9 22}.$$

1-й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ.

$$\frac{\log_9 \sqrt{22}}{\log_9 22} = \frac{\log_9 22^{\frac{1}{2}}}{\log_9 22} = \frac{\frac{1}{2} \log_9 22}{\log_9 22} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_9 22}{\log_9 22} = \frac{1}{2} = 0,5$$

2-й и 3-й ЭТАПЫ: ПРОВЕРКА ОТВЕТА И ЕГО ЗАПИСЬ.

0	,	5					
---	---	---	--	--	--	--	--

В11.2.4. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

$$\frac{18}{8^{\log_8 3}}.$$

1-й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ.

$$\frac{18}{8^{\log_8 3}} = \frac{18}{3} = 6$$

(для преобразования знаменателя применяется основное логарифмическое тождество).

2-й и 3-й ЭТАПЫ: ПРОВЕРКА ОТВЕТА И ЕГО ЗАПИСЬ.

6							
---	--	--	--	--	--	--	--

В11.2.5. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

$$\log_{\frac{1}{22}} \sqrt{22}.$$

1-й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ.

$$\log_{\frac{1}{22}} \sqrt{22} = \log_{22^{-1}} 22^{\frac{1}{2}} = (-1) \frac{1}{2} \log_{22} 22 = -\frac{1}{2} \log_{22} 22 = -\frac{1}{2} = -0,5$$

2-й и 3-й ЭТАПЫ: ПРОВЕРКА ОТВЕТА И ЕГО ЗАПИСЬ.

-	0	,	5				
---	---	---	---	--	--	--	--

В11.2.6. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

$7^{\log_{49} 16}.$

1-й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ.

$$7^{\log_{49} 16} = 7^{\log_{7^2} 16} = 7^{\frac{1}{2} \log_7 16} = 7^{\log_7 16^{\frac{1}{2}}} = 7^{\log_7 \sqrt{16}} = \sqrt{16} = 4$$

2-й и 3-й этапы: ПРОВЕРКА ОТВЕТА И ЕГО ЗАПИСЬ.

4							
---	--	--	--	--	--	--	--

В11.2.7. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

$\log_{16} \log_3 81.$

1-й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ.

$$\log_{16} \log_3 81 = \log_{16} 4 = \frac{1}{2} = 0,5$$

В этом примере один логарифм является «начинкой» другого логарифма.

Проще всего подобные примеры решать в 2 действия.

С помощью «крутки» вычисляем сначала внутренний логарифм: $\log_3 81 = 4$, а затем получившийся после этого $\log_{16} 4 = \frac{1}{2} = 0,5$.

По сути, удобнее было бы записать исходный пример в виде $\log_{16}(\log_3 81)$, но такая запись почему-то не принята в литературе.

2-й и 3-й этапы: ПРОВЕРКА ОТВЕТА И ЕГО ЗАПИСЬ.

0	,	5					
---	---	---	--	--	--	--	--

В11.2.8. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

$\log_7 13 \cdot \log_{13} 49.$

При решении этого примера использовалась так называемая «формула перехода логарифма к другому основанию», которая входит в «логарифмический конструктор»:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

1-й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ.

$$\begin{aligned} \log_7 13 \cdot \log_{13} 49 &= \log_7 13 \cdot \log_{13} 7^2 = 2 \log_7 13 \cdot \log_{13} 7 = 2 \log_7 13 \cdot \frac{\log_7 7}{\log_7 13} = \\ &= 2 \log_7 13 \cdot \frac{1}{\log_7 13} = 2 \end{aligned}$$

2-й и 3-й этапы: проверка ответа и его запись.

2							
---	--	--	--	--	--	--	--

В11.2.9. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

$\log_5 135 - \log_5 5,4.$

1-й этап: вычисление.

$$\log_5 135 - \log_5 5,4 = \log_5 \frac{135}{5,4} = \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3 \log_5 5 = 3 \cdot 1 = 3$$

2-й и 3-й этапы: проверка ответа и его запись.

2							
---	--	--	--	--	--	--	--

В11.2.10. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

$9 - \sqrt[5]{4} \cdot 2^{\frac{3}{5}}.$

1-й этап: вычисление.

$$9 - \sqrt[5]{4} \cdot 2^{\frac{3}{5}} = 9 - 4^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{\frac{3}{5}} = 9 - (2^2)^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{\frac{3}{5}} = 9 - 2^{\frac{2}{5}} \cdot 2^{\frac{3}{5}} = 9 - 2^{\frac{5}{5}} = 9 - 2^1 = 7$$

2-й и 3-й этапы: проверка ответа и его запись.

7							
---	--	--	--	--	--	--	--

В11.2.11. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

$-13 \cdot (256)^{\frac{1}{8}} + 16.$

1-й этап: вычисление.

$$\begin{aligned} -13 \cdot (256)^{\frac{1}{8}} + 16 &= (*) = -13 \cdot (4^4)^{\frac{1}{8}} + 16 = -13 \cdot 4^{\frac{4}{8}} + 16 = -13 \cdot 4^{\frac{1}{2}} + 16 = \\ &= -13 \cdot \sqrt{4} + 16 = -13 \cdot 2 + 16 = -26 + 16 = -10 \end{aligned}$$

Или, после (*), можно сделать, например, немного по-другому:

$$\begin{aligned} -13 \cdot (16^2)^{\frac{1}{8}} + 16 &= -13 \cdot 16^{\frac{2}{8}} + 16 = -13 \cdot 16^{\frac{1}{4}} + 16 = -13 \cdot (4^2)^{\frac{1}{4}} + 16 = \\ &= -13 \cdot \sqrt{4} + 16 = -13 \cdot 2 + 16 = -26 + 16 = -10 \end{aligned}$$

2-й и 3-й этапы: проверка ответа и его запись.

-	1	0					
---	---	---	--	--	--	--	--

Как видно из решенных выше примеров, В11.2 не требуют особой математической мудрости.

Для того чтобы уверенно выполнять подобные задания, необходимо не столько понимать правила действий со степенями и логарифмами, сколько автоматически применять их на практике.

Основные советы по выполнению заданий В7 и В11:

- Запомните показательный и логарифмический «конструкторы». Лучше всего это сделать путем их периодического и многократного написания;
- Многие логарифмические задания (уравнения или выражения) можно решать как с помощью «крутки», так и с помощью «конструктора»: это просто два различных инструмента работы. Умейте использовать каждый из них, но в конкретных заданиях выбирайте наиболее простой;
- Запомните основное тригонометрическое тождество, а также таблицу значений тригонометрических функций для особых углов 1-й четверти. Она приведена в Тематическом Отступлении задания В8;
- Для вычисления значений тригонометрических функций углов 2 – 4 четвертей используйте формулы приведения (или способ, показанный в Отступлении №2 задания В15);
- Обязательно проверяйте сделанное, как бы вы ни были уверены в его правильности.

Вот и все, что же может быть еще проще? ☺