СБОРНИК ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ 9-го КЛАССА

(задания школьного и муниципального этапов Всероссийской олимпиады школьников по математике с 2012-2013 по 201502016 учебный год
Задания и ответы)

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ - Югра
2012-2013

9 *класс*

1. Есть таблица 8×8 и карточки с числами от 1 до 64. Двое игроков по очереди кладут по одной карточке на свободные клетки таблицы. Когда все карточки разложены, игроки отмечают в каждом столбце наименьшее число и находят сумму всех отмеченных чисел. Если эта сумма четна – выигрывает первый игрок, а если нечетна – второй. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

2. Ученик не заметил знака умножения между двумя трехзначными числами и написал одно шестизначное число, которое оказалось в семь раз больше их произведения. Найдите эти числа.

3. Точки KиL– середины сторон AB и BC четырехугольника $ABCD$. На стороне CD выбрана такая точкаM, что$CM : MD = 2 : 1$. Известно, что$DK \parallel BM$ и$AL \parallel CD$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ – трапеция.

4. Известно, что $a + b + c > 0;\ ab + ac + bc > 0;\ abc > 0$. Докажите, что $a > 0, b > 0,\ c > 0$.

5. Можно раскрасить грани куба либо все в белый цвет, либо все в черный цвет, либо часть граней в белый цвет, а оставшуюся часть – в черный. Сколько существует различных способов окраски граней куба, если различными считаются такие окраски кубов, которые не совмещаются вращением.

Всероссийская олимпиада школьников по математике
(школьный уровень) 9 класс
2013-2014

Задание 1

Докажите, что сумма $n^2 + 3n + 4$ ни при каком целом n не делится на 49.

Задание 2

При каких значениях x параметра a наименьшее значение функции $y = x^2 - 2ax + 45$ на $\left[-3;\infty\right)$ равно 9.

Задание 3

В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке E. Через точку E проведена касательная к окружности, которая пересекает катет CB в точке D. Докажите, что треугольник BDE равнобедренный.

Задание 4

Доказать, что при положительных a и b $(a \neq b)$ выполняется неравенство $\frac{b}{b-a} + \frac{a+b}{a} - \frac{a}{b-a} + \frac{a}{b} > 4$

Задание 5

Вася возвёл натуральное число **a** в квадрат, записал результат на доску и стёр последние 2005 цифр. Могла ли последняя цифра оставшегося на доске числа равняться единице?

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ - Югра
2013-2014

1. Решите задачу (7 баллов)

Найдите остаток от деления числа 222…2 (в его записи 2012 двоек) на 7

2. Решите задачу (7 баллов)

Отец и сын катались по кругу на катке. Время от времени отец обгонял сына. Когда сын стал двигаться по кругу в противоположенном направлении, они стали встречаться в 5 раз чаще. Во сколько раз отец бегает на коньках быстрее сына?

3. Решите задачу (7 баллов)

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 133; \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

4. Решите задачу (7 баллов)

Найдите все натуральные числа, десятичная запись которых содержит ровно один нуль, такие, что при вычёркивании этого нуля число уменьшается в 9 раз.

5. Решите задачу (7 баллов)

Медиана и высота, проведенные из вершины треугольника, делят угол при этой вершине на три равные части. Найдите углы треугольника.

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике Ханты-Мансийский автономный округ - Югра 2014-2015

1. Сумма цифр числа x равна y, а сумма цифр числа y равна z (если число однозначное, то сумма его цифр равна самому числу). Найдите все значения x, для которых $x + y + z = 90$.

2. Есть лист клетчатой бумаги и карандаши шести цветов. Какое наименьшее число клеток нужно закрасить, чтобы для любых двух разных цветов нашлись две соседние по стороне клетки, закрашенные в эти цвета?

3. Даны 50 различных натуральных чисел, 25 из которых не превосходят 50, а остальные больше 50, но не превосходят 100. При этом никакие два из них не отличаются ровно на 50. Найдите сумму этих чисел.

4. Сторона EF прямоугольника $BEFD$ проходит через вершину A прямоугольника $ABCD$. Найдите площадь прямоугольника $BEFD$, если площадь прямоугольника $ABCD$ равна 1.

5. Если первый автомобиль сделает 4 рейса, а второй 3 рейса, то они перевезут вместе меньше 21 т. груза. Если же первый сделает 7 рейсов, а второй 4 рейса, то они перевезут больше 33 т. груза. Какой автомобиль имеет большую грузоподъемность? (Каждый автомобиль в каждом рейсе перевозит груз, равный своей грузоподъемности).

Всероссийская олимпиада школьников по математике
(школьный уровень) 9 класс
2014-2015

Задание 1

Антикварный магазин, купив два предмета на общую сумму 360 рублей, продал их, получив 25% прибыли. За сколько был продан каждый предмет, если на первый была наценка 50%, а на второй – 12,5%?

Задание 2

Сравните числа $\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{28+10\sqrt{3}}$ и 10.

Задание 3

В треугольнике ABC угол A равен 60°, а угол B равен 82°. AD, BE и CF- высоты, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOF.

Задание 4

Постройте график функции: $y=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}+\dfrac{x^2}{x+1}$.

Задание 5

При каких значениях параметра p отношение корней уравнения $x^2+2px+1=0$ равно 9?

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ - Югра
2015-2015

1. Задайте формулой какую-нибудь квадратичную функцию, график которой пересекает оси координат в вершинах прямоугольного треугольника.

2. Ваня и Петя за первое полугодие получили по 15 оценок по математике: тройки, четверки и пятерки. При этом Ваня получил пятерок столько же, сколько Петя четверок, четверок столько же, сколько Петя троек, троек столько же, сколько Петя пятерок. Оказалось, что средний балл за полугодие у ребят одинаковый. Сколько троек за полугодие получил Ваня?

3. Для каждого простого числа p найти все возможные пары натуральных чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}$.

4. Докажите неравенство $\frac{1}{5}<\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}...-\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\leq\frac{2}{5}$.

5. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются в точке M на основании AD. Докажите, что треугольник BMC равнобедренный.

Всероссийская олимпиада школьников по математике
(школьный уровень) 9 класс
2015-2016

Задание 1

Найдите сумму цифр в десятичной записи числа $4^{12} \cdot 5^{21}$.

Задание 2

На складе хранилось 100 кг ягод, содержание воды в которых составляло 99%. От долгого хранения содержание воды в ягодах сократилось до 98%. Сколько теперь весят ягоды?

Задание 3

Назовем число зеркальным, если слева направо оно «читается» так же, как справа налево. Например, число 12321 – зеркальное. Сколько существует пятизначных зеркальных чисел, которые делятся на 5?

Задание 4

Диагональ KM делит трапецию KLMN на два подобных треугольника (KN и LM – основания). KN=9 см, LM=4 см. Найти: диагональ KM.

Задание 5

Решите уравнение:

$$y^4 - 4xy^2 + 5x^2 - 4x + 4 = 0$$

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

2012-2013

9 класс (муниципальный уровень)

1. Есть таблица 8×8 и карточки с числами от 1 до 64. Двое игроков по очереди кладут по одной карточке на свободные клетки таблицы. Когда все карточки разложены, игроки отмечают в каждом столбце наименьшее число и находят сумму всех отмеченных чисел. Если эта сумма четна – выигрывает первый игрок, а если нечетна – второй. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?
   Ответ: у второго игрока.
   Решение. Второй игрок должен мысленно разбить все карточки на пары (2, 3), (4, 5), . . . , (62, 63), (64, 1). И если первый игрок выкладывает карточку из какой-то пары, то второй игрок выкладывает в тот же столбец вторую карточку из этой же пары. В результате в каждом столбце будут выложены карточки из каких-то четырех пар и наименьшим в столбце окажется число, которое было наименьшим в одной из пар. Но наименьшие числа во всех парах, кроме (64, 1) – четные, а наименьшее число в «исключительной» паре – 1. Понятно, что 1 обязательно окажется отмеченным числом. Следовательно, в конце игры будет отмечено 7 четных чисел и одно нечетное, и второй игрок выиграет.
   Примечание. Необоснованный ответ – 0 баллов.

2. Ученик не заметил знака умножения между двумя трехзначными числами и написал одно шестизначное число, которое оказалось в семь раз больше их произведения. Найдите эти числа.
   Ответ: 143, 143.
   Решение. Пусть *x*и *y*–искомые трехзначные числа, тогда $7 \cdot x \cdot y = 1000x + y$. Поделив обе части на x, получим $7y = 1000 + {}^{y}/_{x}$, где ${}^{y}/_{x}$ – целое число в пределах от 1 до 9 (так как *y их* трехзначные числа), поэтому $1001 \leq 7y \leq 1009$, $143 \leq y \leq 144$. Поскольку $x \geq 100$, то ${}^{y}/_{x} = 1$ и$7y = 1001.$ Откуда $y = 143,\ x = 143$.
   Примечание. Верный, но не обоснованный ответ – 2 балл.

3. Точки *K*и*L*– середины сторон *AB* и *BC*четырехугольника *ABCD*. На стороне *CD* выбрана такая точка*M*, что*CM* :*MD* = 2 : 1. Известно, что*DK*|| *BM* и*AL* ||*CD*. Докажите, что четырехугольник*ABCD*– трапеция.
   Доказательство.Проведем через точку *L* прямую параллельную*BM*,и пусть она пересекает отрезок *CM* в точке*N*. Так как L – середина*BC*, то, *LN*– средняялиния треугольника *BCM*, значит *CN* = *NM*. По условию *CM* :*MD* = 2 : 1, следовательно $CN = NM = MD$. Обозначим через *E* и*F* точки пересечения прямой*AL* с прямыми*KD* и*BM* соответственно. *KE*– средняя линия в треугольнике *ABF*,поэтому*AE* = *EF*. Далее, из того, что *LN*||*FM*||*ED*и *NM* = *MD*следует, согласно теореме Фалеса, равенство *LF* =*FE*. Наконец, заметим, что четырехугольник *EFMD* –параллелограмм, поэтому *FE* = *MD*. Таким образом, *AL*= 3*EF* = 3*MD* =*CD* и

$AL||CD$. Следовательно, $ALCD$ – параллелограмм, и $AD||BC$. Учитывая, что $CD||AL \nparallel AB$, то четырехугольник $ABCD$– трапеция.
Примечание. Замечено, что пересечении прямых AL, DC, KD и BM- параллелограмм – 1 балл.

4. Известно, что $a+b+c>0;\ ab+ac+bc>0;\ abc>0$. Докажите, что $a>0$, $b>0,\ c>0$.
Доказательство. Допустим, что среди чисел $a,\ b,\ c$ есть отрицательные. Поскольку $abc>0$, то отрицательных чисел ровно два. Пусть, например, $a<0$, $b<0,\ c>0$ (другие случаи рассматриваются аналогично). Из второго неравенства получаем $ac+b(a+c)>0$. Но $ac<0$ и $b(a+c)<0$, поскольку из первого неравенства $a+c>-b>0$. Следовательно, $ac+b(a+c)<0$. Получили противоречие.
Примечание. Рассмотрен как и в данном решении один случай – 7 баллов.

5. Можно раскрасить грани куба либо все в белый цвет, либо все в черный цвет, либо часть граней в белый цвет,а оставшуюся часть – в черный. Сколько существует различных способов окраски граней куба, если различными считаются такие окраски кубов, которые не совмещаются вращением.
Ответ: 10.
Решение.Окраски граней куба естественно различаются по числу окрашенных граней в белый цвет. Очевидно, имеется ровно один вариант окраски всех граней куба в белый цвет, и один вариант, когда нет ни одной белой грани. Точно так же, очевидно, что имеется ровно один вариант окраски одной грани куба в белый цвет и один вариант окраски пяти граней в белый цвет (или одной грани в черный цвет). Далее, существуютровно две различные окраски, когда две грани куба окрашены в белый цвет.Первый вариант, когда белыеграни противоположные в кубе, второй, когда они смежные, т. е. имеют общее ребро.Любая окраска куба, состоящая из двух белых граней, совмещается вращением с одной из них. Действительно, совмещая белые грани двух таких кубов, окраски совпадут, если у них в белый цвет окрашены противоположные грани. Если у них белые грани имеют общее ребро, то вращая один из них вокруг оси, перпендикулярной совмещенным граням, добьемся совпадения двух других белых граней. Аналогично, имеется два варианта для четырех белых граней, или для двух черных граней. Наконец, покажем, что и в случае трех белых граней имеется лишь два различных варианта окраски. Действительно, разобьем все грани на три пары противоположны граней. Тогда окраски различаются, если все три грани из разных пар (и тогда они имеют общую вершину), или две грани из одной пары, а одна из другой (тогда третья грань смежная двум граням из одной пары). Итого имеется 1 + 1 + 2 +2 + 2 +1 + 1 = 10 различных окрасок граней куба.
Примечание. Отмечено, что число различных окрасок не меньше 7 *-1 балл, не меньше 8 – 3 балла, не меньше 9 – 5 баллов.*

2013-2014

9 класс (школьный уровень)

Задание 1 **Решение:**

Допустим противное: существует такое целое *n*, что число n^2+3n+4 делиться на 49. Тогда выполняется равенство $n^2+3n+4=49k, k\in Z$. Рассмотрим это равенство, как квадратное относительно *n*.

$n^2+3n+4-49k=0(1)$

$D=9-4(4-49k)=4\cdot 49k-7$

Чтобы уравнение (1) имело целые корни, $D=a^2$, т.е. $4\cdot 49k-7=a^2$.

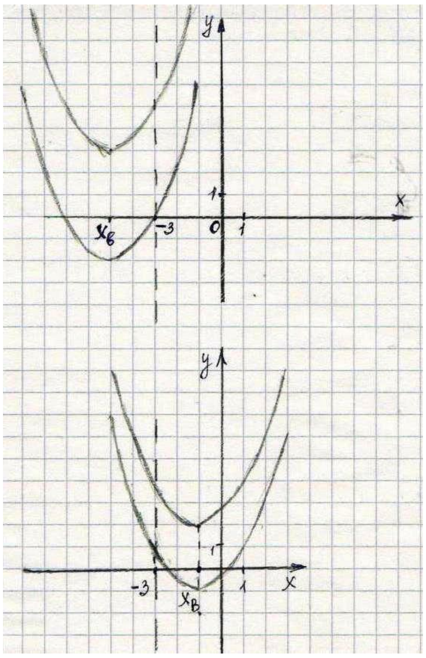
Левая часть этого равенства делится на 7, значит и правая (a^2) должна делится на 7, тогда и *a* делится на 7, т.е. $a^2=(7l)^2, l\in Z$.

Получаем $4\cdot 49k-7=49l^2, k\in Z, l\in Z$. Получаем противоречие: правая часть делиться на 49, а левая нет.

Ответ: сумма n^2+3n+4 ни при каком целом *n* не делится на 49.

Задание 2. **Решение:**

Графиком функции $y=x^2-2ax+45$ является парабола, ветви которой направлены вверх. На $[-3;\infty)$ имеется две возможности для расположения вершины параболы $(x_в=a)$



1) $x_в=a<$ -3, тогда наименьшее значение функции $y=x^2-2ax+45$ достигается в точке *x* = -3.

$y(-3)=9+6a+45=9,$

$6a+45=0,$

$a=-\frac{45}{6}=-7\frac{1}{2}<-3.$

2) $x_в\ge -3$. Тогда наименьшее значение функции на $[-3;\infty)$ достигается при *x* = *a*.

$y(a)=a^2-2a^2+45=9,$

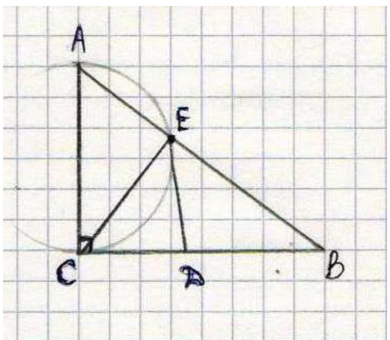
$a^2=36,$

$a=\pm 6,$

но *a* > -3, поэтому *a* = 6.

Ответ: $a=-7\frac{1}{2}, a=6$

Задание 3. **Решение:**



Дано: $\Delta ABC, \angle C=90^\circ$

ED - касательная

Доказать: ΔBDE - равнобедренный.

Доказательство:

1) $\angle \mathrm{CEA} = 90^\circ$, как вписанный угол, который опирается на диаметр.

2) $\angle \mathrm{DBE} = 90^\circ - \angle BCE = 90^\circ - \angle \mathrm{DCE}$
$\angle \mathrm{BED} = 90^\circ - \angle DEC$

3) Т.к. DE = DC, как отрезки касательных, проведённых из одной точки к окружности, то

ΔCDE - равнобедренный, тогда $\angle DCE = \angle DEC$, а это значит что $\angle DBE = \angle BED$, то есть ΔBDE - равнобедренный.

Задание 4. **Решение:**

$$\frac{b}{b-a} + \frac{a+b}{a} - \frac{a}{b-a} + \frac{a}{b} = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} + 1 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b-a} + 1 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) = 2 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) > 2 + 2 = 4$$

т.к. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ это сумма двух взаимно обратных положительных чисел.

Задание 5. **Решение:**

Рассмотрим число

$a = 32\underbrace{000...00}_{1001}$, тогда $a^2 = 1024\underbrace{000....00}_{2002}$. Если стереть последние 2005 цифр, то останется число 1.

Ответ: могла.

2013-2014

9 класс (муниципальный уровень)

1. Решите задачу (7 баллов)

Найдите остаток от деления числа 222…2 (в его записи 2012 двоек) на 7

Решение. При непосредственном делении обнаруживаем, что 22222…2 делится на 7. Но $2012 = 335 \cdot 6 + 2$. Значит, искомый остаток - такой же, как и у числа из двух двоек: 22, т.е., 1.

Оценивание. За верное решение – 7 баллов

2. Решите задачу (7 баллов)

Отец и сын катались по кругу на катке. Время от времени отец обгонял сына. Когда сын стал двигаться по кругу в противоположенном направлении, они стали встречаться в 5 раз чаще. Во сколько раз отец бегает на коньках быстрее сына?

Решение. Пусть S – длина круга, u – скорость отца, v – скорость сына. При движении в одном направлении, они встречались с интервалом $S/(u–v)$, а при движении в другом направлении – с интервалом $S/(u+v)$, в 5 раз меньшим. Это приводит к уравнению $5(u–v) = u+v$, откуда $u=1,5v$.

Оценивание. За верное решение – 7 баллов

3. Решите задачу (7 баллов)

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 133; \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

Решение.

$x^4+x^2y^2+y^4 = x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2 = (x^2+y^2)^2-x^2y^2 = (x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)=$

$=7(x^2+x\ +y^2)=133$, откуда $x^2+xy+y^2=19$.

Из второго уравнения системы тогда находим $2xy=12$, $xy=6$, $x^2+y^2=13$, $x^2+y^2+2xy=25$, $(x+y)^2=25$, $x+y=5$ или $x+y=-5$. С учетом $xy=6$ отсюда получим все решения.

Оценивание. За верное решение – 7 баллов

4. Решите задачу (7 баллов)

Найдите все натуральные числа, десятичная запись которых содержит ровно один нуль, такие, что при вычёркивании этого нуля число уменьшается в 9 раз.

Решение. Пусть искомое число имеет (в десятичной записи) вид *a0b*, где числа а и *b* не содержат нулей, число *b* – *n*-значное. По условию, *a0b* =*9ab*., или $a10^{n+1}+b=9\cdot(a10^n+b)$. Отсюда $a\cdot 10^n=8\cdot b$, и, т.к. $b < 10^n$, то $a < 8$. Значит, *a* – цифра, от 1 до 7. Поделив число «*a* с нулями» на 8, найдем *b* (количество нулей при этом определится автоматически – ибо в записи *b* нулей, по условию, нет).

Ответ: 10125, 2025, 30375, 405, 50625, 6075, 70875.

Оценивание. Верное решение – 7 баллов.

Правильный ответ (без обоснования отсутствия других решений) – 2 балла.

Частичный ответ – 1 балл.

5. Решите задачу (7 баллов)

Медиана и высота, проведенные из вершины треугольника, делят угол при этой вершине на три равные части. Найдите углы треугольника.

Решение. Пусть в треугольнике *ABC* высота *BH* и медиана *BM* делят угол *B* на три равные части. В треугольнике *ABM* высота *BH* является биссектрисой (а, значит, и медианой): *AH=HM*. Но тогда *HM:MC=1:2*. Т.к. *BM* – биссектриса (прямоугольного) треугольника *BHC*, то, по свойству биссектрисы, гипотенуза *BC* в *2* раза больше катета *BH*. Значит, угол *BCH* равен 30^o. Тогда угол *CBH* равен 60^o, а угол *B* – прямой (он в полтора раза больше).

Ответ: 30^o, 60^o *и* 90^o **.**

Оценивание. Верное решение – 7 баллов.

За правильный необоснованный ответ – 1 балл.

Замечание. Возможны и другие решения – как геометрические, так и алгебраические. Однако решение типа «для треугольника с такими углами это верно – значит, углы – такие», при отсутствии полного обоснования, оценивается в 1 балл.

2014-2015
9 класс (муниципальный уровень)

1. Ответ: x = 69, 72, 75. Решение. Так как $x \le 79$, то $y \le 16$, а $z \le 9$ (если $y = 9$, то z = 9). Следовательно, $y + z \le 25$, а $x \ge 65$. Далее перебор:
   если $65 \le x \le 68$, то $11 \le y \le 14,\ 2 \le z \le 5, x + y + z \le 68 + 14 + 5 = 87 < 90$;
   если $x = 69,$ то $x + y + z = 69 + 15 + 6 = 90$;
   если $x = 70, 71$, то $x + y + z \le 71 + 8 + 8 = 87 < 90$;
   если $x = 72,$ то $x + y + z = 72 + 9 + 9 = 90$,
   если $73 \le x \le 74,$ то $x + y + z \le 74 + 11 + 2 = 77 < 90$;
   если $x = 75,$ то $x + y + z = 75 + 12 + 3 = 90$;
   если $76 \le x \le 79,$ то $x + y + z \ge 76 + 13 + 4 = 93 > 90$;
   если $80 \le x \le 81,$ то $x + y + z \ge 80 + 8 + 8 = 96 > 90$;
   если $82 \le x \le 89,$ то $x + y + z \ge 82 + 10 + 1 = 93 > 90$;
   Критерии. Не полный перебор с потерей решений – 3 балла; полный перебор с арифметическими ошибками – минус 2 балла; не обоснованный полный ответ – 4 балла.

2. Ответ: 12. Решение. Оценка. Каждый цвет должен соседствовать с пятью другими цветами, но на клетчатом листе каждая клетка соседствует по стороне ровно с четырьмя клетками. Следовательно, в каждый цвет нужно окрасить как минимум две клетки, то есть закрасить нужно не менее 12 клеток. Следующий пример показывает, что двенадцать клеток достаточно (цифрами обозначены цвета).

4	3	5		
2	1	4	6	1
6	5	2	3	

   Критерии. Оценка без примера – 3 балла, пример без оценки – 4 балла.

3. Ответ: 2525. Решение. Обозначим 50 данных чисел через $x_1 < x_2 < \ldots < x_{25} \le 50 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{25} \le 100$. Так как никакие два из них не отличаются на 50, то числа $x_1 + 50,\ x_2 + 50,\ \ldots,\ x_{25} + 50,\ y_1 - 50,\ y_2 - 50,\ \ldots,\ y_{25} - 50$ во-первых, натуральные, во-вторых, различны и, в третьих, отличны от данных. Следовательно, имеем 100 различных, натуральных и не превосходящих 100 чисел, то есть данные числа и числа, полученные прибавлением и вычитанием 50, содержат все числа от 1 до 100. Тогда $x_1 + x_2 + \ldots + x_{25} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{25} + x_1 + 50 + x_2 + 50 + \ldots + x_{25} + 50 + y_1 - 50 + y_2 - 50 + \ldots + y_{25} - 50 = 2 \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_{25} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{25}) = 1 + 2 + \ldots + 100 = 50 \cdot 101$.
   Критерии. Верный ответ без обоснования – 2-3 балла.

4. Ответ: 1. Решение. Опустим из точки *A* перпендикуляр *AH* на *BD*. Тем самым мы разобьем прямоугольник *BEFD* на два прямоугольника *BEAH* и *DFAH*, в которых *BA* и *DA* являются диагоналями. Диагональ прямоугольника делит его на два равных треугольника. Следовательно, площадь прямоугольника *BEFD* в 2 раза

больше площади треугольника *BAD*, равного половине площади прямоугольника *ABCD*.

Критерии. Рассмотрены частные случаи – 1 балл.

5. Ответ: первый автомобиль. Решение. Пусть грузоподъемность первого автомобиля x тонн, а второго y тонн. Из условия задачи имеем $4x + 3y < 21$ и $7x + 4y > 33$. Наименьшим общим кратным чисел 21 и 33 является число 231 = $3 \cdot 7 \cdot 11$. Умножая обе части первого неравенства на 11, а второго на 7, получим $44x + 33y < 231$, $49x + 28y > 231$. Откуда имеем $49x + 28y > 231 > 44x + 33y \Rightarrow 5x > 5y \Rightarrow x > y$.

   Критерии. Необоснованный ответ – 0 баллов, составление начальных неравенств без дальнейших продвижений – 0 баллов.

2014-2015

9 класс (школьный уровень)

Задание 1

Первый был продан за 180 рублей, второй – за 270.

Задание 2. Решение:

Возведем оба числа в квадрат, так они оба положительны:

1)

$$\left(\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{28+10\sqrt{3}}\right)^2 = 28-10\sqrt{3}+2\sqrt{28-10\sqrt{3}}\cdot\sqrt{28+10\sqrt{3}}+28+10\sqrt{3} =$$

$$= 56+2\sqrt{28^2-\left(10\sqrt{3}\right)^2} = 56+2\sqrt{784-300} = 56+2\sqrt{484} = 56+2\cdot 22 = 100;$$

2) $10^2 = 100$. Так как равны квадраты положительных чисел, значит, равны и сами числа.

Ответ: числа равны.

Задание 3. Решение:

Одно из возможных обоснований:

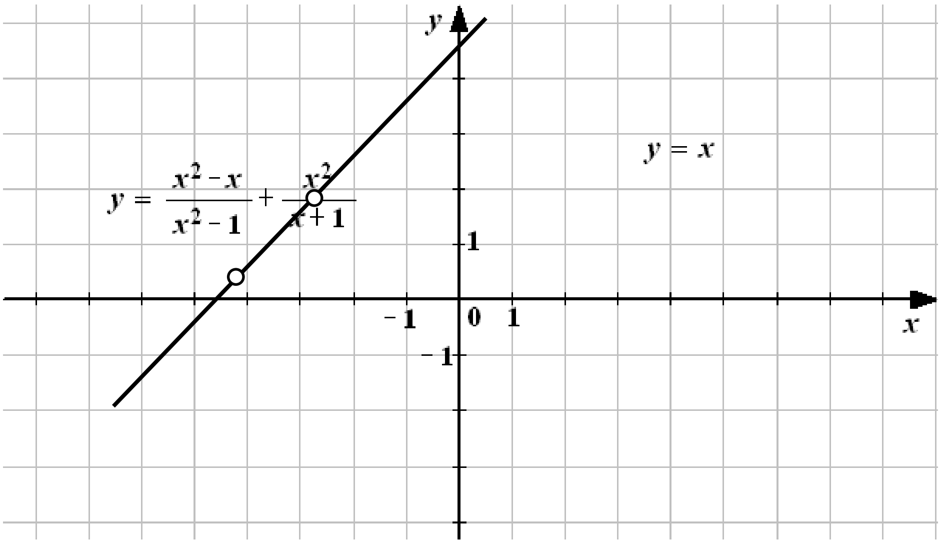
1) Рассмотрим треугольник ABD: угол ADB равен 90°,т.к. AD- высота треугольника ABC, тогда угол BAD=90°-82°=8°.

2) Рассмотрим треугольник AFO: угол AFO равен 90°,т.к. CF- высота треугольника ABC, тогда угол AOF=90°-8°=82°.

Ответ:82°.

Задание 4. Решение:

$y = \frac{x^2-x}{x^2-1}+\frac{x^2}{x+1} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{x^2}{x+1} = \frac{x+x^2}{x+1} = \frac{x(x+1)}{x+1} = x$, при условии, что $x \neq 1,\ x \neq -1$.



Задание 5. Решение: Пусть $x_1 = 9x_2$, тогда по теореме Виета $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2p, \\ x_1 \cdot x_2 = 1; \end{cases}$

$$\begin{cases} 9x_2 + x_2 = -2p, \\ 9x_2 \cdot x_2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 10x_2 = -2p, \\ 9x_2^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 10x_2 = -2p, \\ x_2^2 = \dfrac{1}{9}; \end{cases} \quad \begin{cases} p = -5x_2, \\ \left[\begin{array}{l} x_2 = \dfrac{1}{3}, \\ x_2 = -\dfrac{1}{3}; \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = -5 \cdot \dfrac{1}{3}, \\ x_2 = \dfrac{1}{3}; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} p = -5 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right), \\ x_2 = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = -\dfrac{5}{3}, \\ x_2 = \dfrac{1}{3}; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} p = \dfrac{5}{3}, \\ x_2 = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

<u>Ответ:</u> $\dfrac{5}{3}$; $-\dfrac{5}{3}$.

2015-2016

9 класс (муниципальный уровень)

1. **Ответ**: например $y = x^2 - 1$.

   Решение. Действительно, данная функция пересекает ось ординат в точке $y = -1$, а ось абсцисс в точках $x = \pm 1$, которые являются вершинами равнобедренного прямоугольного треугольника. Задача имеет бесконечное число решений. Взяв любой прямоугольный треугольник, с вершиной прямого угла на оси ординат и гипотенузой на оси абсцисс, можно методом неопределенных коэффициентов найти уравнение соответствующей квадратичной функции.

Критерии. Любой верный ответ с обоснованием или проверкой выполнения условия задачи – 7 баллов; верный ответ без проверки и без обоснования – 1-2 балла.

2. **Ответ**: 5 троек.

Решение. Пусть Петя за первое полугодие получил x пятерок, y четверок и z троек. Тогда Ваня получил соответственно y пятерок, z четверок и x троек. Согласно условию имеем $x + y + z = 15$, $\frac{5x+4y+3z}{15} = \frac{5y+4z+3x}{15} \Leftrightarrow 2x = y + z$. Подставляя $2x$ вместо $y + z$ в первое уравнение, получим $3x = 15$, откуда $x = 5$.

Критерии. Верный, обоснованный ответ – 7 баллов; ответ без обоснования – 0 баллов.

3. **Ответ**: $\left(\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p+p^2}\right), \left(\frac{1}{p+p^2}, \frac{1}{p+1}\right), \left(\frac{1}{2p}, \frac{1}{2p}\right)$.

Решение. Поскольку числа x, y и p положительны, умножая обе части уравнения на их произведение, получим $py + px = xy \Leftrightarrow xy - px - py = 0$. Прибавляя к обеим частям последнего равенства p^2 и раскладывая левую часть на множители, имеем $(x - p)(y - p) = p^2 = 1 \cdot p^2 = p \cdot p$. Таким образом в множестве натуральных чисел возможны следующие решения: $\begin{cases} x - p = 1 \\ y - p = p^2 \end{cases}$, $\begin{cases} x - p = p^2 \\ y - p = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x - p = p \\ y - p = p \end{cases}$. Отсюда получаем ответы $\begin{cases} x = p + 1 \\ y = p + p^2 \end{cases}$, $\begin{cases} x = p + p^2 \\ y = p + 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2p \\ y = 2p \end{cases}$.

Критерии. Обоснованно найдены все решения – 7 баллов; потеряно одно из первых двух решений – 5 баллов; обоснованно найдено только последнее решение – 3 балла; указаны все решения с подтверждением проверкой – 3 балла; указаны два решения – 2 балла, одно решение – 1 балл.

4. *Доказательство*. Оценка сверху. Справедливы следующие неравенства:
   $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{30-20+15-12+10}{60} = \frac{23}{60} < \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$. (Отброшены отрицательные слагаемые, поскольку разность в каждой скобке положительна).

Нижняя оценка. Имеем $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+...+\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{99}\right)+\frac{1}{100}>\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{30-20+15-12}{60}=\frac{13}{60}>\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$. (Здесь отбрасываются положительные слагаемые скобок).

Критерии. Верно обоснованы обе оценки – 7 баллов; верно обоснована одна из оценок – 4 балла.

5. Доказательство. По свойству равнобедренного треугольника, достаточно показать, что углы при основании *BC* равны. Поскольку *AD* и *BC* основания трапеции, то $\angle BCA = \angle CAD = \angle OAM = \angle OBM$. В первом равенстве углы равны как внутренние накрест лежащие, в последнем – как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Аналогично, $\angle CBD = \angle BDA = \angle ODM = \angle OCM$. Таким образом $\angle BCM = \angle BCA + \angle OCM = \angle OBM + \angle CBD = \angle CBD$. Что и завершает доказательство.

Критерии. Обоснованное доказательство – 7 баллов; доказательство для частного случая - равнобедренной трапеции – 0 баллов.

2015-2016

9 класс (школьный уровень)

Задание 1. Решение.

Преобразуем: $4^{12} \cdot 5^{21} = 2^3 \cdot 10^{21} = 80...0$.

Ответ: 8.

Задание 2. Решение

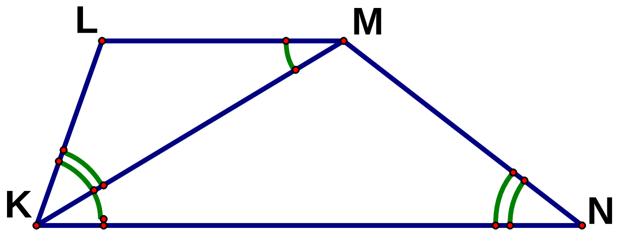
В начале хранения в ягодах был 1% сухого вещества. В конце хранения этот же вес составлял уже 2% от всех ягод. Значит, вес ягод уменьшился вдвое.

Задание 3. Решение.

Чтобы пятизначное зеркальное число делилось на 5, оно должно оканчиваться на 5. На 0 оно оканчиваться не может, так как 0 не бывает первой цифрой в записи целого числа. Таким образом, число должно иметь вид $5xyx5$, где x и y – произвольные цифры. То есть пятизначных зеркальных чисел, которые делятся на 5, столько же, сколько произвольных трехзначных зеркальных чисел(трехзначных зеркальных чисел всего 90 – столько же, сколько обычных двузначных чисел, так как две первые цифры трехзначного зеркального числа однозначно определяют третью цифру).

Ответ: 90.

Задание 4.



Треугольники KLM и KMN подобны, следовательно, их соответствующие стороны пропорциональны. Используем равенство углов: Углы CAD и BCA равны, как внутренние накрест лежащие. Так как треугольники ABC и ACD подобны, их соответствующие углы равны. Угол BAC не может быть равен углу DCA, так как в таком случае боковые стороны AB и CD были бы параллельны. Следовательно, угол BAC равен углу CDA. Тогда

$\dfrac{KL}{MN} = \dfrac{LM}{KM} = \dfrac{KM}{KN}$. Откуда $KM^2 = LM \cdot KN = 36$, KM=6 (см).

Ответ. KM=6 см.

Задание 5. Решение.

$$y^4 - 4xy^2 + 4x^2 + x^2 - 4x + 4 = 0$$

$(y^2 - 2x)^2 + (x-2)^2 = 0$. В левой части уравнения находится сумма двух неотрицательных выражений. Для того, чтобы эта сумма равнялась нулю, нужно, чтобы оба слагаемых были равны нулю. Второе слагаемое равно нулю при $x = 2$, а первое при $y^2 = 2x$. Таким образом, решением уравнения является две пары чисел: (2;2) и (2;-2).