ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДМЕТНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КОМИССИЯ ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский

РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО ПРОВЕДЕНИЮ ШКОЛЬНОГО ЭТАПА ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ В 2013/2014 УЧЕБНОМ ГОДУ

Москва 2013

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Согласно документам, регламентирующим всероссийскую олимпиаду школьников (далее – Олимпиада), существует общая четырехэтапная структура Олимпиады: соответственно школьный, муниципальный, региональный и заключительный этапы. Основными целями и задачами Олимпиады являются выявление и развитие у обучающихся творческих способностей и интереса к научно-исследовательской деятельности, создание необходимых условий для поддержки лиц, проявивших выдающиеся способности, пропаганда научных знаний, привлечение ученых и практиков соответствующих областей к работе с талантливой молодежью, отбор наиболее талантливых из них в состав сборных команд Российской Федерации для участия в международных олимпиадах по общеобразовательным предметам.

Настоящие методические рекомендации подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике и направлены в помощь муниципальным методическим комиссиям в составлении заданий для проведения школьного этапа Олимпиады по математике в субъектах Российской Федерации.

Методические материалы содержат характеристику содержания школьного этапа, описание подходов к разработке заданий муниципальными предметно-методическими комиссиями; рекомендации по порядку проведения олимпиад по математике, требования к структуре и содержанию олимпиадных задач, рекомендуемые источники информации для подготовки заданий, а также рекомендации по оцениванию решений участников олимпиад.

Кроме того, приведены образцы комплектов олимпиадных заданий для проведения школьного этапа олимпиады с решениями.

Центральная предметно-методическая комиссия по математике выражает надежду, что представленные методические рекомендации окажутся полезными при проведении школьного этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике, и желает успехов организаторам в их проведении. В случае необходимости, дополнительную информацию по представленным методическим материалам можно получить по электронной почте, обратившись по адресу nazar_ag@mail.ru в Центральную предметно-методическую комиссию по математике.

Методические рекомендации для школьного этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2013/2014 утверждены на заседании Центральной предметно-методической комиссии по математике (протокол № 2 от 14 июня 2013).

Председатель Центральной предметно-методической комиссии по математике — Н.Х. Агаханов

2. ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ ШКОЛЬНОГО ЭТАПА ПО МАТЕМАТИКЕ

Одной из важнейших задач Олимпиады на начальных этапах является развитие интереса у обучающихся к математике, создание мотивации к систематическим занятиям математикой на кружках и факультативах. Свойственные подростковому периоду стремление к состязательности, к достижению успеха, делают олимпиады привлекательными соревнованиями, где в честной и объективной борьбе обучающийся может раскрыть свой интеллектуальный потенциал. Кроме того, привлекательными являются условия нестандартных задач, предлагаемых на олимпиадах, заметно отличающиеся от обязательных при изучении школьного материала заданий, направленных на отработку выполнения стандартных алгоритмов (например, решения квадратных уравнений). Наконец, первые олимпиадные успехи важны для самооценки учащегося, а также изменения отношения к нему учителей, возможно недооценивавших его способности. Нередки случаи, когда способный и даже талантливый обучающийся не успевает за отведенное на уроке время выполнить все задания из контрольной работы по изучаемой теме.

Необходимость решения сформулированных выше задач формирует подход к порядку проведения и характеру заданий на школьном этапе Олимпиады.

В олимпиаде имеет право принимать участие **каждый обучающийся** (далее – Участник), в том числе вне зависимости от его успеваемости по предмету. Олимпиада должна проводиться в удобное для Участников время. Число мест в классах (кабинетах) должно обеспечивать **самостоятельное** выполнение заданий олимпиады каждым Участником. Продолжительность олимпиады должна учитывать возрастные особенности Участников, а также трудность предлагаемых заданий.

Рекомендуемое время проведения олимпиады: для 5-6-х классов – 2 урока, для 7-8-х классов – 3 урока, для 9-11-х классов –3-4 урока.

После опубликования предварительных результатов проверки олимпиадных работ Участники имеют право ознакомиться со своими работами, в том числе сообщить о своем несогласии с выставленными баллами. В этом случае Председатель жюри школьной олимпиады назначает члена жюри для повторного рассмотрения работы. При этом оценка по работе может быть изменена, если запрос Участника об изменении оценки признается обоснованным. (Комментарий: школьный этап олимпиады традиционно проходит в доброжелательной обстановке, и на данном этапе нет необходимости применять обязательную при проведении последующих этапов процедуру подачи письменной апелляции).

По результатам олимпиады создается итоговая таблица по каждой параллели. Участники школьного этапа Олимпиады, набравшие наибольшее количество баллов в своей параллели, признаются победителями школьного этапа Олимпиады. Количество призеров школьного этапа Олимпиады определяется, исходя из квоты победителей и призеров, установленной организатором муниципального этапа Олимпиады. Призерами школьного этапа Олимпиады в пределах установленной квоты победителей и призеров признаются все участники школьного этапа Олимпиады, следующие в итоговой таблице за победителями.

3. ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАДАНИЙ

Задания школьного этапа олимпиады должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Задания не должны носить характер контрольной работы по различным разделам школьной математики. Недопустимо составление заданий на основе стандартного материала, изучаемого на уроках.
2. Задания не могут включать задачи, требующие знаний, выходящих за рамки программы основной школы по математике, изученных на момент проведения Олимпиады по всем базовым учебникам по алгебре и геометрии (олимпиада не должна быть соревнованием на эрудицию и знание разделов математики, выходящих за рамки школьной программы).
3. Задания олимпиады должны быть различной сложности для того, чтобы, с одной стороны, предоставить практически каждому ее участнику возможность выполнить наиболее простые из них, с другой стороны, достичь одной из основных целей олимпиады – определения наиболее способных Участников. Наиболее удачным является комплект заданий, при котором с первым заданием успешно справляются не менее 70% участников, со вторым – более 50%, с третьим –20%-30%, а с последними – лучшие из участников олимпиады.
4. В задания должны включаться задачи, имеющие привлекательную, запоминающуюся форму, формулировки должны быть четкими и понятными.

5. Вариант по каждому классу должен включать в себя 4-6 задач. Тематика заданий должна быть разнообразной, по возможности охватывающей все разделы школьной математики: арифметику, алгебру, геометрию. Варианты также должны включать в себя задачи на четность (в среднем звене школы), комбинаторику. Так в варианты для 5-6 классов рекомендуется включать задачи по арифметике, логические задачи, задачи по наглядной геометрии, задачи, использующие понятие четности; в 7-8 классах добавляются задачи, использующие преобразования алгебраических выражений, задачи на делимость, геометрические задачи на доказательство; в 9-11 последовательно добавляются задачи на свойства линейных и квадратичных функций, задачи по теории чисел, неравенства, задачи по тригонометрии, стереометрии, математическому анализу.
6. Задания олимпиады не должны составляться на основе одного источника (литература, Интернет), с целью уменьшения риска знакомства одного или нескольких ее участников со всеми задачами, включенными в вариант. Желательно использование источников, малодоступных для участников Олимпиады, либо включение в варианты **новых** задач.
7. Включение в задания для учащихся 5-6 классов, впервые участвующих в олимпиадах, задач, не требующих сложных математических рассуждений, либо использование одной такой задачи на последней позиции. Способному школьнику, не имевшему опыта участия в олимпиадах по математике, значительно проще построить, пусть даже достаточной сложный, пример математического объекта (числа, удовлетворяющего каким-то свойствам, разрезания фигуры на определенные части и т.п.), чем доказывать оптимальность по некоторым параметрам построенного примера.

4. ПРОВЕРКА ОЛИМПИАДНЫХ РАБОТ

Для единообразия проверки работ Участников в разных школах необходимо включение в варианты заданий не только ответов и решений заданий, но и критериев оценивания работ, а также основных принципов оценивания, приведенных в таблице.

Наилучшим образом зарекомендовала себя на математических олимпиадах 7-балльная шкала, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Помимо этого в методических рекомендациях по проведению Олимпиады следует проинформировать жюри школьного этапа о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой обучающегося, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

5. ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ ШКОЛЬНОГО ЭТАПА ОЛИМПИАДЫ

Приведенные типовые задания школьного этапа олимпиады не могут в одинаковой степени подходить для всех муниципальных образований, так как не могут учитывать разницу в уровне развития в них олимпиадного движения, наличия развитой системы городских математических кружков, наличие в городе сильных математических школ и т.п.. Муниципальным методическим комиссиям при разработке заданий Олимпиады следует учитывать территориальную специфику.

5 класс

5.1. Замените значки * в выражении 13*11*9*7*5*3*1 = 1 на знаки + и – так, чтобы получилось верное равенство.

5.2. Придумайте какой-нибудь прямоугольник периметра 18, который можно разрезать на 5 клетчатых квадратов. (Квадраты могут быть разных размеров. Клеточка имеет размер 1х1.)

5.3. Мальчик по чётным числам всегда говорит правду, а по нечётным всегда говорит неправду. Как-то его три ноябрьских дня подряд спрашивали: «Как тебя зовут?». На первый день он ответил: «Андрей», на второй: «Борис», на третий: «Виктор». Как зовут мальчика? Объясните, как вы рассуждали.

5.4. Гусеница ползет по столбу 5 минут вверх, затем 2 минуты вниз, потом опять 5 минут вверх и 2 минуты вниз и т.д. Скорость гусеницы всегда постоянна и равна 10 см в минуту. За какое время гусеница поднимется на 1,2 м?

5.5. Артем, Борис, Ваня и Глеб на перемене ели конфеты. Каждую минуту каждый из них съедал по одной конфете. В начале перемены у Артема и Бориса вместе было столько же конфет, сколько у Вани и Глеба. Могло ли в конце перемены у всех вместе остаться 15 конфет? Объясните свой ответ.

6 класс

6.1. Найдите все трёхзначные числа, у которых вторая цифра вчетверо больше первой, а сумма всех трёх цифр равна 14.

6.2. Из клетчатого квадрата 5х5 вырезали центральный квадратик 1х1. Разрежьте оставшуюся фигуру на 4 равные клетчатые фигуры. (Приведите какой-нибудь один пример разрезания).

6.3. Из ящика с яблоками взяли половину всего количества яблок, потом еще половину остатка, затем половину нового остатка, и, наконец, половину следующего остатка. После этого в ящике осталось 10 яблок. Сколько яблок было в ящике вначале?

6.4. В трех коробках лежат елочные шары: в одной – два красных, в другой – красный и синий, в третьей – два синих шара. На коробках написано: «Два красных», «Красный и синий», «Два синих». Известно, что ни одна из надписей не является правильной. Как, вытащив всего один шар, определить, в какой коробке лежат какие шары? Укажите, из какой коробки его нужно взять и как потом определить содержимое коробок.

6.5. Три подруги принесли в школу конфеты. Вторая принесла в два раза больше конфет, чем первая, а третья – в три раза больше, чем первая. Они сложили все конфеты вместе. После того, как подруги съели по 3 конфеты, первая ушла, а вторая поделила оставшиеся конфеты поровну. Третья сказала второй, что она ошиблась. Почему она так решила?

7 класс

7.1. Найдите какое-нибудь натуральное число такое, что если к нему прибавить сумму его цифр, то получится 2222.

7.2. Мама купила 10 больших пирожных, 7 средних и 4 маленьких. Маленькое пирожное весит вдвое меньше среднего, а большое — втрое больше маленького. Как маме поделить их между шестью детьми, чтобы общий вес пирожных, доставшихся каждому, был одним и тем же, если разрезать пирожные она не хочет?

7.3. Поезд, двигаясь с постоянной скоростью, к 17:00 проехал в 1,2 раза больший путь, чем к 16:00. Когда поезд выехал?

7.4. Как разрезать клетчатый квадрат размером 6х6 клеточек на четыре одинаковые фигуры периметра 16 каждая, если резать можно только по сторонам клеточек? Сторона клеточки равна 1.

7.5. Двадцать семь одноклассников ели конфеты на первой и на второй переменах, причем на второй перемене каждый съел на одну конфету больше, чем на первой. Петя сказал, что он посчитал общее количество съеденных конфет и получил ответ 210. Правильно ли он посчитал? Объясните свой ответ.

8 класс

8.1. Торговец купил на оптовом рынке партию ручек и предлагает покупателям либо одну ручку за 10 рублей, либо три ручки за 20 рублей. При этом он в обоих случаях получает одинаковую прибыль (разницу между покупкой товара и его продажей). Какова оптовая цена ручки?

8.2. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла равна одному из двух отрезков, на которые она разделила противоположную сторону. Докажите, что она вдвое длиннее второго из этих отрезков.

8.3. Найдите сумму двух различных чисел a и b, удовлетворяющих равенству $a^2 + b = b^2 + a$.

8.4. Три ученика А, В и С участвовали в беге на 100 м. Когда А прибежал на финиш, В был позади него на 10 м, также, когда В финишировал, С был позади него на 10 м. На сколько метров на финише А опередил С?

8.5. На дне рождения у Маши перед каждым из 10 гостей лежало равное количество конфет. Во время чаепития первый съел одну конфету, второй – две, третий – три, и т.д., десятый – 10 конфет. Маша захотела перед вторым чаепитием переложить конфеты так, чтобы вновь перед каждым лежало равное количество конфет, но папа, не глядя на стол, сказал, что она не сможет это сделать. Почему он так решил?

9 класс

9.1. Найдите площадь квадрата, все вершины которого лежат на двух прямых: $x + y = 0$ и $x + y = 2$.

9.2. На маленьком острове 2/3 всех мужчин женаты и 3/5 всех женщин замужем. Сколько жителей острова состоят в браке, если всего там проживает 1900 человек?

9.3. На окружности с диаметром AB и центром O выбрана точка C так, что биссектриса угла CAB перпендикулярна радиусу OC. В каком отношении прямая CO делит угол ACB?

9.4. Найдите количество трехзначных чисел, в десятичной записи которых участвует ровно одна цифра 3.

9.5. Мама хочет наказать Петю за двойку по математике. Они договорились о следующем. Петя задумывает двузначное число с разными цифрами и сообщает его маме. После этого мама называет свое двузначное число Пете. Петя прибавляет мамино число к своему числу, затем к полученной сумме, затем к вновь полученной сумме и т.д. до тех пор, пока у него не получится сумма, оканчивающаяся на две одинаковые цифры. Сможет ли мама не позволить Пете в этот день поиграть в футбол?

10 класс

10.1. Натуральное число n умножили на сумму его цифр и получили 1000. Найдите все такие числа n.

10.2. При каких значениях параметра a уравнения $2x + a^2 - 4 = 0$ и $2x^2 + (a^2 - 4)x + a = 0$ будут иметь общий корень? Найдите этот корень.

10.3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведена высота CD. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника DBC в 3 раза больше площади треугольника ADC.

10.4. В школьном турнире по волейболу каждая команда встречается с каждой по одному разу. Перед началом турнира в нем решила принять участие еще одна команда, в результате чего количество встреч, необходимых для проведения турнира, увеличилось на 20%. Сколько команд участвовало в первенстве?

10.5. Сумма нескольких целых чисел равна 100. Может ли сумма кубов этих чисел равняться 800?

11 класс

11.1. Найдите количество четырехзначных чисел, у которых первая цифра в два раза больше последней.

11.2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{2} \\ y+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

11.3. На велотреке одновременно уходят со старта 5 велосипедистов. Скорость первого равна 50 км/час, второго – 40 км/час, третьего – 30 км/час, четвертого – 20 км/час, пятого – 10 км/час. Первый велосипедист считает количество велосипедистов, которых он обогнал. Какого велосипедиста он посчитал 21-м?

11.4. В треугольнике *ABC* проведена высота *BD* (точка *D* лежит на стороне *AC*). Оказалось, что, *AB*=2*CD* и *CB*=2*AD*. Найдите углы треугольника *ABC*.

11.5. Три товарища играют друг с другом в настольный теннис по следующему правилу: проигравший отдыхает в следующей партии. Оказалось, что один из них сыграл 21 партию, другой – 10 партий. А сколько партий сыграл третий из них? (Объясните свой ответ).

Ответы и решения.

5 класс

5.1. Ответ. Три варианта: 13 – 11 + 9 – 7 – 5 + 3 – 1 = 1, 13 – 11 – 9 + 7 + 5 – 3 – 1 = 1 и

13 + 11 – 9 – 7 – 5 – 3 + 1 = 1.

Сумма 13 + 11 равна сумме чисел 9, 7, 5 и 3, поэтому если первая звездочка заменена на «+», то возможен только один вариант (третий). Если эта звездочка заменена на «–», а вторая – на «+», то третья уже не может заменяться на «+», так как 13 – 11 + 9 + 7 > 5 + 3 + 1 + 1, и мы получаем первый вариант. Наконец, если первые две звездочки заменены на «–», то третья должна заменяться на «+», и мы получаем второй вариант.

Комментарий. Приведено рассуждение, позволяющее найти все ответы. На самом деле от участников олимпиады не требуется ни объяснение того, как они нашли ответы, ни нахождение всех ответов. Участник олимпиады получает полный балл даже в случае, если он только привел один правильный пример.

5.2. Возможны два варианта ответа.

Прямоугольник 2х7 разрезается на три квадрата 2х2 и прямоугольник 2х1, который разрезается на два квадрата 1х1. А прямоугольник 4х5 разрезается на квадрат 4х4 и прямоугольник 4х1, который, в свою очередь, может быть разрезан на четыре квадрата 1х1.

5.3. Ответ. Борис.

В первый и третий день мальчик либо должен был сказать оба раза правду, либо неправду, так как это дни одной четности. Но в эти дни он дал разные ответы, значит – сказал неправду. Итак, он сказал правду во второй день, значит, его зовут Борис.

5.4. Ответ. 24 минуты.

Каждые 7 минут гусеница поднимается на $5\cdot10-2\cdot10=30$ см, поэтому за 21 минуту она поднимется на $3\cdot30=90$ см. После этого она вновь начинает ползти вверх и за 3 минуты поднимется на оставшиеся 30 см.

Комментарий. Ошибочным является ответ 28 минут, получаемый формальным подсчетом: (120 см : 30 см)$\cdot 7$ мин, так как он дает второй момент времени, когда гусеница поднимется на высоту 1м 20 см (точнее, в этот момент она спустится до этого уровня).

5.5. Ответ. Не могло.

В начале перемены у ребят вместе было четное количество конфет, равное удвоенному количеству конфет у Артема и Бориса. Раз в минуту они съедают 4 конфеты, то есть четное количество. Значит, каждую минуту четность общего количества конфету ребят не изменяется, и потому в конце также должно было быть четное количество конфет, а 15 – нечетное число.

6 класс

6.1. Ответ. 149 и 284.

Если первая цифра не меньше 3, то вторая – не меньше 12, что невозможно. Значит, первая цифра 1 или 2. Далее число стоится однозначно.

6.2. Один из примеров показан на рисунке 1. Приведенный пример не единственный.

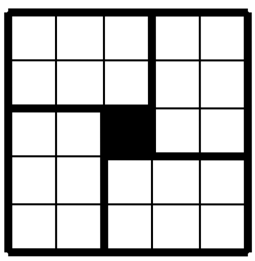

Рис. 1

6.3. Ответ. 160 яблок.

Когда из ящика забирается половина яблок, то в нем остается половина от того количества, которое было перед этим. Значит, перед этим было вдвое больше яблок. Поэтому вначале в ящике было 10х2х2х2х2 = 160 яблок.

6.4. Ответ. Из коробки «Красный и синий».

Из условия следует, что в этой коробке либо два синих шара, либо два красных. Вынув один шар, мы будем знать содержимое этой коробки. Если в ней два синих шара, то в той, на которой написано «Два красных», будут разноцветные шары, так как в ней не два красных (по условию) и не два синих (они в первой коробке). В коробке с надписью «Два синих» – два красных шара. Если же мы вынули красный шар, то, аналогично, в коробке «Два синих» – разноцветные шары, а в коробке «Два красных» – синие шары.

6.5. Ответ. Потому, что количество оставшихся конфет должно быть нечетным.

Общее количество принесенных конфет – четно. Это можно объяснить так: вторая девочка принесла четное количество конфет – это следует из условия. А первая и третья – количество конфет одинаковой четности (потому, что утроенное нечетное число – нечетно, а утроенное четное число – четно). Значит, в сумме получается четное количество конфет. Иначе – алгебраически. Количество принесенных конфет – это $x+2x+3x=6x=2\cdot 3x$ – четное число. Девочки съели на перемене 9 конфет – нечетное число. Поэтому у них должно остаться нечетное количество конфет, и поровну его разделить не удастся.

7 класс

7.1. Ответ. 2209.

2209 + (2 +2 + 0 + 9) = 2222.

7.2. Ответ. Например, так: пятерым дать по два больших пирожных и одному среднему, а шестому – два средних и все четыре маленьких.

Пусть m – вес маленького пирожного, тогда среднее весит $2m$, а большое – $3m$. Общий вес всех пирожных равен: $4\cdot m+7\cdot 2m+10\cdot 3m=48m$, поэтому одному ребенку должны достаться пирожные общим весом $8m$.

7.3. Ответ. В 11:00.

Если путь, пройденный поездом к 16:00 – это S, то к 17:00 он проехал путь $1{,}2 \cdot S$. Значит, за последний час поезд проехал $0{,}2 \cdot S$, то есть путь длины S он проезжает за 5 часов. Начальное время движения – 16 – 5 = 11 (часов).

7.4. Ответ приведен на рисунке 2.

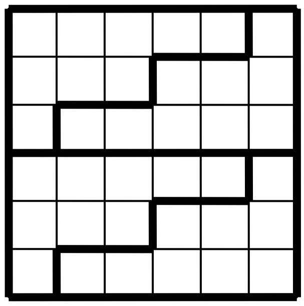

Рис. 2

7.5. Ответ. Он ошибся.

Сумма двух последовательных чисел – это сумма двух чисел разной четности, а потому – нечетна. Значит, каждый из одноклассников съел нечетное число конфет. Одноклассников – нечетное количество (27), а сумма нечетного количества нечетных чисел – нечетна и не может равняться 210.

8 класс

8.1. Ответ. 5 руб.

Если x – оптовая цена ручки, то при продаже одной за 10 руб. продавец получает прибыль $10 - x$ (руб.). Продавая три ручки за 20 руб. он получает прибыль $20 - 3x$ (руб.). По условию $10 - x = 20 - 3x$, откуда $x = 5$ (руб.).

8.2. Пусть AL – биссектриса острого угла CAB прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90°$) и, по условию, $AL = BL$. Тогда если $\angle CAB = 2\alpha$, то $\angle LAB = \alpha$, и, значит, $\angle ABL = \alpha$. Сумма острых углов треугольника ABC равна 3α, откуда $\alpha = 30°$. Тогда в прямоугольном треугольнике ACL катет, лежащий против угла в $30°$, равен половине гипотенузы, откуда $CL = \frac{1}{2}AL$. Утверждение доказано.

8.3. Ответ. 1.

Преобразуем данное равенство: $a^2-b^2-(a-b)=0$ или $(a-b)(a+b-1)=0$. По условию данные числа различны. Поэтому первая скобка не равна нулю. Значит, $a+b-1=0$, откуда $a+b=1$.

8.4. Ответ. На 19 м.

Из условия следует, что скорость ученика B составляет 0,9 от скорости ученика A, а скорость ученика C составляет 0,9 от скорости ученика B. Из этого следует, что скорость ученика C составляет 0,81 от скорости ученика A. Значит, когда A пробежит 100 м, ученик C пробежит 81 м.

8.5. Ответ. Потому, что количество оставшихся конфет было нечетно, то есть не могло делиться на 10.

Вначале количество конфет было четным, так как оно делилось на 10. Общее количество конфет, съеденных вначале, равно 1 + 2+ 3 + … + 10 = 55 – нечетное число. Поэтому количество оставшихся конфет – нечетно, как разность четного и нечетного чисел.

9 класс

9.1. Ответ. 2.

Длина стороны этого квадрата – расстояние между прямыми $x+y=0$ и $x+y=2$, так как на каждой из прямых – по две вершины квадрата. А это расстояние равно расстоянию от начала координат до прямой $x+y=2$, пересекающей оси координат на расстоянии 2 от начала координат. Значит, искомое расстояние – высота в равнобедренном прямоугольном треугольнике с катетами длины 2, которая равна $\sqrt{2}$.

9.2. Ответ. 1200 человек.

Пусть x – количество мужчин, y – количество женщин на этом острове. Из условия следует, что $\frac{2}{3}x=\frac{3}{5}y$, кроме того, $x+y=1900$. Решая эту систему, получаем: $x=900, y=1000$. Отсюда количество женатых мужчин равно $\frac{2}{3}\cdot 900=600$, а общее количество людей, состоящих в браке, равно 1200.

9.3. Ответ. $2:1$.

Биссектриса угла CAO является высотой треугольника CAO, поэтому $CA = AO$. Но $OA = OC$ – как радиусы, значит, треугольник CAO – равносторонний. Тогда $\angle ACO = 60^\circ$. Кроме того, в равнобедренном треугольнике OCB ($OC = OB$) $\angle COB = 120^\circ$, поэтому $\angle OCB = 30^\circ$ (иначе это можно получить, воспользовавшись тем, что $\angle ACB$ – опирающийся на диаметр, равен 90°).

9.4. Ответ. 225.

Если у трехзначного числа на первом месте стоит цифра 3, то две другие цифры – произвольные, отличные от 3. Значит, на втором месте может стоять любая из 9 других цифр, и на третьем – любая из 9 других цифр – всего 9х9 = 81 вариант. Если тройка стоит на втором месте, то на первом месте может стоять любая цифра, кроме 3 и 0, а на последнем – любая, кроме тройки. Всего получается 8х9 = 72 варианта. Столько же вариантов мы получим, если тройка будет стоять на последнем месте. Итого: 81 + 72 + 72 = 225 вариантов.

9.5. Ответ. Сможет.

Если Петя задумает число с двумя цифрами разной четности, то маме нужно назвать, например, число 20. Тогда четность каждой из двух последних цифр после каждого прибавления будет сохраняться, и эти цифры никогда не совпадут. Если же цифры Петиного числа будут одной четности, то маме достаточно назвать число 50. После каждых двух прибавлений последние две цифры будут повторяться, т.е. не будут совпадать, а после первого (третьего, пятого и т.д.) прибавления эти цифры будут иметь разную четность, т.е. тоже не совпадут.

10 класс

10.1. Ответ. 125 и 1000.

Решение: Раскладывая 1000 в произведение двух множителей: 1000х1, 500х2, 250х4, 200х5, 125х8, 100х10, 50х20, 40х25 мы получаем два варианта ответа.

10.2. Ответ. $a = 0$, $x = 2$.

Если x – корень уравнения $2x + a^2 - 4 = 0$, то он также и корень уравнения $x(2x + a^2 - 4) = 0$, то есть $2x^2 + (a^2 - 4)x = 0$. Кроме того, по условию, x – корень уравнения $2x^2 + (a^2 - 4)x + a = 0$. Значит x – корень уравнения

$(2x^2+(a^2-4)x+a)-(2x^2+(a^2-4)x)=0$, то есть $a=0$. Осталось проверить, что при таких a оба уравнения имеют общий корень $x=2$.

10.3. Ответ. $\angle CAB=60°, \angle CBA=30°$.

Заметим, что треугольник CBD подобен треугольнику ACD (свойство высоты прямоугольного треугольника). Но в подобных треугольниках отношение площадей равно квадрату отношения соответственных сторон. Поэтому отношение гипотенуз CB и CA этих треугольников равно $\sqrt{3}$. Значит, $tg\angle CAB=\sqrt{3}$, откуда $\angle CAB=60°$.

10.4. Ответ. 12 команд после включения в турнир новой команды.

В турнире с участием n команд проводится $\frac{n(n-1)}{2}$ игр (каждая из n команд сыграла $n-1$ игру, и при этом каждая игра получилась сосчитанной дважды). Поэтому условие можно записать так: $\frac{(n+1)n}{2}=1,2\frac{n(n-1)}{2}$, откуда $5n(n+1)=6(n-1)n$, т.е. $5n+5=6n-6$, $n=11$.

10.5. Ответ. Не может.

Разность n^3-n раскладывается в произведение $(n-1)n(n+1)$ трех последовательных целых чисел, среди которых хотя бы одно число делится на 3. Поэтому эта разность делится на 3. Значит и разность кубов чисел и самих чисел должна делиться на 3, а она равна 700.

11 класс

11.1. Ответ. 400.

Всего возможно 4 пары из первой и последней цифр таких, что первая цифра в два раза больше последней: 2 и 1, 4 и 2, 6 и 3, 8 и 4. А цифры, расположенные между ними, могут образовывать любое двузначное число (от 00 до 99), то есть каждая такая пара из первой и последней цифр дает 100 вариантов. Всего получается 4х100 = 400 вариантов.

11.2. Ответ. $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, (2;2).

Перепишем уравнения в виде $\frac{1}{y}=\frac{5}{2}-x$ и $y=\frac{5}{2}-\frac{1}{x}$, и перемножим их. Получим $1=\left(\frac{5}{2}-x\right)\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{x}\right)$, то есть квадратное уравнение $2x^2-5x+2=0$. Подставляя корни этого уравнения $x=\frac{1}{2}$ и $x=2$ в исходную систему, находим y.

11.3. Ответ. Пятого велосипедиста.

Из условия следует, что первый велосипедист едет быстрее второго на 10 км/ч, третьего – на 20 км/ч, четвертого – на 30 км/ч, а пятого – на 40 км/ч. Это означает, что когда первый догонит второго, он в этот момент во второй раз догонит третьего, в третий раз – четвертого, в четвертый раз – пятого. Значит, в этот момент у него будет 1 + 2 + 3 + 4 = 10 обгонов. В момент, когда он во второй раз обгонит второго велосипедиста, у него получится 20 обгонов, и в этот момент все велосипедисты находятся рядом. Следующим будет обгон самого медленного – пятого велосипедиста.

11.4. Ответ. Все углы по 60°.

Пусть $AD=x, CD=y$, тогда, по условию, $AB=2y, CB=2x$. По теореме Пифагора из треугольников ABD и CBD получаем: $BD^2=4y^2-x^2=4x^2-y^2$, откуда следует, что $x=y$. Тогда все стороны треугольника ABC равны $2x$, значит, он – равносторонний.

11.5. Ответ. 11 партий.

Пусть первый сыграл со вторым A партий, первый с третьим – B партий, второй с третьим – C партий. Тогда. По условию, $A+B=21$, $A+C=10$. Отсюда $B-C=11$. Но тогда $B\geq 11$, значит, $A\leq 21-11=10$. Но $A+C=10$, где C – неотрицательное число. Значит, $C=0$, $A=10$, $B=11$. Поэтому третий сыграл $B+C=11$ партий.

6. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ПОДГОТОВКИ ЗАДАНИЙ

Журналы:

«Квант», «Математика в школе», «Математика для школьников»

Книги и методические пособия:

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Районные олимпиады. 6-11 класс. – М.: Просвещение, 2010.

Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терешин Д.А. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 1. – М.: Просвещение, 2008.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 2. – М.: Просвещение, 2009.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 3. – М.: Просвещение, 2011.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 4. – М.: Просвещение, 2013.

Андреева А.Н. ,Барабанов А.И., Чернявский И.Я. Саратовские математические олимпиады. – М.: МЦНМО, 2013.

Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. М.: Наука, 1975.

Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1986.

Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.

Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО, 2005.

Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник. — М., МЦНМО, 2003.

Кордемский Б.А. Математическая смекалка. – М., ГИФМЛ, 1958 — 576 с.

Прасолов В.В. Задачи по планиметрии**.** Изд. 5-е испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2006.

Федоров Р.М., Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К., Ященко И.В. Московские математические олимпиады 1993-2005 г. / Под ред. В.М. Тихомирова. – М.: МЦНМО, 2006.

Интернет-ресурс: http://www.problems.ru/