# Практикум по решению заданий ОГЭ по математике 9 класс «Построение графиков функций с модулем» (на примере задания 22)

Городское методическое объединение учителей математики
18.11.2021

**Шелудько Ирина Анатольевна,**
учитель математики
высшей квалификационной категории
МБОУ СОШ №1

## Задание 22 в материалах ОГЭ

Уметь выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения, неравенства и их системы, строить и читать графики функций, строить и исследовать простейшие математические модели

**<u>Задача</u> 4 . Постройте график функции $y = |x^2 - x - 2|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?**

Построим параболу и отобразим относительно Ox ту часть графика, где функция принимает отрицательные значения

Найдем вершину параболы. Ее абсциссу можно вычислить по формуле:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Коэффициенты нам известны (см.выше). Вычисляем абсциссу:

$$x_0 - \frac{-1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Подставим в уравнение функции полученное значение абсциссы и вычислим ординату вершины:

$$y_0 = 0{,}5^2 - 0{,}5 - 2 = 0{,}25 - 0{,}5 - 2 = -2{,}25.$$

Рис. а

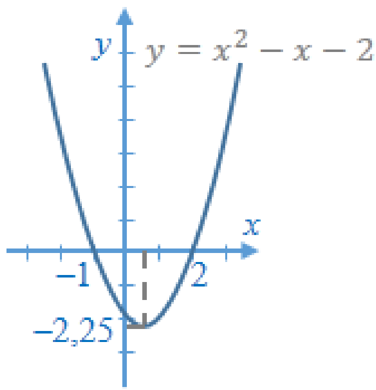



Рис. б

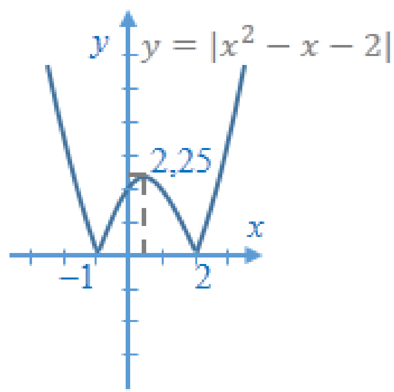
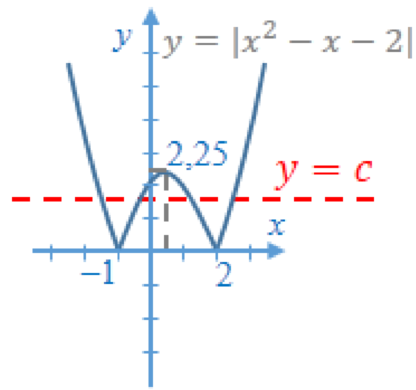



Рис. в




Прямая $y = c$ параллельна оси $x$ она может иметь с графиком функции не более 4 общих точек.

<u>Ответ</u>: 4.

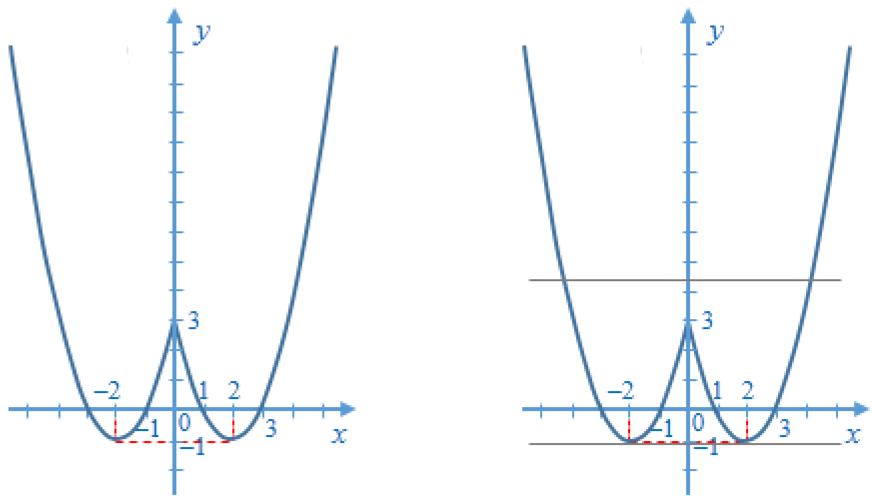
**<u>Задача</u> 8 . Постройте график функции $y = x^2 - 4|x| + 3$ и определите, при каких значениях параметра $a$ прямая $y = a$ имеет с графиком ровно две общие точки.**

Данный график можно получить из графика функции $y = x^2 - 4x + 3.$

Путем симметричного отображения относительно Оу той части графика, где х неотрицательное число

Находим координаты вершины:

$$x_в = -\frac{-4}{2} = 2, \qquad y_в = -\frac{D}{4a} = -\frac{4}{4} = -1.$$




прямая $y = a$ имеет с графиком ровно две общие точки при $a = -1$ и $a \in (3; +\infty)$.

<u>Ответ</u>: –1; (3; +∞).

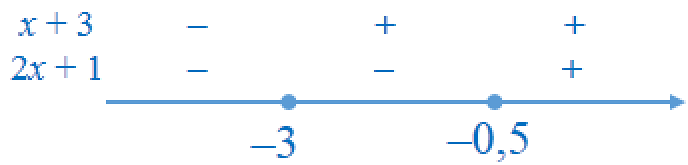
**Задача 5 . Постройте график функции $y = |x + 3| + |2x + 1| - x$.**

Приравняем каждое подмодульное выражение к нулю и найдем точки, в которых происходит смена знака:

$x + 3 = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = -3.$

$2x + 1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad 2x = -1 \quad \leftrightarrow \quad x = -0{,}5.$

Отметим точки на числовой оси, определим интервалы знакопостоянства:




Раскроем модули для каждого из трех интервалов.

В интервале $x \le -3$ оба подмодульных выражения со знаком минус. Пишем:

$$\begin{cases} x \le -3 \\ y = -(x+3) - (2x+1) - x \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \le -3 \\ y = -4x - 4 \end{cases}$$

В промежутке $-3 \le x \le -0{,}5$ первое подмодульное выражение со знаком плюс, второе – со знаком минус. Учтем и это:

$$\begin{cases} -3 \le x \le -0{,}5 \\ y = (x+3) - (2x+1) - x \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le -0{,}5 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$

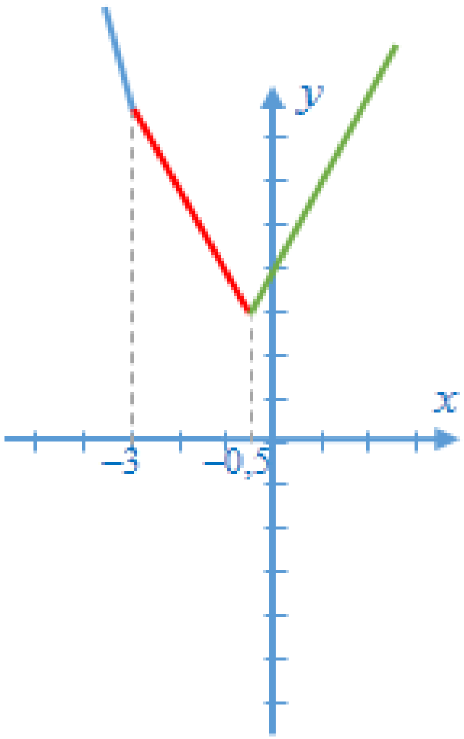
В промежутке $x \ge -0{,}5$ оба подмодульных выражения со знаком плюс:

$$\begin{cases} x \ge -0{,}5 \\ y = (x+3) + (2x+1) - x \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \ge -0{,}5 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$$

В результате наша функция обрела иной вид:

$$y = \begin{cases} -4x - 4, \text{если } x \le -3 \\ -2x + 2, \text{если } -3 \le x \le -0{,}5 \\ \quad 2x + 4, \text{если} x \ge -0{,}5 \end{cases}$$

Все три подфункции – линейные, их графиками являются прямые.



**<u>Задача</u> 6 . Постройте график функции $y = |x|x + |x| - 6x$ и определите, при каких значениях m прямая y = m имеет с графиком ровно две общие точки.**

Раскроем модули.

При x < 0:

$$y = -x \cdot x + (-x) - 6x = -x^2 - x - 6x = -x^2 - 7x.$$

При x ≥ 0:

$$y = x \cdot x + x - 6x = x^2 - 5x.$$

Наше функция обрела иной вид:

Находим корни (нули) функции.

Приравняем к нулю первое уравнение и решим его:

$$-x^2 - 7x = 0 \quad \leftrightarrow \quad -x(x+7) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} -x = 0 \\ x + 7 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -7 \end{cases}$$

Определим нули второго уравнения:

$$x^2 - 5x = 0 \quad \leftrightarrow \quad x(x-5) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x - 5 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$$

Найдем вершину первой параболы. Для этого сначала отметим коэффициенты первого уравнения:

a = –1, b = –7, c = 0.

Находим абсциссу вершины:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-7}{2 \cdot (-1)} = -\frac{7}{2} = -3{,}5.$$

Находим ординату вершины:

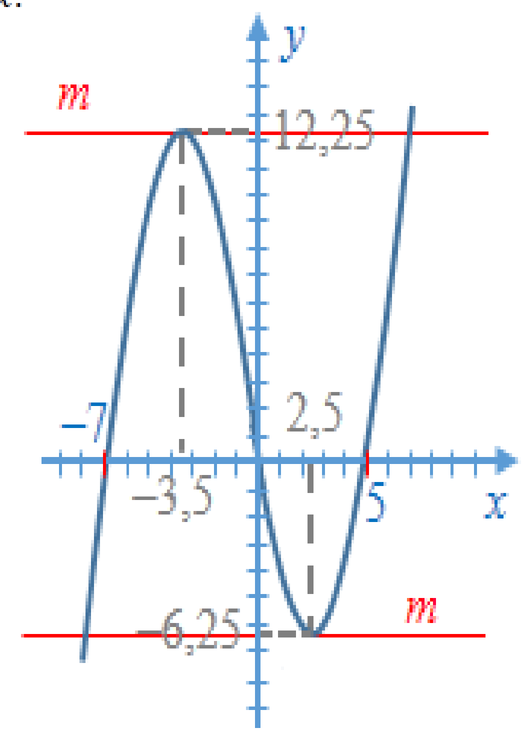
$$y_0 = -1 \cdot (-3{,}5)^2 - 7 \cdot (-3{,}5) = -1 \cdot 12{,}25 + 24{,}5 = 12{,}25.$$

Перейдем ко второй параболе. Отметим коэффициенты второго уравнения:

$a = 1$, $b = –5$, $c = 0$.

Найдем координаты вершины второй параболы:

$$x_0 = -\frac{-5}{2 \cdot 1} = \frac{5}{2} = 2{,}5, \qquad y_0 = 2{,}5^2 - 5 \cdot 2{,}5 = 6{,}25 - 12{,}5 = -6{,}25.$$




прямая $y = m$ имеет ровно две общие точки с заданной функцией при $m$ = –6,25 и $m$ = 12,25.

Задача решена.

<u>Ответ</u>: = –6,25; 12,25.

**<u>Задача 9</u> . Постройте график функции:**

$$y = \frac{1}{2}\left(\left|x - \frac{1}{x}\right| + x + \frac{1}{x}\right).$$

**Определите, при каких значениях $m$ прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.**

Область определения функции: $x \neq 0$

Раскроем подмодульное выражение. Для этого приравняем его к нулю и решим:

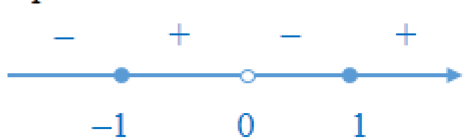
$$x - \frac{1}{x} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 1}{x} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{(x-1)(x+1)}{x} = 0.$$

Дробь равна нулю только в том случае, если числитель равен нулю.

Приравняем числитель к нулю и решим уравнение:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Отметим полученные точки на числовой оси и определим знаки интервалов. При этом не забудем о точке 0. Хотя в этой точке функция не существует, она тоже образует интервал знакопостоянства:



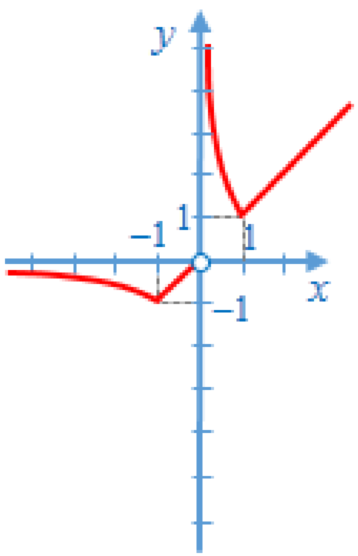
Таким образом, наша функция обрела новый вид:

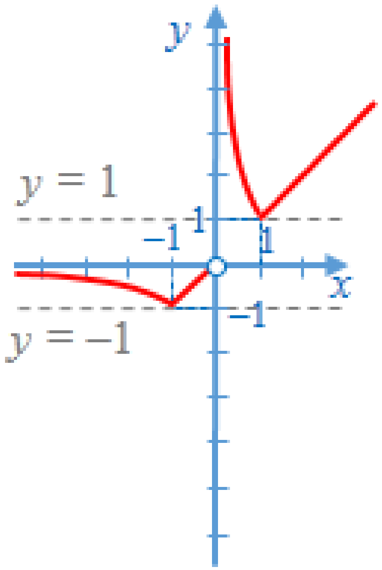
$$y = \begin{cases} x, \text{при } -1 \le x < 0 \text{ и } x \ge 1 \\ \dfrac{1}{x}, \text{при } x < -1 \text{ и } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

Найдем несколько точек по каждой подфункции, чтобы нарисовать график:

1: (–0,8; –0,8), (–0,2; –0,2), (2; 2), (3; 3).

2: (–4; –0,25), (–3; $-\frac{1}{3}$), (–2; –0,5), (–1; –1), (0,2; 5), (0,5; 2), (0,8; 1,25), (1; 1).




Как видим, прямая $y = m$ имеет ровно одну общую точку с графиком функции при $m = -1$ и $m = 1$.

<u>Ответ</u>: –1; 1.

Задача 4. **Постройте график функции $y = \frac{2|x|-1}{2x^2-|x|}$ и определите, при каких значениях $k$ прямая $y = kx$ не будет иметь с построенным графиком ни одной общей точки.**

Решение.

Сразу запишем, в какой точке $x$ функция не существует. Это число 0, так при $x = 0$ знаменатель равен 0, а на ноль делить нельзя. Итак:

$$x \neq 0.$$

У нас $x$ под модулем. То есть это может быть как отрицательное, так и неотрицательное число. Неотрицательное – то есть равное нулю или положительному числу. Но мы сразу отметили, что $x \neq 0$. Значит, под модулем может быть как отрицательное число, так и положительное (но точно не ноль). Рассмотрим оба варианта и преобразуем нашу дробь.

При $x > 0$:

$$\frac{2|x|-1}{2x^2-|x|} = \frac{2x-1}{2x^2-x} = \frac{2x-1}{x(2x-1)} = \frac{1}{x}.$$

При $x < 0$ (перед $x^2$ ставить знак минус не имеет смысла, так как любое число в квадрате есть положительное число):

$$\frac{2|x|-1}{2x^2-|x|} = \frac{2(-x)-1}{2x^2-(-x)} = \frac{-2x-1}{2x^2+x} = \frac{-(2x+1)}{x(2x+1)} = -\frac{1}{x}.$$

Таким образом, наша функция обрела иной вид:

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{при } x > 0,$$

$$y = -\frac{1}{x} \quad \text{при } x < 0.$$

Здесь надо отметить очень важный момент. Становится ясно, что $y$ тоже не может равен нулю: не существует такого значения $x$, при котором $y = 0$. Отмечаем:

$$y \neq 0.$$

Теперь очевидно, что перед нами функция обратной пропорциональности, графиком которой является гипербола, не пересекающаяся ни с осью $x$, ни с осью $y$.

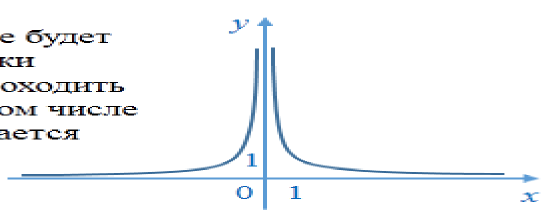
Чтобы нарисовать эскиз графика функции, выясним некоторые его точки:

| | $y = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ | | | | $y = -\frac{1}{x}$ $(x < 0)$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | –4 | –3 | –2 | –1 |
| $y$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |

Рисуем график функции и тем самым выполняем первую часть задания.

Из графика видно, что прямая $y = kx$ не будет иметь с графиком ни одной общей точки только в том случае, если она будет проходить под гиперболами. При любом ненулевом числе прямая обязательно пересечет их. Остается только одно число – ноль. То есть:

$k = 0$.




Ответ: $k = 0$.

**<u>Задача 26</u>. Постройте график функции $y = x^2 + 3x - 4|x+2| + 2$ и определите, при каких значениях $m$ прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.**

<u>Решение</u>.
Раскроем подмодульное выражение. Для этого приравняем его к нулю:

$$x + 2 = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = -2$$

Определим знаки интервалов:


Итак, в промежутке $(-\infty; -2)$ подмодульное выражение со знаком минус. Функция имеет вид:

$$y = x^2 + 3x - 4(-x-2) + 2 \quad \leftrightarrow \quad y = x^2 + 3x + 4x + 8 + 2 \quad \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \quad y = x^2 + 7x + 10.$$

В промежутке $[-2; +\infty)$ подмодульное выражение неотрицательное. Учтем и это:

$$y = x^2 + 3x - 4x - 8 + 2 \quad \leftrightarrow \quad y = x^2 - x - 6.$$

Получилась система:

$$y = \begin{cases} x^2 + 7x + 10 \text{ при } x < -2 \\ x^2 - x - 6 \text{ при } x \geq -2 \end{cases}$$

Ясно, что мы должны построить график, состоящий из частей двух парабол, они соединяются в точке $x = -2$. Ветви парабол направлены вверх, одна из ветвей пересекает ось ординат в точке $y = 10$, вторая – в точке $y = -6$.
Исследуем каждую подфункцию. Начнем с первой. Приравняем ее к нулю:

$$x^2 + 7x + 10 = 0.$$

Отметим коэффициенты: $a = 1$, $b = 7$, $c = 10$.
По теореме Виета находим корни: $x_1 = -2, x_2 = -5$.
Вычисляем координаты вершины:

$$x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2} = -3{,}5; \qquad y_в = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}{4} = -2{,}25.$$

Переходим ко второй подфункции:

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

Отмечаем коэффициенты: $a = 1$, $b = -1$, $c = -6$.
Находим корни: $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.
Вычисляем координаты вершины: $x_в = 0{,}5$; $y_в = -6{,}25$.
И строим график (рис.26а):

Рис.26а

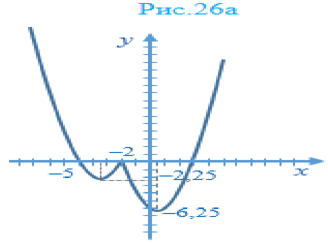
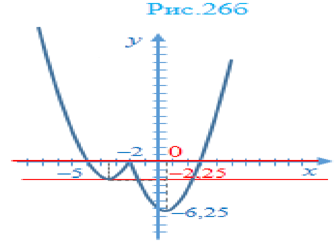



Рис.26б




Первая часть задачи выполнена – график построен.
Теперь смотрим (рис.26б): в точках $m = -2{,}25$ $m = 0$ прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

<u>Ответ</u>: –2,25; 0.

**<u>Задача 53</u>. Постройте график функции:**

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ при } x < -1 \\ |x^2| - 2 \text{ при } x \geq -1 \end{cases}$$

**Определите, при каких значениях $p$ прямая $y = p$ имеет с графиком ровно одну общую точку.**

<u>Решение</u>.

Раскроем модуль.

Поскольку под модулем число во второй степени, то при любом x это положительное число. Значит, функция имеет вид:

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ при } x < -1 \\ x^2 - 2 \text{ при } x \geq -1 \end{cases}$$

«Читаем» ее. Функция состоит из функции обратной пропорциональности и квадратичной функции. Надо нарисовать части гиперболы и параболы, соединенные в точке $x = -1$. Вычислим ординату точки пересечения – для этого подставим значение x в любое из двух уравнений (например, в первое):

$$y = \frac{1}{-1} = -1.$$

Разберемся с каждой функцией отдельно.

Коэффициент первой функции – положительное число. Значит, гипербола расположена в первой и третьей координатных четвертях. Но так как требуется нарисовать гиперболу, абсциссы точек которой меньше –1, то построить надо будет только одну ветвь гиперболы, расположенной в третьей четверти. Определим координаты нескольких ее точек:

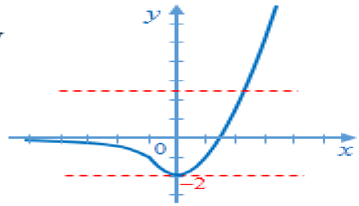
(–5; –0,2), (–4; –0,25), (–2; –0,5), (–1; –1), (–0,5; –2), (–0,4; –2,5), (–0,2; –5).

Теперь определимся со второй функцией. Первый коэффициент – положительное число. Значит, ветви параболы направлены вверх. Второй коэффициент равен нулю – значит, абсцисса вершины тоже равна нулю. Соответственно, ордината вершины равна –2. Найдем корни функции – то есть точки, в которых ветви параболы пересекают ось $x$. Для этого приравняем формулу функции к нулю и решим квадратное уравнение:

$$x^2 - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 2 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Осталось нарисовать график функции (см.рисунок):

Как видно по графику, прямая $y = p$ имеет ровно одну общую точку с графиком при $p = -2$ и $p \geq 0$.




<u>Ответ</u>: $p = -2$; $p \geq 0$.

## Материалы по подготовке к ОГЭ по математике

Прототипы заданий второй части ОГЭ по математике
http://alexlarin.net/gia/21-26-2015.html

http://4oge.ru/novosti/211-bank-zadaniy-oge-fipi.html
Банк заданий ОГЭ ФИПИ

http://reshuoge.ru/
«Решу ОГЭ». Математика. Обучающая система Дмитрия Гущина