

**Решение геометрических
задач
(на примере
задачи 26
ОГЭ по математике)**

ЗАДАНИЕ 26 ОГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Уметь выполнять
действия с
геометрическими
фигурами, координатами
и векторами

-
- Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.
 - При выполнении задания можно использовать без ссылок и доказательств любые математические факты содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендованных (допущенных) Министерством образования и науки Российской Федерации

Трапеция

- **Трапецией** называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны. Параллельные стороны называются её **основаниями**, а две другие стороны - **боковыми сторонами**.
- **Высотой трапеции** называется расстояние между основаниями.
- **Средняя линия трапеции** - отрезок, соединяющий середины боковых сторон.
- Трапеция называется **равнобедренной**, если её боковые стороны равны.
- Трапеция, один из углов которой прямой, называется **прямоугольной**.

Факты, применяемые в задачах с трапецией

- ▣ Средняя линия трапеции равна полусумме оснований.
- ▣ Трапеция разбивается диагоналями на два подобных треугольника (примыкающим к основаниям) и два равновеликих треугольника (примыкающим к боковым сторонам).
- ▣ В любой трапеции точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений её боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.
- ▣ Биссектрисы углов, прилежащих к одной из боковых сторон трапеции, пересекаются под прямым углом.

Дополнительное построение 1

**Провести через вершину
верхнего основания трапеции
прямую, параллельную
диагонали трапеции, или
прямую параллельную
боковой стороне трапеции**

ЗАДАЧА 1

Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 3 и 4, а средняя линия равна 2,5 .

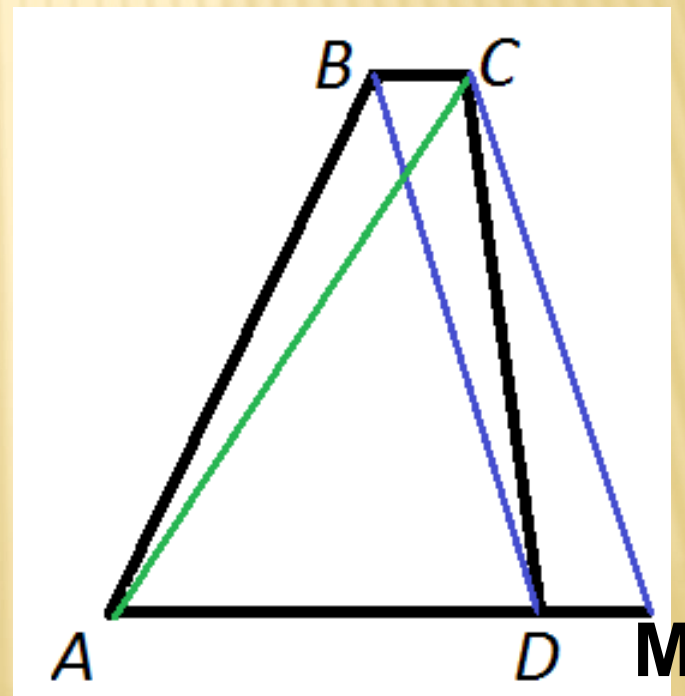
Дано: трапеция ABCD ($AD \parallel BC$), $AC=4$, $BD=3$, средняя линия равна 2,5.

Найти: S_{ABCD}

Решение:

Выполним дополнительное построение, проведем $CM \parallel BD$. М – точка пересечения CM и AD . По условию известно, что $AD \parallel BC$, значит $BCMD$ – параллелограмм по определению, $CM=BD=3$, $DM=BC$.

Рассмотрим треугольник ACM . $AC=4$, $CM=3$, $AM=AD+DM=AD+BC$. По условию известна длина средней линии, то есть $\frac{AD+BC}{2} = 2,5$
 $AD+BC = 5$.



Теперь в треугольнике АСМ известны все три стороны.

~~АС=4, СМ=3, АМ=5, по теореме~~

обратной теореме Пифагора

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

Значит треугольник АСМ

прямоугольный,

$$S = \frac{AC \cdot CM}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

Ответ: 6.

Примечание:

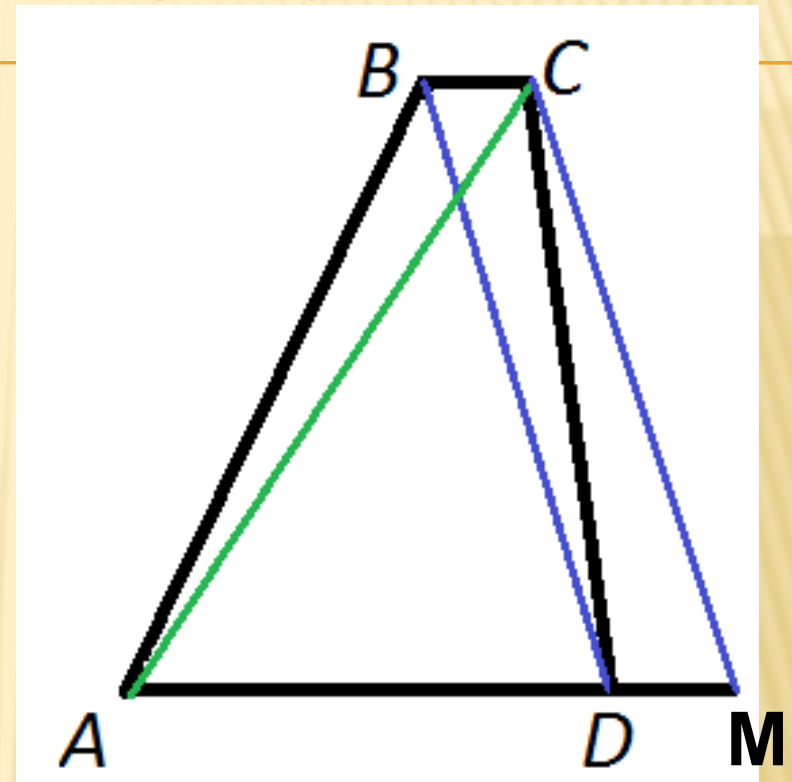
Если бы треугольник АСМ не оказался бы прямоугольным, то его площадь можно было бы найти по формуле Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

где a, b, c - длины сторон треугольника,

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

- полупериметр.



Дополнительное построение 2

Провести высоты к основаниям

Данное дополнительное
построение часто

используется в прямоугольных
и равнобедренных трапециях

ЗАДАЧА 2

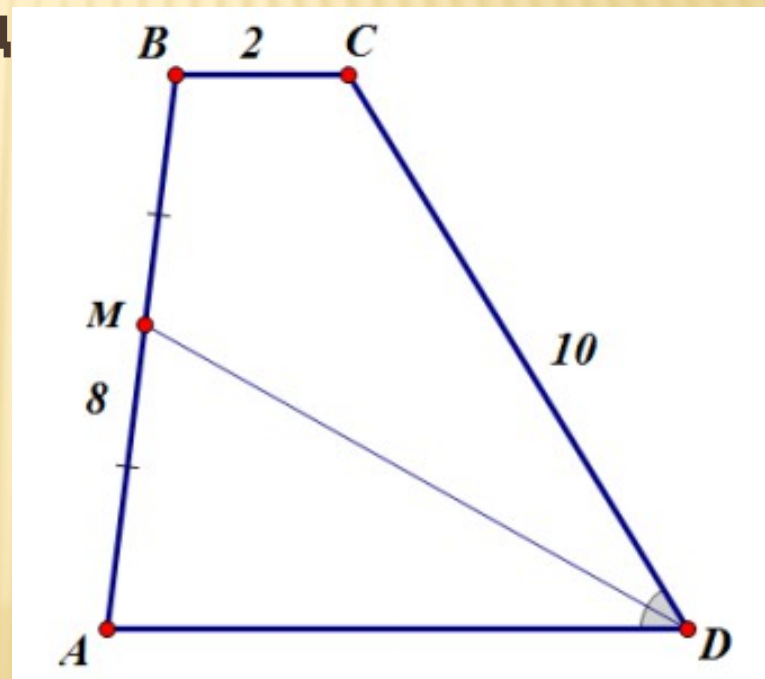
Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 8 и 10, а основание BC равно 2. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB . Найдите площ

Дано: трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$),
 $AB=8$, $CD=10$, $BC=2$,

M – середина BC ,

DM – биссектриса угла ADC .

Найти: S_{ABCD}



Решение:

Точка М - середина АВ , проведем через точку М среднюю линию МК.

$\angle KMD = \angle MDA$ как накрест лежащие при параллельных прямых МК и

$$\square \overset{AD}{MDK} = \angle MDA$$

- так как DM - биссектриса угла KDA

Следовательно, $\square KMD = \square MDK$

и треугольник MDK - равнобедренный.

Отсюда $MK = KD = \frac{CD}{2} = 5$.

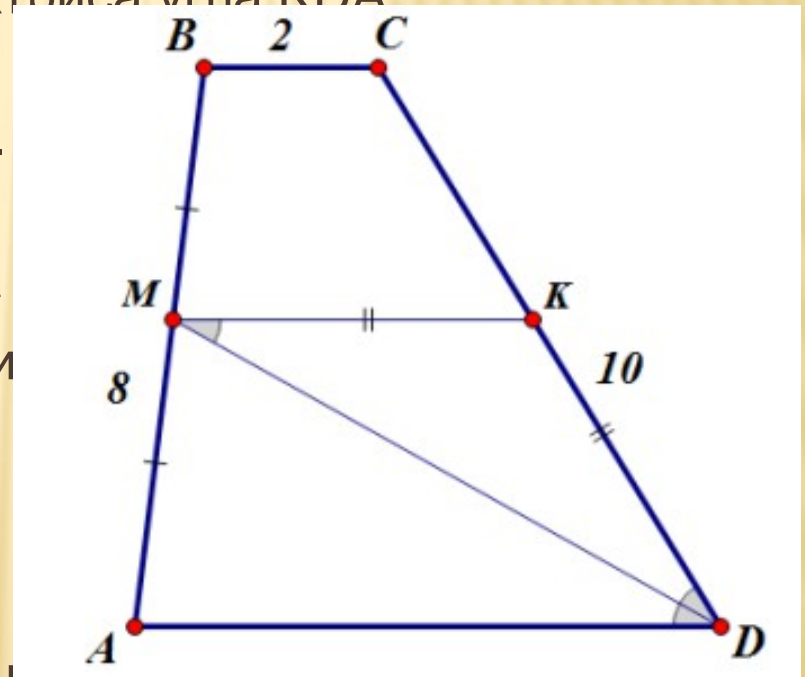
То есть средняя линия трапеции равна

Запишем выражение для средней линии

$$\frac{AD + BC}{2} = 5$$

$$\frac{AD + 2}{2} = 5, \quad AD = 8$$

Теперь нам нужно найти высоту трапеции.



Опустим перпендикуляры BL и CN на основание AD .

$AL = 2$ Пусть $LN = x$ Тогда $ND = 8 - 2 - x = 6 - x$

Тогда

Из прямоугольных треугольников ABL и NCD выразим высоту h :

$$64 - x^2 = 100 - 36 + 12x - x^2$$

Решим уравнение относительно x :

Отсюда, $\angle BAC = 90^\circ$

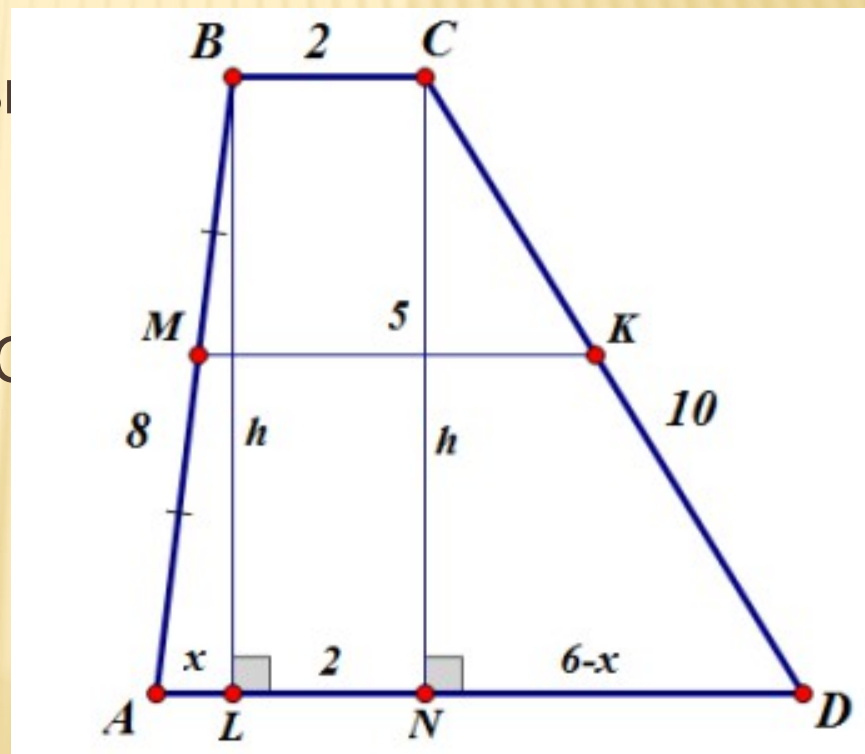
Следовательно, трапеция $ABCD$

прямоугольная:

$$S = MK \cdot h = 5 \cdot 8 = 40$$

и

Ответ: 40.



Дополнительное построение 3

**Продолжить
боковые стороны
трапеции до
взаимного
пересечения**

ЗАДАЧА 3

Углы при одном из оснований трапеции 77° и 13° равны и , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции равны 11 и 10. Найдите основания трапеции.

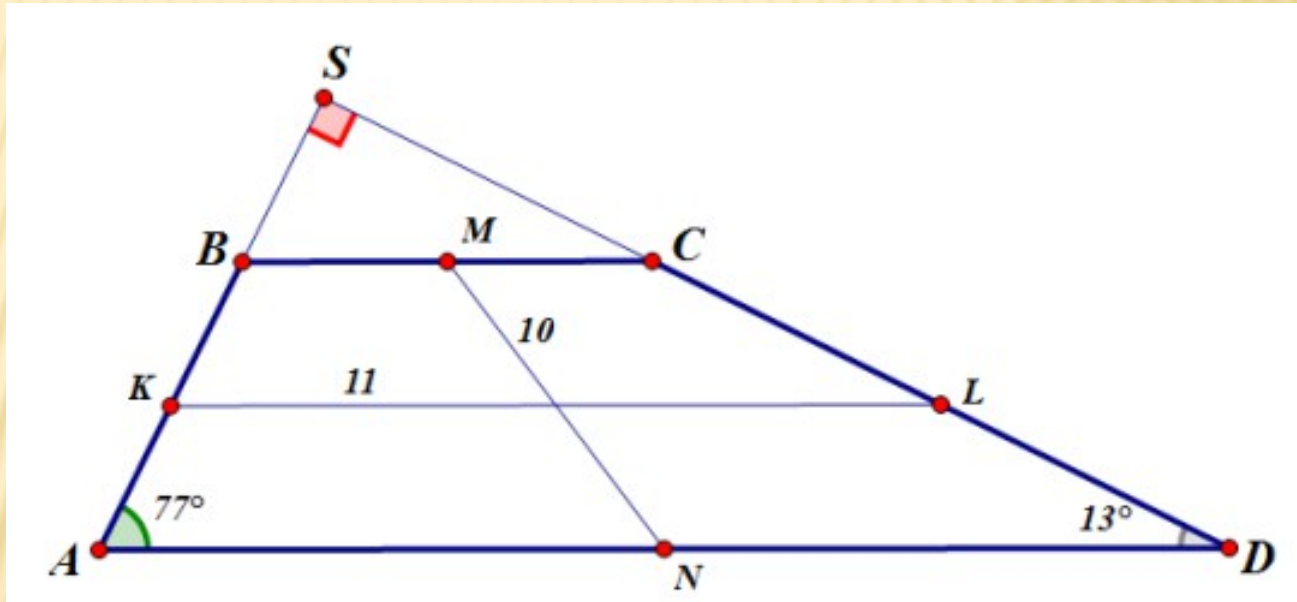
Дано: трапеция ABCD ($AD \parallel BC$), , , $MN=10$,

$KL=11$, MN, KL – отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции.

Найти: BC, AD.

Решение:

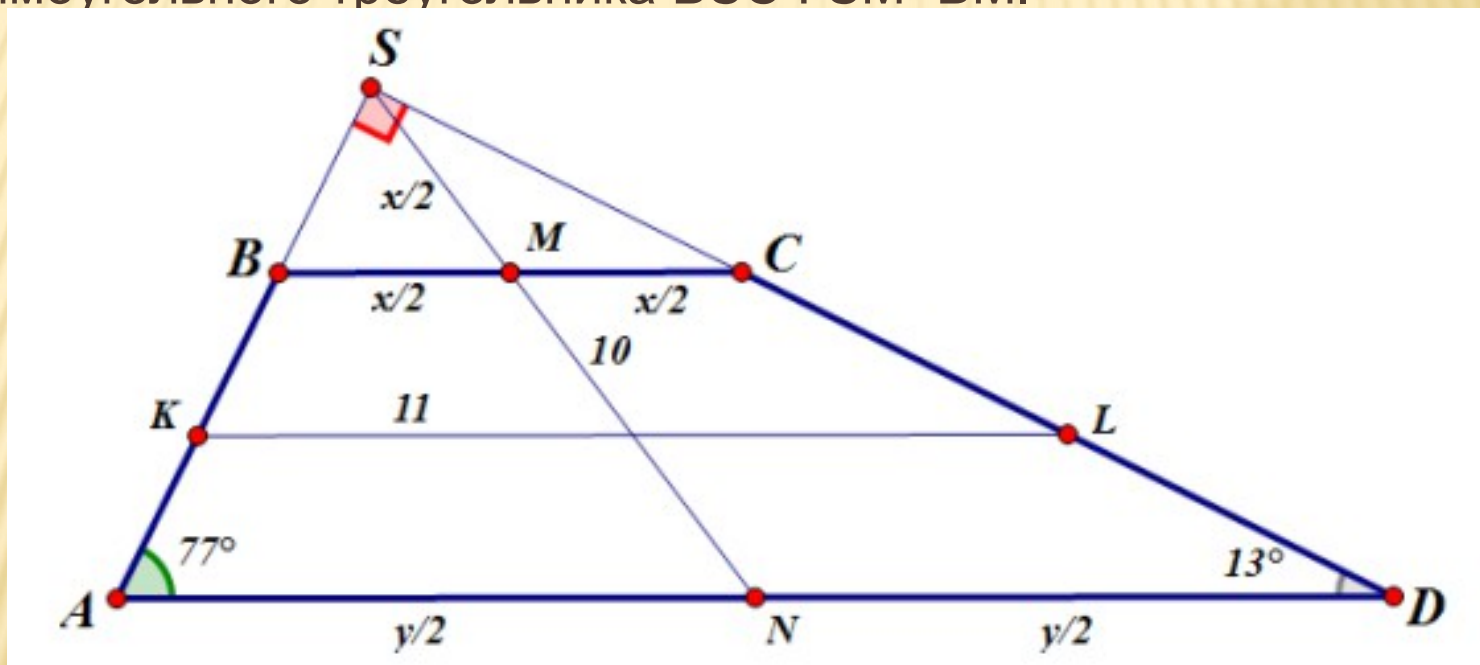
Рассмотрим случай, когда KL – средняя линия, выполним чертеж. Заметим, что сумма углов при основании трапеции равна 90° .
 Выполним дополнительное построение – достроим трапецию до прямоугольного треугольника, S – точка пересечения боковых сторон.



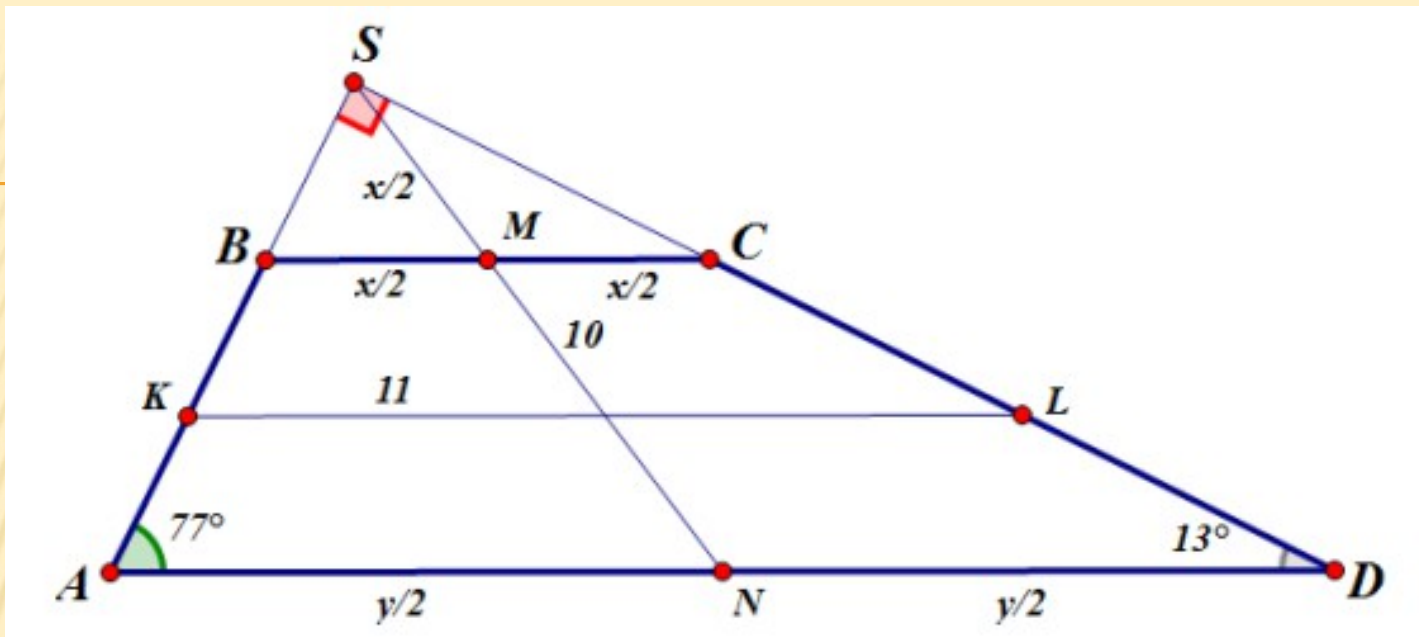
$$BC = x \quad AD = y$$

Пусть KL – средняя линия трапеции, которая равна полусумме оснований, то $KL = \frac{BC + AD}{2} = 11$, $BC + AD = x + y = 22$.

В трапеции ABCD точки S, M, N лежат на одной прямой.
 В прямоугольном треугольнике длина медианы равна половине
 длины гипотенузы (т. к. если около прямоугольного треугольника
 описать окружность, ее центр лежит на середине гипотенузы),
 поэтому из прямоугольного треугольника ASD получим $SN=AN$. Из
 прямоугольного треугольника BSC : $SM=BM$.



Так как $SN=SM+MN$, составим второе уравнение $\frac{x}{2} + 10 = \frac{y}{2}$



Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + 10 = \frac{y}{2} \\ \frac{x}{2} + y = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 22 \\ y - x = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - x = 20 \\ y + x = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - x = 20 \\ y + x = 22 \end{cases}$$

Отсюда $x = 1, y = 21$. Если рассмотрим случай, когда $MN = 11$, $KL = 10$, то система не будет иметь положительных решений.

Ответ: 1; 21.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

- 1. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF=24$, $BF=10$. **Ответ:** 26.
- 2. Основания трапеции относятся как $1:3$. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. В каком отношении эта прямая делит площадь трапеции? **Ответ:** $5/27$
- 3. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E . Биссектрисы углов C и D при боковой стороне CD пересекаются в точке F . Найдите EF , если средняя линия равна 21 , боковые стороны 13 и 15 . **Ответ:** 7.

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ОГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

- ▣ Прототипы заданий второй части ОГЭ по математике
<http://alexlarin.net/gia/21-26-2015.html>
- ▣ <http://4oge.ru/novosti/211-bank-zadaniyoge-fipi.html> Банк заданий ОГЭ ФИПИ
- ▣ <http://reshuoge.ru/> «Решу ОГЭ». Математика. Обучающая система Дмитрия Гущина