МБОУ СОШ № 24 г. Сургута

Решение заданий ЕГЭ по теме: «Наибольшее и наименьшее значения функции»
Задание 11

Учитель математики
Сагалаева Татьяна Петровна

Основные понятия

Точка минимума — такая точка x_0, если у неё существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$

Минимум функции — значение функции в точке минимума x_0

Точка максимума — такая точка x_0, если у неё существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$

Максимум функции — значение функции в точке максимума x_0
Точки минимума и точки максимума называются точками экстремума.

Точки, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются ***критическими точками***.

Экстремумы могут существовать только в критических точках. Однако, не все критические точки являются экстремумами.

Теорема (достаточный признак существования экстремума функции).
Критическая точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, если при переходе через эту точку производная функции меняет знак, причём, если знак меняется с "плюса" на "минус", то точкой максимума, а если с "минуса" на "плюс", то точкой минимума.

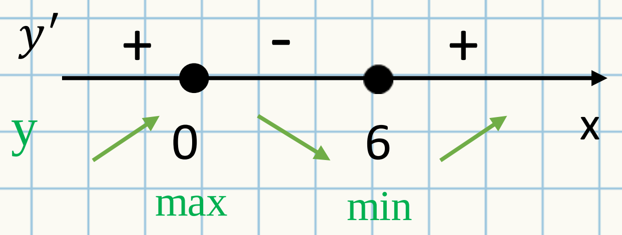
Задание №1. Найдите точку минимума функции $y=x^3-9x^2+12$.

$D(y)=R$

$y'(x)=3x^2-9\cdot 2x=3x^2-18x=3x(x-6)$

$y'(x)=0,\qquad 3x(x-6)=0,$

$x_1=0;\quad x_2=6$



Правила дифференцирования:

$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$

$(cf(x))'=cf'(x)$

$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$

При переходе через точку x=6 производная меняет знак с «-» на «+», значит, эта точка минимума.

Ответ: 6

Пусть функция f имеет на отрезке [a; b] конечное число критических точек.

Наибольшее и наименьшее значения функция f может принимать в критических точках функции или в точках a и b.

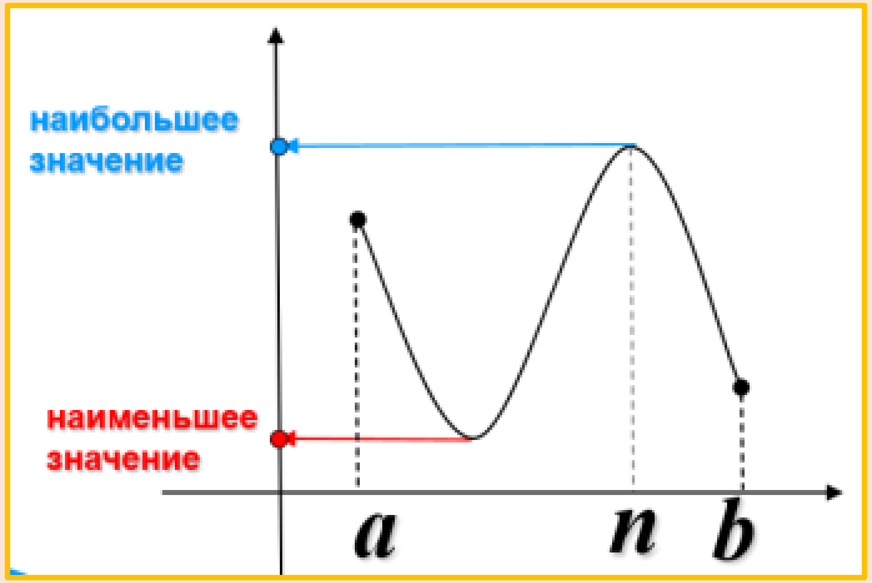


Рисунок 1

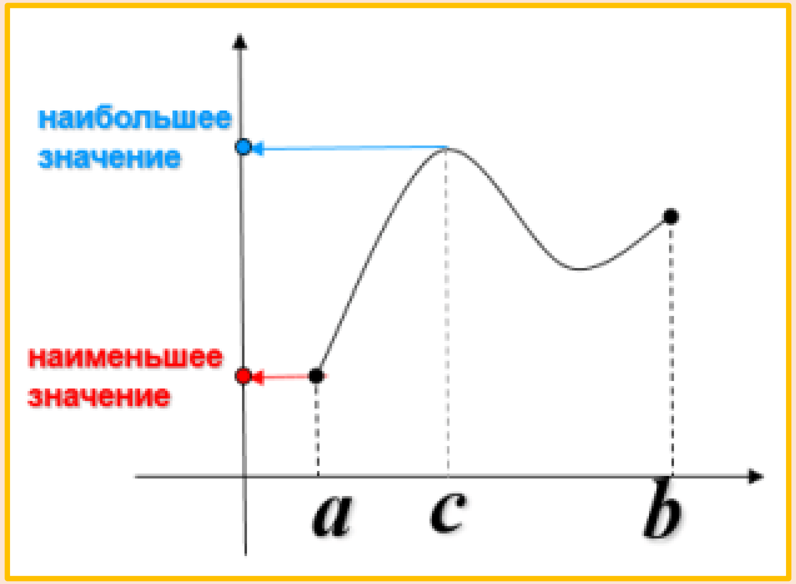


Рисунок 2

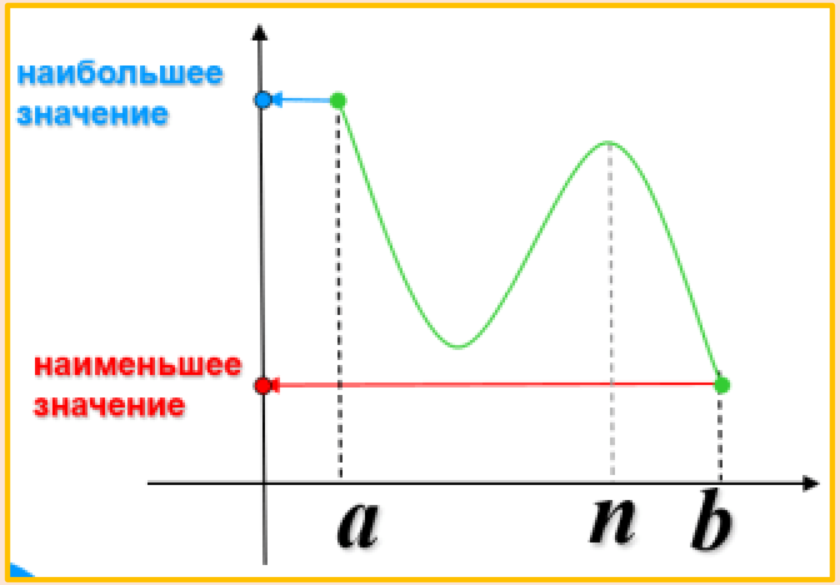


Рисунок 3

Задание №2. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^3}{4} - 27x + 11$ на отрезке $[-8; 0]$.

D(y)=R

$y(-8) = \frac{(-8)^3}{4} - 27 \cdot (-8) + 11 = -128 + 216 + 11 =$
$= 99$

$y(0) = \frac{0^3}{4} - 27 \cdot 0 + 11 = 11$

$y'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 27$

$y'(x) = 0,\ \frac{3}{4}x^2 - 27 = 0,\quad x^2 = \frac{27 \cdot 4}{3},\quad x^2 = 36$

$x_1 = -6;\quad x_2 = 6,\qquad 6 \notin [-8; 0]$

Чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции на отрезке, нужно найти:

1) значения функции на концах отрезка;

2) критические точки, которые принадлежат заданному отрезку;

3) значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку;

4) выбрать наибольшее(наименьшее) из полученных значений.

Интервалу $[-8; 0]$ принадлежит одна стационарная точка x=-6.

$y(-6) = \frac{(-6)^3}{4} - 27 \cdot (-6) + 11 = -54 + 162 + 11 = 119$

Из чисел 99, 11 и 119, наибольшее значение 119.

Ответ: 119

Задание №3. Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 3x + 16$ на отрезке $[1; 9]$.

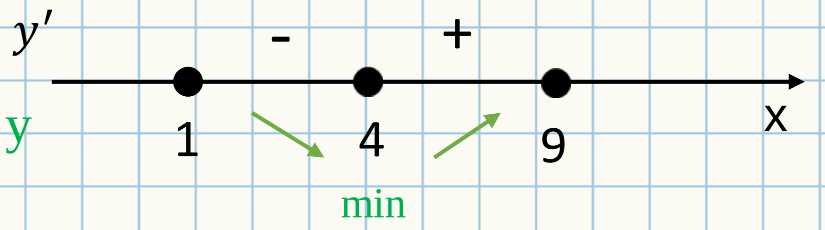
$D(y)=[0; +\infty)$

$y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 16$

$y'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3 = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3$

$y'(x) = 0,\ \ \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3 = 0,\ \ \sqrt{x} = \frac{3\cdot 2}{3},\ \sqrt{x} = 2,\ \ x = 4$

$4 \in [1; 9]$



В точке x=4 заданная функция имеет минимум.

$y(4) = 4\sqrt{4} - 3 \cdot 4 + 16 = 12$

Ответ: 12

Предположим, что функция f имеет на отрезке [a; b] **одну** точку экстремума.

Если это точка минимума, то в этой точке функция будет принимать наименьшее значение.

Если это точка максимума, то в этой точке функция будет принимать наибольшее значение.

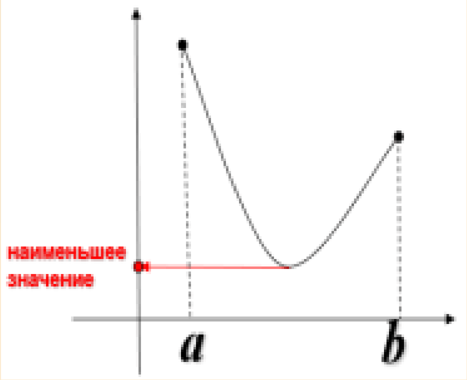


Рисунок 4

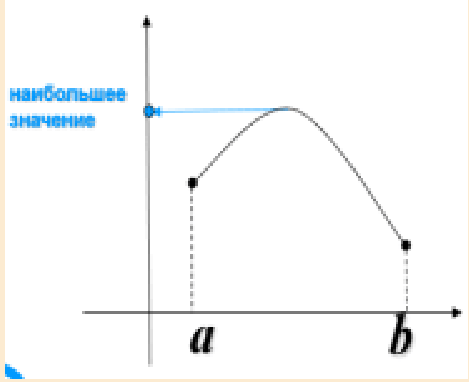


Рисунок 5

Задание № 4. Найдите наибольшее значение функции $y = (x+9)^2 \cdot (x-5) - 5$ на отрезке $[-19; -5]$.

D(y)=R

$y'(x) = \left((x+9)^2\right)'(x-5) + (x+9)^2(x-5)' - 5' =$

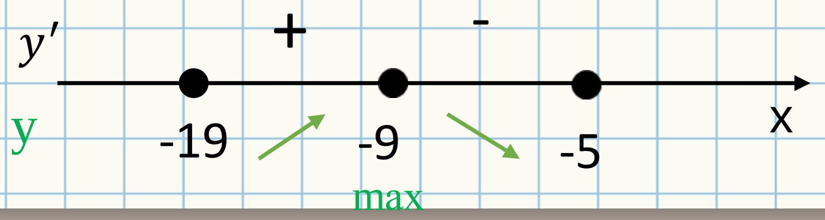
$2(x+9)(x+9)' \cdot (x-5) + (x+9)^2 \cdot 1 =$

$(x+9)\big(2(x-5) + (x+9)\big) = (x+9)(2x - 10 + x + 9) =$

$(x+9) \cdot (3x-1) = 3(x+9)\left(x - \dfrac{1}{3}\right)$

$y'(x) = 0, \quad 3(x+9)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0, \quad x_1 = -9; \quad x_2 = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} \notin [-19; -5]$



Правила дифференцирования:

$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

В точке x=-9 заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. $y(-9) = (-9+9)^2(-9+5) - 5 = -5$

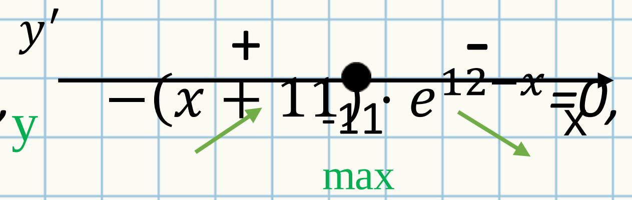
Ответ: -5

Задание №5. Найдите точку максимума функции $y = (x+12)\cdot e^{12-x}$

$D(y)=R$

$$y'(x) = (x+12)'\cdot e^{12-x} + (x+12)\cdot\left(e^{12-x}\right)'$$
$$= 1\cdot e^{12-x} + (x+12)\cdot e^{12-x}\cdot(12-x)'$$
$$= e^{12-x} - (x+12)\cdot e^{12-x} = e^{12-x}(1-x-12)$$
$$= -(x+11)\cdot e^{12-x}.$$

$y'(x)=0$, $-(x+11)\cdot e^{12-x}=0$, $x=-11$



Правила дифференцирования;

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$
$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$(e^x)' = e^x$$

При переходе через точку x=-11 производная меняет знак с «+» на «-», значит, эта точка максимума.
Ответ: -11

Задание № 6. Найдите точку минимума функции $y = -\dfrac{x}{x^2+144}$

D(y)=R

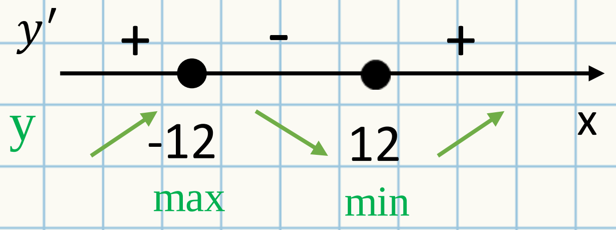
$$y'(x) = -\left(\frac{x}{x^2+144}\right)' = -\frac{x'\cdot(x^2+144) - x\cdot(x^2+144)'}{(x^2+144)^2}$$

$$= -\frac{1\cdot(x^2+144) - x\cdot 2x}{(x^2+144)^2} = -\frac{x^2+144-2x^2}{(x^2+144)^2} = -\frac{-x^2+144}{(x^2+144)^2} =$$

$$\frac{x^2-144}{(x^2+144)^2} = \frac{(x-12)(x+12)}{(x^2+144)^2}$$

$$y'(x) = 0, \qquad \frac{(x-12)(x+12)}{(x^2+144)^2} = 0$$

$$x_1 = -12; \quad x_2 = 12$$



Правила дифференцирования

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$$

При переходе через точку x=12 производная меняет знак с «-» на «+», значит, эта точка минимума.

Ответ: 12

Задание №7. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x^2+324}{x}$.

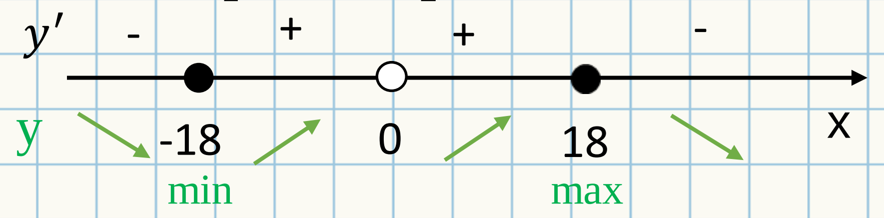
D(y): $x \neq 0$

$$y'(x) = -\left(\frac{x^2}{x}+\frac{324}{x}\right)' - \left(x+\frac{324}{x}\right)' = -\left(1-\frac{324}{x^2}\right) =$$

$$-\left(\frac{x^2-324}{x^2}\right) = \frac{-(x-18)(x+18)}{x^2}$$

$y'(x)=0$, $\quad \frac{-(x-18)(x+18)}{x^2}=0$

$x_1 = 18$; $\quad x_2 = -18$



Правила дифференцирования

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2}$$

При переходе через точку x=18 производная меняет знак с «+» на «-», значит, эта точка максимума.

Ответ: 18

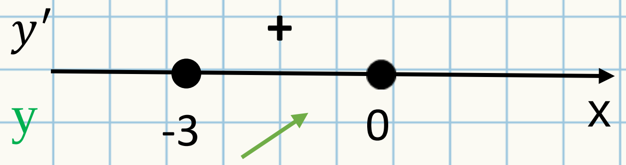
Задание №8. Найдите наименьшее значение функции $y = 9x - 9\,ln(x+4) + 2$ на отрезке $[-3; 0]$.

D(y): $x \in (-4; +\infty)$

$y'(x) = 9 - \frac{9}{x+4}(x+4)' = \frac{9(x+4)-9}{x+4} = \frac{9x+27}{x+4} = \frac{9(x+3)}{x+4}$,

$y'(x) = 0$, $\qquad \frac{9(x+3)}{x+4} = 0$,

$x = -3$;



Правила дифференцирования

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

$(cf(x))' = cf'(x)$

$(ln\,x)' = \frac{1}{x}$

Т.к. функция на отрезке $[-3; 0]$ возрастает, значит, она принимает наименьшее значение при x=-3.

$y(-3) = 9 \cdot (-3) - 9\,ln(-3+4) + 2 = -27 - 9 \cdot 0 + 2 = -25$

Ответ: -25

Задание №9. Найдите точку максимума функции $y = 13^{8x - x^2}$.

$D(y)=R$

Т.к. функция $y = 13^x$ *возрастающая, заданная функция достигает максимума в той же точке, в которой достигает максимум выражение* $\boldsymbol{8x - x^2}$.

Квадратный трехчлен $\boldsymbol{8x - x^2}$ *с отрицательным старшим коэффициентом достигает максимума в точке*

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-8}{2 \cdot (-1)} = 4$$

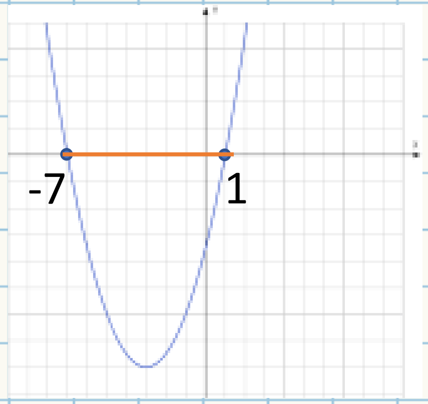
Ответ: 4

Задание №10. Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{7 - 6x - x^2}$.

Найдем область определения функции.

$$7 - 6x - x^2 \geq 0$$
$$x^2 + 6x - 7 \leq 0$$

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$
$$D = 6^2 - 4 \cdot (-7) = 36 + 28 = 64$$
$$x = \frac{-6 \pm 8}{2 \cdot 1};$$
$$x_1 = -7, \qquad x_2 = 1$$



$$D(y) = [-7; 1]$$

Т.к. функция $y = \sqrt{x}$ возрастающая, а заданная функция определена при найденном значении переменной, она достигает максимума в той же точке, в которой достигает максимум подкоренное выражение $7 - 6x - x^2$

$$x_{max} = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \cdot (-1)} = -3$$

$$y(-3) = \sqrt{7 - 6 \cdot (-3) - (-3)^2} = \sqrt{7 + 18 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

Ответ: 4

Задание №11. Найдите наименьшее значение функции $y = \log_3(x^2 - 6x + 10) + 2$.

Найдем область определения функции:

$x^2 - 6x + 10 > 0$

D(y)=R

Т.к. функция $y = \log_3 x$ возрастающая, она достигает наименьшее значение в той точке, в которой достигает наименьшее значение выражение $x^2 - 6x + 10$

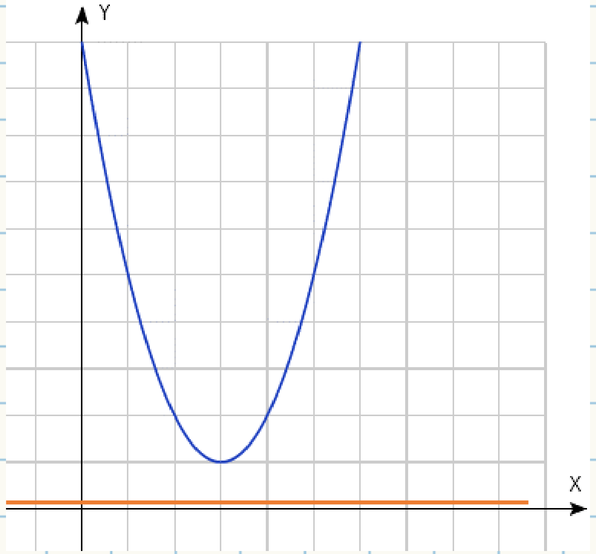
$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\cdot 1}$ =3

Функция $y = \log_3(x^2 - 6x + 10) + 2$ в точке x=3 определена, а, значит,

$y(3) = \log_3(3^2 - 6 \cdot 3 + 10) + 2 = \log_3 1 + 2 = 0 + 2 = 2$

$x^2 - 6x + 10$= 0

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 10$ =-4 <0



Ответ: 2

Задание №12. Найдите наименьшее значение функции $y = 5\sin x + \frac{24}{\pi}x + 6$ на отрезке $\left[-\frac{7\pi}{6}; 0\right]$.

D(y) =R

$y'(x) = 5\cos x + \frac{24}{\pi},$

$y'(x) = 0, \quad 5\cos x + \frac{24}{\pi} = 0, \quad \cos x = -\frac{24}{5\pi}$

$\emptyset$, т.к. $\cos x \in [-1; 1]$

Критических точек нет. Тогда наименьшее значение функция будет принимать на одном из концов отрезка.

$y\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = 5\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + \frac{24}{\pi}\cdot\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + 6 =$

$-5\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) - 28 + 6 = 5\cdot\frac{1}{2} - 22 = -19{,}5$

$y(0) = 5\sin 0 + \frac{24}{\pi}\cdot 0 + 6 = 6$

Правила дифференцирования

$\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$

$(\sin x)' = \cos x$

Ответ: -19,5

Задание №13. Найдите наименьшее значение функции $y = 3\cos x - 5x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

D(y) =R

$y'(x) = -3\sin x - 5,$

$y'(x) = 0,$ $\quad -3\sin x - 5 = 0,$ $\quad \sin x = -\frac{5}{3}$

$\emptyset$, т.к. $\sin x \in [-1; 1]$

$y'(x) < 0$ при всех значениях переменной x.

Значит, заданная функция является убывающей.

Тогда наименьшее значение функция принимает в правом конце отрезка, т.е. в точке x=0

$y(0) = 3\cos 0 + 4 = 3 \cdot 1 - 0 + 4 = 7$

Формула дифференцирования

$(\cos x)' = -\sin x$

Ответ: 7

Задание №14. Найдите наибольшее значение функции $y = 9tgx - 5x + 6$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

$$y'(x) = 9 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 5 = \frac{9 - 5\cos^2 x}{\cos^2 x} > 0$$

при любом $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$,

Значит, заданная функция возрастает на данном промежутке. Наибольшее значение функция на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$ достигает в правом конце отрезка, т.е. в точке x=0.

$$y(0) = 9 \cdot \operatorname{tg} 0 - 5 \cdot 0 + 6 = 6$$

Формула дифференцирования

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

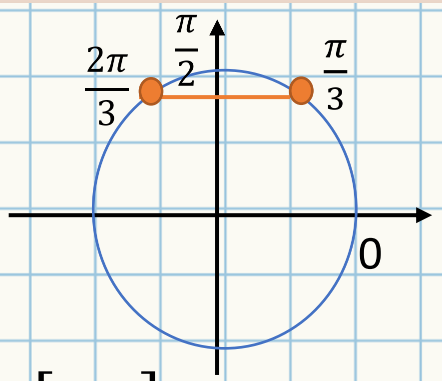
Ответ: 6

Задание №15. Найдите наибольшее значение функции $y = 12\cos x + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

D(y) =R

$y'(x) = -12\sin x + 6\sqrt{3}$,

$y'(x) = 0, \qquad -12\sin x + 6\sqrt{3} = 0,$



$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \qquad \frac{\pi}{3} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12 \cdot \cos\frac{\pi}{3} + 6\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 12$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12 \cdot \cos\frac{\pi}{2} + 6\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 6 + \sqrt{3}\pi$

$y(0) = 12 \cdot \cos 0 + 6\sqrt{3} \cdot 0 - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 18 - 2\sqrt{3}\pi$

Формула дифференцирования

$(\cos x)' = -\sin x$

Ответ: 12

Спасибо за внимание!