Исследование функций с помощью производной

Хамутова Р.М., учитель математики

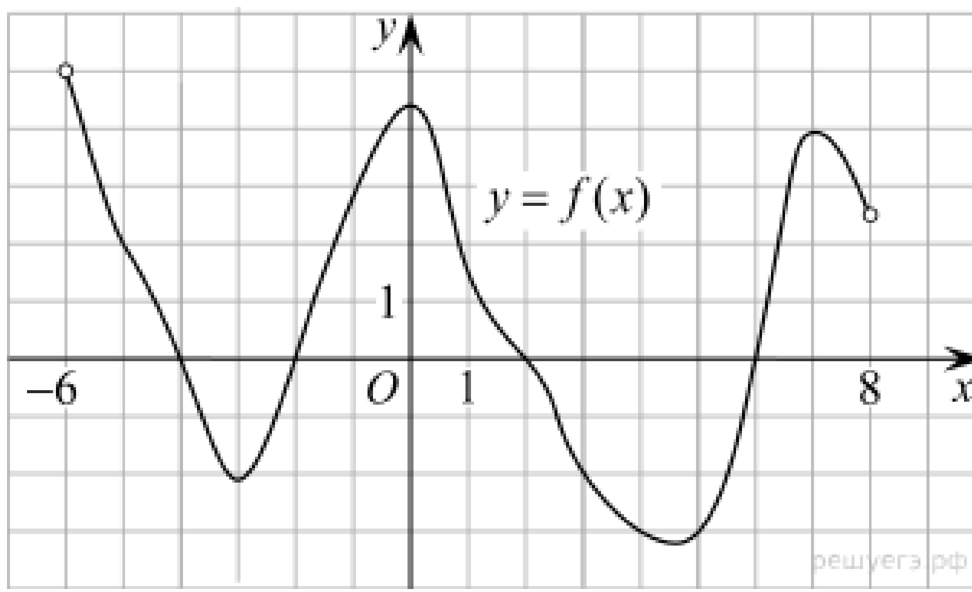
Задания на ЕГЭ по математике

Задание 7. Производная и первообразная

- Возрастание и убывание функций
- Геометрический смысл производной
- Нахождение экстремумов
- Уравнение касательной
- Физический смысл производной

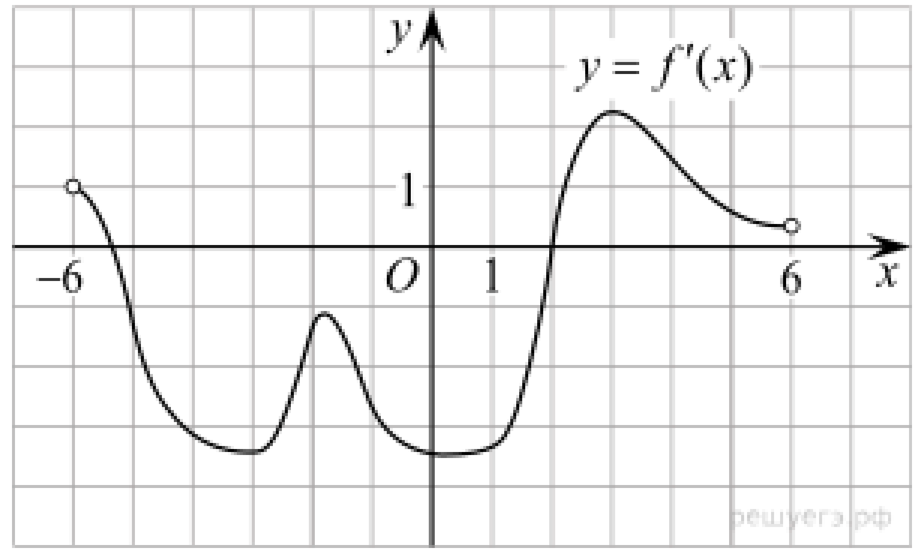
Задание 7.

- На рисунке изображен график функции , определенной на интервале.
- Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



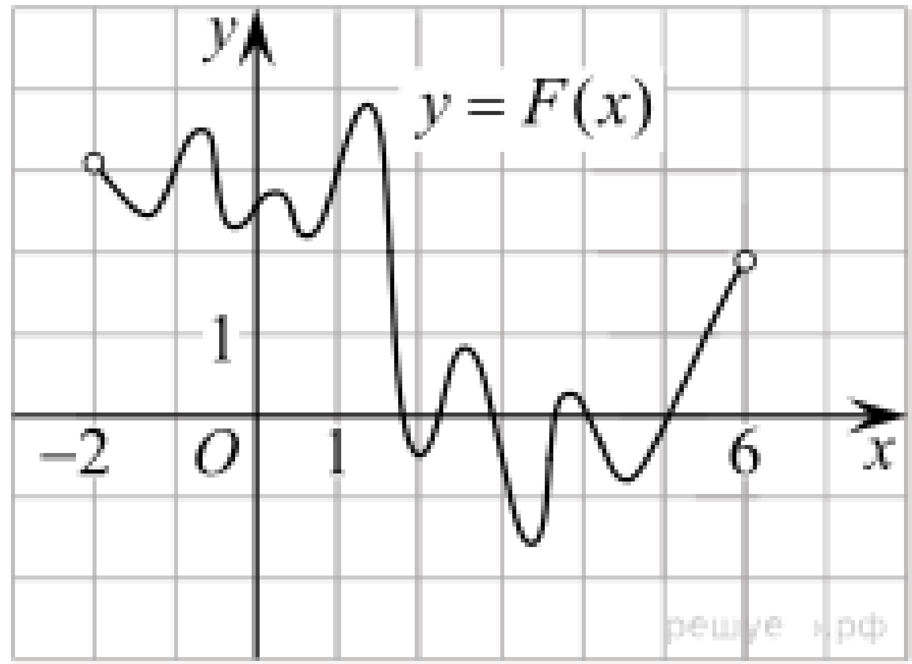
Задание 7.

- На рисунке изображен график производной функции определенной на интервале.
- Найдите промежутки возрастания функции В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



Задание 7.

- На рисунке изображён график функции одной из первообразных некоторой функции , определённой на интервале
- Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения f(x)=0 на отрезке [−1; 5]



Задания на ЕГЭ по математике

Задание 12.

Наибольшее и наименьшее значение функций

- Наибольшее и наименьшее значение на отрезке
- Нахождение интервалов монотонности
- Производная произведения
- Производная сложной функции
- Производные различных функций

Наибольшее и наименьшее значение на отрезке

АЛГОРИТМ ДЕЙСТВИЙ

- Для начала найдем область определения функции. Проверим, входит ли в нее заданный в условии отрезок.
- Теперь вычислим точки, содержащиеся в данном отрезке, в которых не существует первой производной. Чаще всего их можно встретить у функций, аргумент которых записан под знаком модуля, или у степенных функций, показатель которых является дробно рациональным числом.
- Далее выясним, какие стационарные точки попадут в заданный отрезок. Для этого надо вычислить производную функции, потом приравнять ее к 0 и решить получившееся в итоге уравнение, после чего выбрать подходящие корни. Если у нас не получится ни одной стационарной точки или они не будут попадать в заданный отрезок, то мы переходим к следующему шагу.
- Определим, какие значения будет принимать функция в заданных стационарных точках (если они есть), или в тех точках, в которых не существует первой производной (если они есть), либо же вычисляем значения для $x=a$ и $x=b$, т.е. на концах заданного отрезка.
- У нас получился ряд значений функции, из которых теперь нужно выбрать самое больше и самое маленькое. Это и будут наибольшее и наименьшее значения функции, которые нам нужно найти.

1

Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0; 4]$.

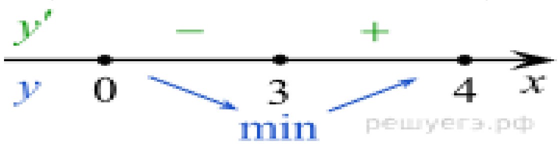
1. Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x+3)(x-3).$$

2. Найдем нули производной:

$$\begin{cases} 3(x+3)(x-3) = 0, \\ 0 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 3, \end{array} \right. \\ 0 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

3. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 3$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(3) = 27 - 27 \cdot 3 = -54.$$

Ответ: −54.

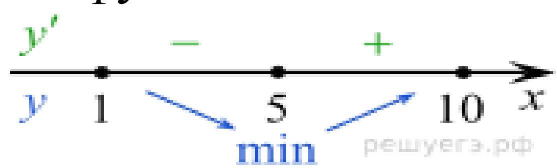
2

Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^2+25}{x}$ на отрезке $[1;10]$.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = \left(\frac{x^2+25}{x}\right)' = \left(x + \frac{25}{x}\right)' = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2-25}{x^2}.$$

Производная обращается в нуль в точках 5 и -5. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции на заданном отрезке:



Наименьшим значением функции на заданном отрезке будет ее значение в точке 5. Найдем его:

$$y(5) = \frac{25+25}{5} = 10.$$

Ответ: 10.

3

Найдите наибольшее значение функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$ на отрезке [1; 9]

Значения функции в концах отрезка.

$$y(1) = 1^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$$

$$y(9) = 9^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 9 + 1 = (3^2)^{\frac{3}{2}} - 27 + 1 =$$

$$= 27 - 27 + 1 = 1$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3 = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} - 3 = 0 \quad / \cdot 2$$

$$3\sqrt{x} - 6 = 0$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4 \in [1; 9]$$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y(4) = 4^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 4 + 1 = (2^2)^{\frac{3}{2}} - 12 + 1 =$$

$$= 8 - 12 + 1 = -3$$

Выбрать наибольшее из полученных значений.

3	1					

Найдите наименьшее значение функции $y = 3x - \ln(x+3)^3$ на отрезке $[-2{,}5;0]$.

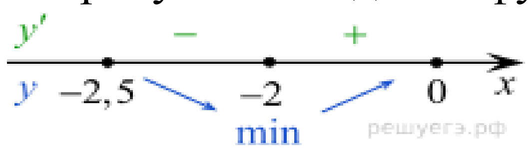
1. Найдем производную заданной функции:

$$y'(x) = 3 - \frac{3}{x+3}.$$

2. Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 3 - \dfrac{3}{x+3} = 0, \\ -2{,}5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+3} = 1, \\ -2{,}5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ -2{,}5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

3. Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



4. В точке $x = -2$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(-2) = -2 \cdot 3 - \ln 1 = -6.$$

Ответ: −6.

5

Найдите наибольшее значение функции $y = 2\cos x - \frac{18}{\pi}x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

Найдем производную заданной функции: $y' = -2\sin x - \frac{18}{\pi}$.

Уравнение $y' = 0$ не имеет решений, производная отрицательна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является убывающей.

Следовательно, наибольшим значением функции на заданном отрезке является

$$y\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 2\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{18}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{3} + 4 = 15.$$

6.

Найдите наибольшее значение функции $y=(x+6)^2e^{-4-x}$ на отрезке $[-6;-1]$.

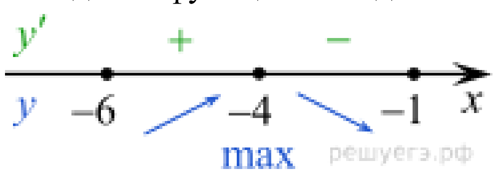
Найдем производную заданной функции:

$$y'=((x+6)^2)'e^{-4-x}+((x+6)^2)(e^{-4-x})'=$$
$$=(2(x+6))e^{-4-x}+(x+6)^2e^{-4-x}\cdot(-1)=$$
$$=(2x+12-x^2-12x-36)e^{-4-x}=-(x^2+10x+24)e^{-4-x}.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases}-(x^2+10x+24)e^{-4-x}=0,\\ -6\le x\le -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+10x+24=0,\\ -6\le x\le -1\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-6,\\ x=-4,\end{array}\right.\\ -6\le x\le -1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-6,\\ x=-4.\end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции на заданном отрезке:



В точке $x=-4$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение: $y(-4)=(-4+6)^2\cdot 1=4$

Ответ: 4.