Координатно-параметрический метод решения задач с параметром

Золотая Ирина Георгиевна,

учитель математики

МБОУ СОШ № 10 с УИОП

Метод решения задач, с параметрами использующий КП-плоскость (плоскость с осями параметр – переменная), называется КП-методом. Одна из осей (Ох) является координатной, а другая (Оа) параметрической. F(x, a) = 0, (1) где F(x, a) – некоторая функция переменной x и числового параметра a

1. Координата x есть функция параметра a: x = f(a).

На КП-плоскости xOa с горизонтальной параметрической осью Oa множество всех точек, значения координаты x и параметра a каждой из которых удовлетворяют уравнению (1), представляет собой график функции где роль аргумента функции играет параметр.

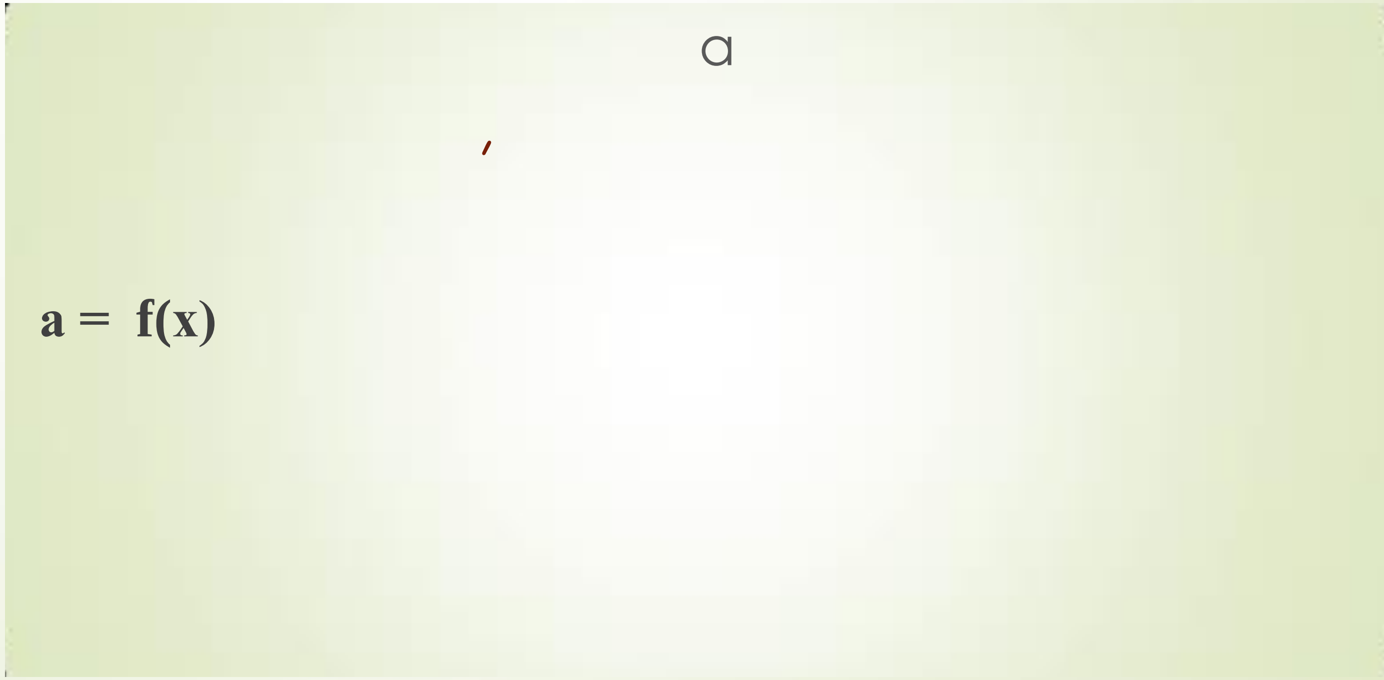
x

x = f(a)

0

a

2. Параметр a есть функция координаты x: a = f(x).
В этом случае можно рассматривать КП-плоскость aOx с вертикальной параметрической осью Oa и интерпретировать множество всех точек, значения координаты и параметры каждой из которых удовлетворяют уравнению (1), как график функции где роль аргумента функции играет координата.



Классификация задач, решаемых КП-методом

1. Задачи, в условии которых спрашивается о количестве решений уравнения или систем уравнений в зависимости от значения параметра.
2. Задачи, в которых необходимо найти значение параметра, при которых задача имеет заданное количество решений (единственное, k решений, бесконечное множество).
3. Задачи, в которых необходимо получить решение для всех значений параметра или для значений параметра из заданного промежутка.
4. Задачи, в которых необходимо найти значения параметра, при которых множество решений удовлетворяют заданным условиям.

Алгоритм решения задач с параметром графическим методом

1. Преобразовываем исходное условие задачи к системе неравенств, в которых неизвестное выражается через параметр, или, наоборот, параметр выражается через неизвестное.
2. Вводим систему координат $(a;x)$, если мы неизвестное выражали через параметр, или $(x;a)$, если, наоборот, параметр выражали через неизвестное.
3. Изображаем в выбранной координатной плоскости фигуру, которая задается множеством решений системы неравенств.
4. «Сканируем» эту фигуру, двигаясь вдоль оси параметра и определяем, при каких значениях параметра выполняются заданные в задаче условия.
5. Записываем ответ.

Задача №1: Для каждого значения параметра а решить неравенство

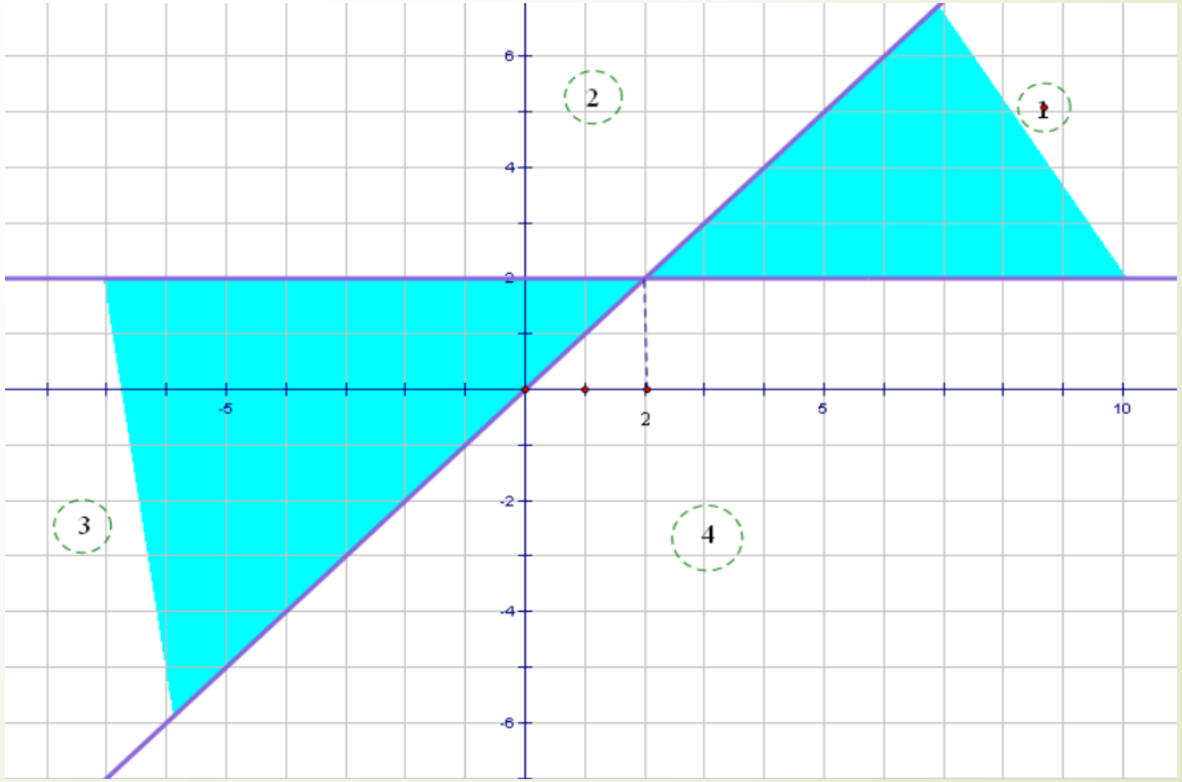
(х-а)(х-2)≤0

На координатно- параметрической плоскости хОа строим две прямые:

х=а и х=2.

Множества точек, значения координаты и параметра которых удовлетворяют рассматриваемому неравенству, представляет собой области I и III.

Ответ: Если а< 2, то $а \leq х \leq 2$; если а=2, то х=2; если $а \neq 2,$ то $2 \leq х \leq а$



Задача № 2: Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $(a + 4x - x^2 - 1)(a + 1 - |x - 2|) = 0$ имеет ровно три различных корня.

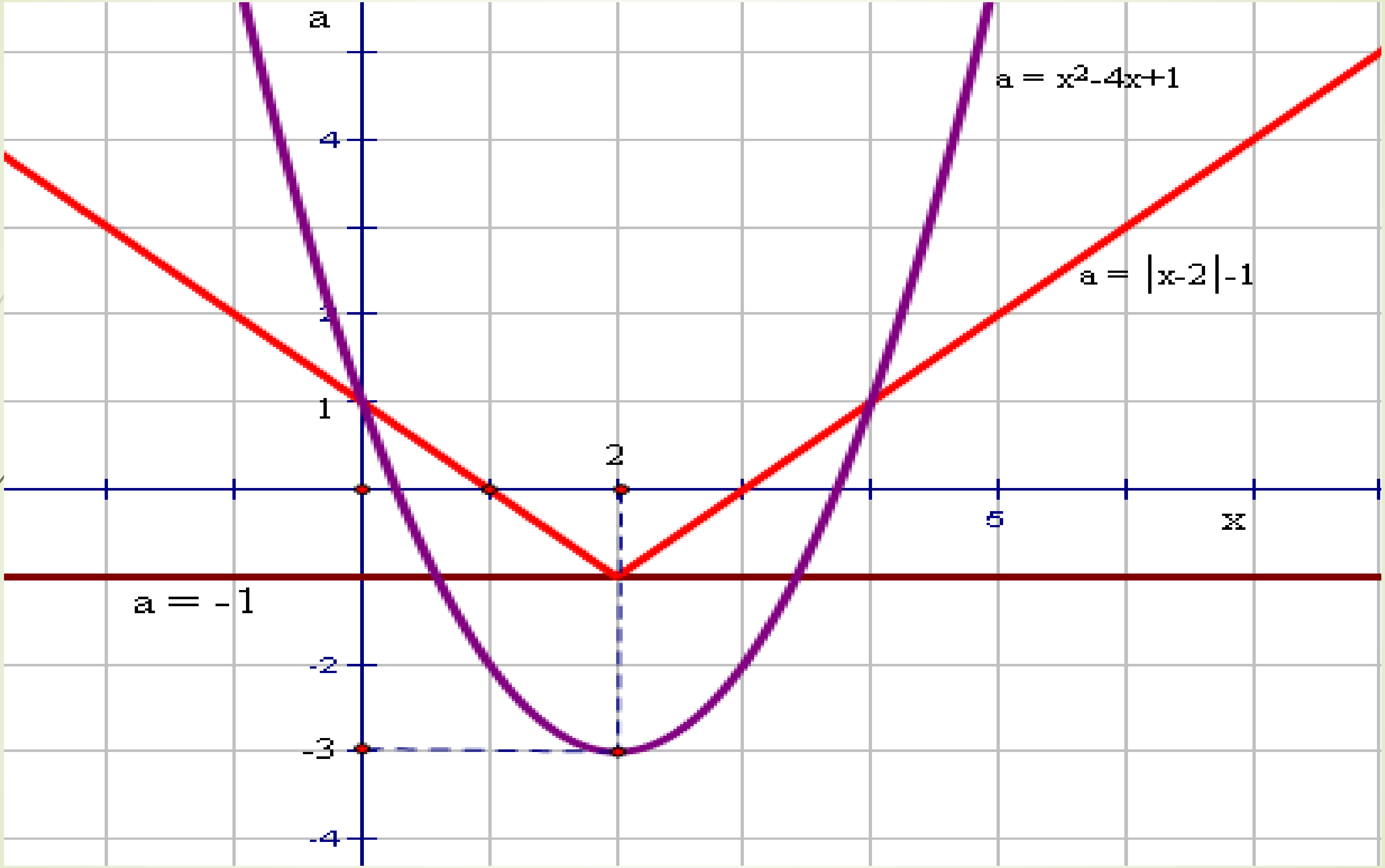
Решение: Так как произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю, то данное уравнение равносильно совокупности: $\left[\begin{array}{l} a=x^2-4x+1 \\ a=|x-2|-1 \end{array}\right.$;

Построим графики полученных функций в системе координат xOa. Графиком первой функции является парабола, ветви которой направлены вверх, координата вершины находится в точке

(2; -3). График второй функции получен из графика $a = |x|$ параллельным переносом вдоль оси Ox вправо на две единицы и вдоль оси Oa на одну единицу вниз.

Из рисунка видим, что условию задачи удовлетворяет одно значение a=-1

Ответ: a=-1


a
4
1
2
-2
-3
-4
5
x
a = x2-4x+1
a = |x-2|-1
a = -1

Задача № 3: Найдите все значения параметра а, при каждом из которых неравенство $\left|\frac{x^2+x-2a}{x+a}-1\right| \le 2$ не имеет решений на интервале (1; 2).

Решение:

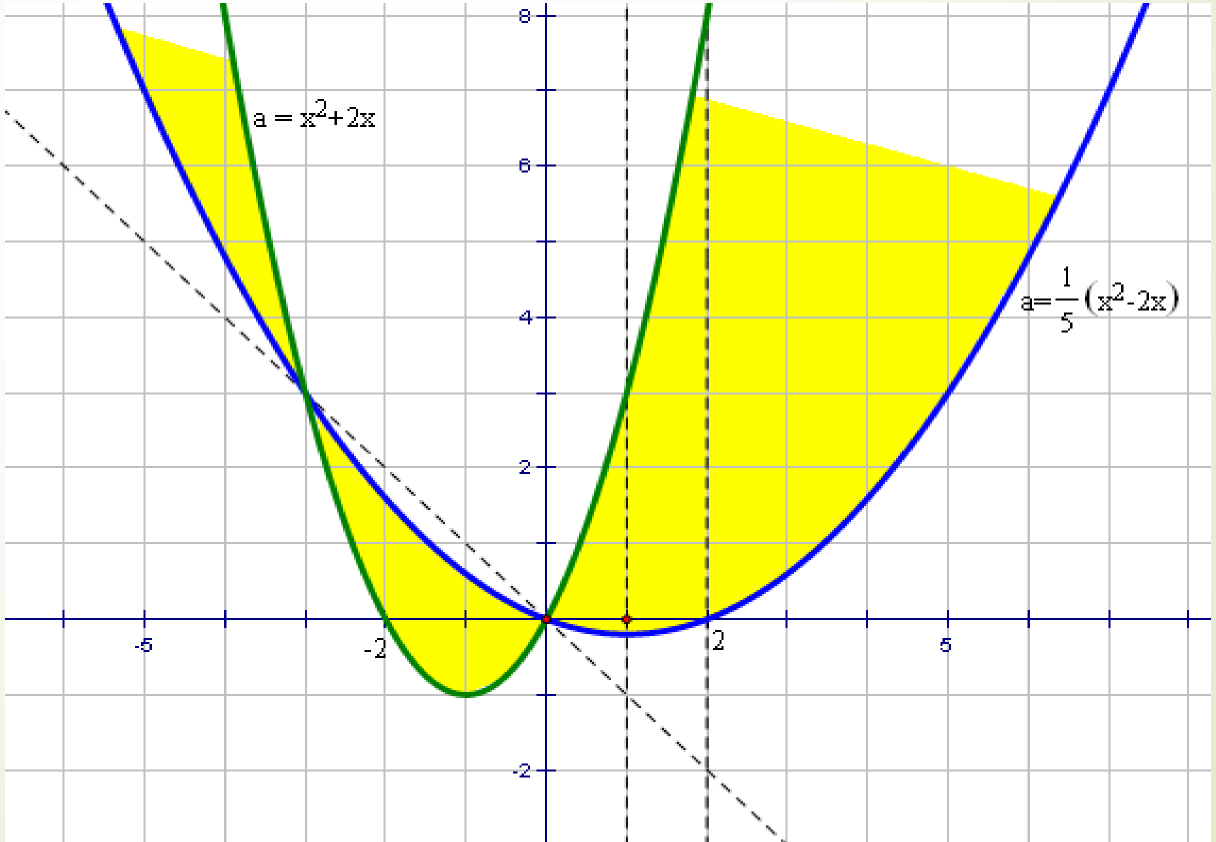
1. ОДЗ: $x \ne -a$

2. Преобразуем заданное неравенство $\left|\frac{x^2+x-2a}{x+a}-1\right| \le 2 \Rightarrow \left|\frac{x^2-3a}{x+a}\right| \le 2 \Rightarrow$ $|x^2-3a| \le 2|x+a| \Rightarrow (x^2-3a)^2 \le 4(x+a)^2 \Rightarrow$

$(x^2-3a-2(x+a))(x^2-3a+2(x+a)) \le 0 \Rightarrow (x^2-2x-5a)(x^2+2x-a) \le 0$

3. Строим графики функций: a = x^2+2x ; $a = \frac{1}{5}$ (x^2-2x) . Графиками являются параболы ветви которых направлены вверх, первая с вершиной в точке (-1; -1), вторая в точке $(1; -\frac{1}{5})$.

a = -x , а так же прямые x =1 и x = 2, так как будем рассматривать интервал (1; 2).



4. Определяем знак в каждой полученной области (см. рисунок).

5. Выясняем при каких значениях параметра прямая a =b не имеет общих точек с выделенной областью на интервале (1;2).

Ответ: $a \in (-\infty; -\frac{1}{5}) \cup [8: +\infty)$.

Задача № 4: Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} a(x-1) \geq 4, \\ 2\sqrt{x-2} \geq a, \\ 3x < a + 14; \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение на отрезке [4; 5].

- Преобразуем систему: $\begin{cases} a \geq \frac{4}{x-1}, x - 1 \neq 0 \text{ на отрезке } [4; 5] \\ a \leq 2\sqrt{x-2}, \\ a > 3x - 14. \end{cases}$

- Построим прямоугольную систему координат xOa. Изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств.

Гипербола $a = \frac{4}{x-1}$ и график корня $a = 2\sqrt{x-2}$ пересекаются в точке $N(3;\ 2)$. Гипербола и прямая $a = 3x - 14$ пересекаются в точке M(5; 1). График корня и прямая пересекаются в точке K(6; 4). Множество точек, координаты которых удовлетворяют заданной системе состоит из точек криволинейного треугольника NMK, не включая границу, лежащую на прямой K*M*.

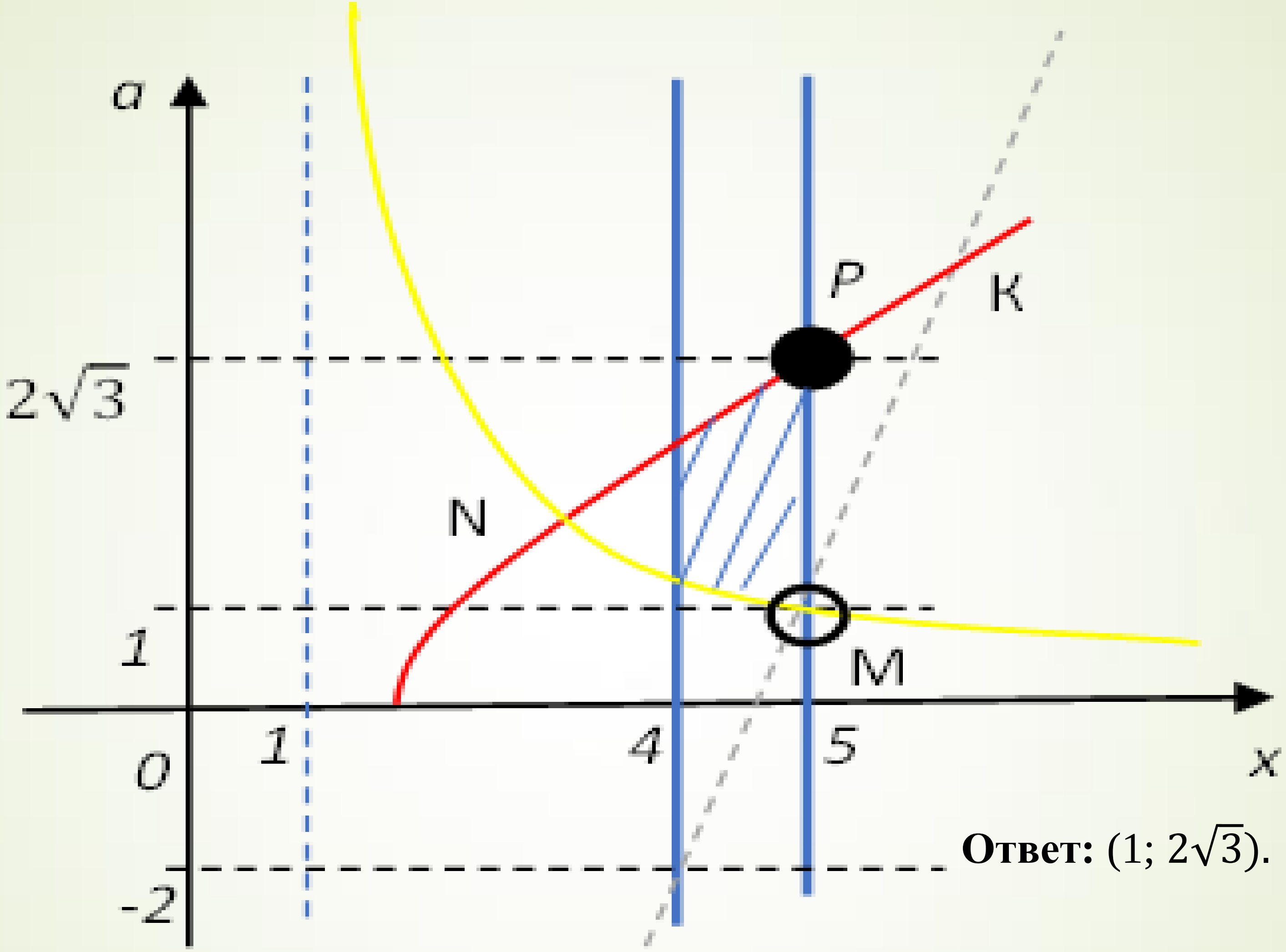
Поскольку система должна иметь хотя бы одно решение на отрезке [4; 5], определим наименьшую и наибольшую ординаты проекции выделенного на рисунке четырехугольника на ось ординат.

Найдём координаты точки P:

a=2√(x-2),x=5 =>

a=2√(5-2)=2√3

Проекции точек P и M дают искомое множество: заданная система неравенств имеет хотя бы одно решение на отрезке [4; 5] при 1<a≤2√3 (выделено штриховкой на рисунке).



Ответ: $(1;\ 2\sqrt{3})$.

Задача № 5: Найдите все значения a, для каждого из которых уравнение $25^x - (a+6)\cdot 5^x = (5+3|a|)\cdot 5^x - (a+6)(3|a|+5)$ имеет единственное решение.

- Преобразуем исходное уравнение:

$25^x - (a+6)\cdot 5^x = (5+3|a|)\cdot 5^x - (a+6)(3|a|+5);$

$5^x(5^x - a - 6) = (5+3|a|)(5^x - a - 6);$ $(5^x - a - 6)(5^x - 3|a| - 5) = 0$

$5^x - a - 6 = 0$ или $5^x - 3|a| - 5 = 0.$

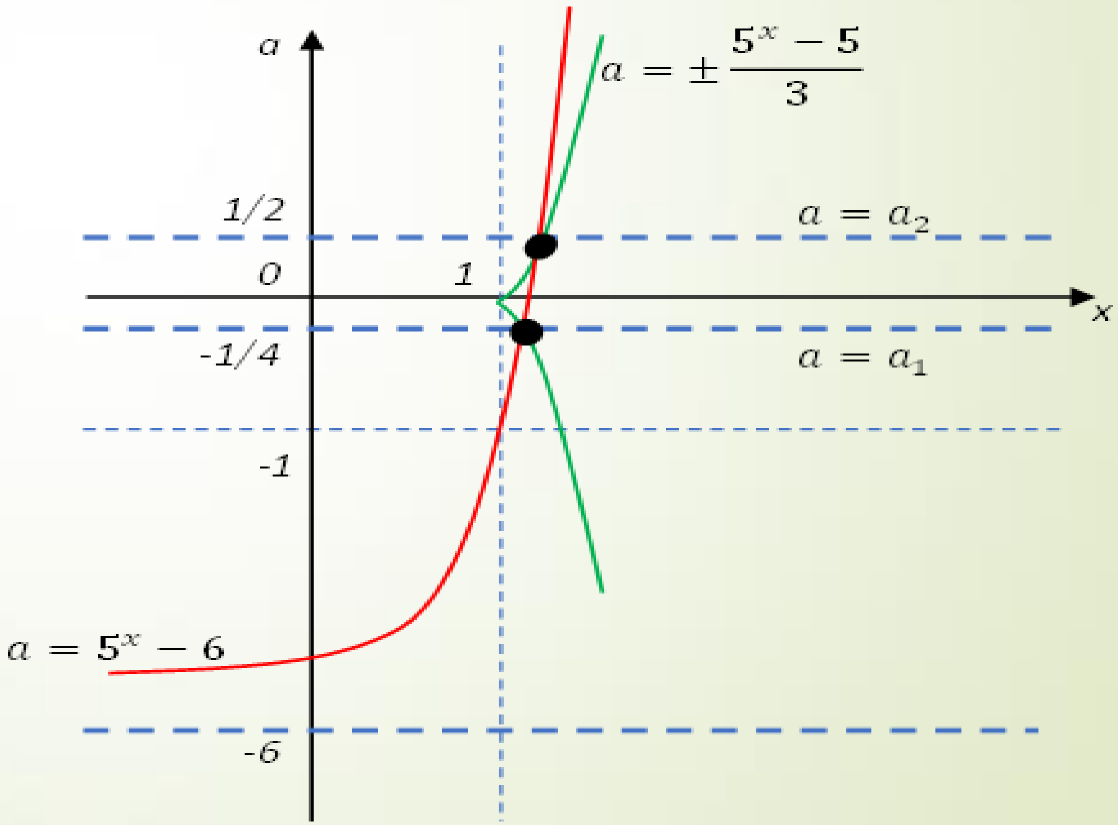
Построим графики функций $a = 6 - 5^x$ и $a = \pm\frac{5^x - 5}{3}$

На чертеже заметим, что система имеет единственное решение при $a = a_1$, $a = a_2$ и $a \leq -6$. Найдём a_1 и a_2:

Если a>0, то: $\begin{cases} 5^x - a - 6 = 0, \\ 5^x - 5 + 3a = 0; \end{cases}$ => $6 + a = 5 - 3a$, => $a_1 = -\frac{1}{4}$.

Если a<0, то: $\begin{cases} 5^x - a - 6 = 0, \\ 5^x - 5 - 3a = 0; \end{cases}$ => $6 + a = 5 + 3a$, => $a_2 = \frac{1}{2}$.

Ответ: $a = -\frac{1}{4}$; $a = \frac{1}{2}$; $a \leq -6$.



Задача № 6: Найти те значения параметра а, при которых уравнение |2x+3|+|2x-3|=ax+6 имеет больше двух решений.

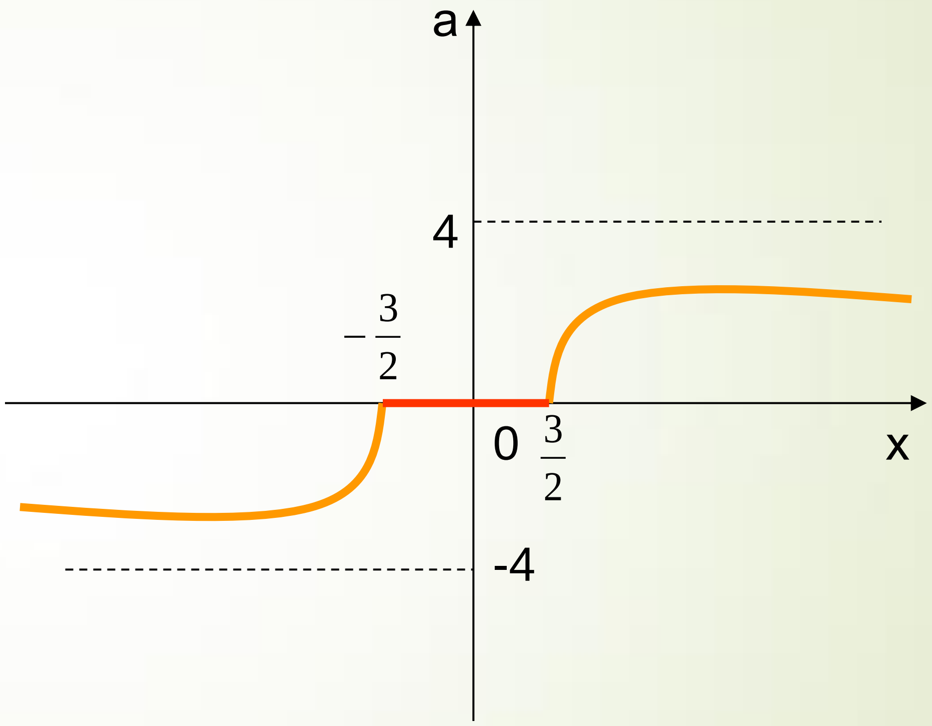
$$(\text{КП} - \text{метод})$$

$$|2x+3|+|2x-3|=ax+6$$

$$1)\ x=0;\ a\in R$$

$$2)\ x\neq 0;\ a=\frac{|2x+3|+|2x-3|-6}{x}$$

$$a=\begin{cases}-4-\dfrac{6}{x};\ x\in\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)\\ 0;\ x\in\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]\\ 4-\dfrac{6}{x};\ x\in\left(\dfrac{3}{2};\infty\right)\end{cases}$$



По рисунку считываем ответ.

Ответ: a=0

Задача № 8: Решить неравенство $log_a(7-\mathrm{x}) > 2 \cdot \log_a(\mathrm{x}-1)$ для каждого допустимого значения a.

Решение: Составим систему, учитывая ОДЗ:

$$\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ 7 - x > 0 \\ x - 1 > 0 \\ \log_a(7-x) > \log_a(x-1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ 1 < x < 7 \\ (a-1)\big((7-x)-(x-1)^2\big) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ 1 < x < 7 \\ (a-1)(x-3)(x+2) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ 1 < x < 7 \\ (a-1)(x-3) < 0 \end{cases}$$

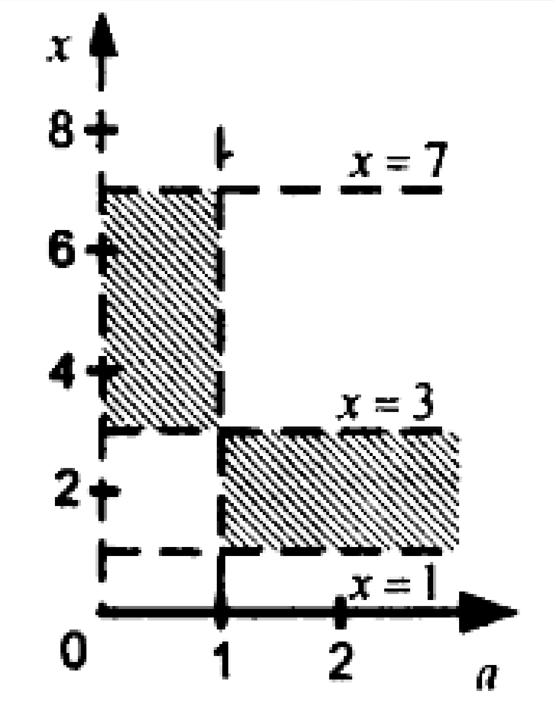


Рисунок 4 [2, стр. 171]

Построим на координатно-параметрической оси xOa множество все... и параметра а каждой из которых удовлетворяют полученной системе (на *Рисунке 4* это множество заштриховано).

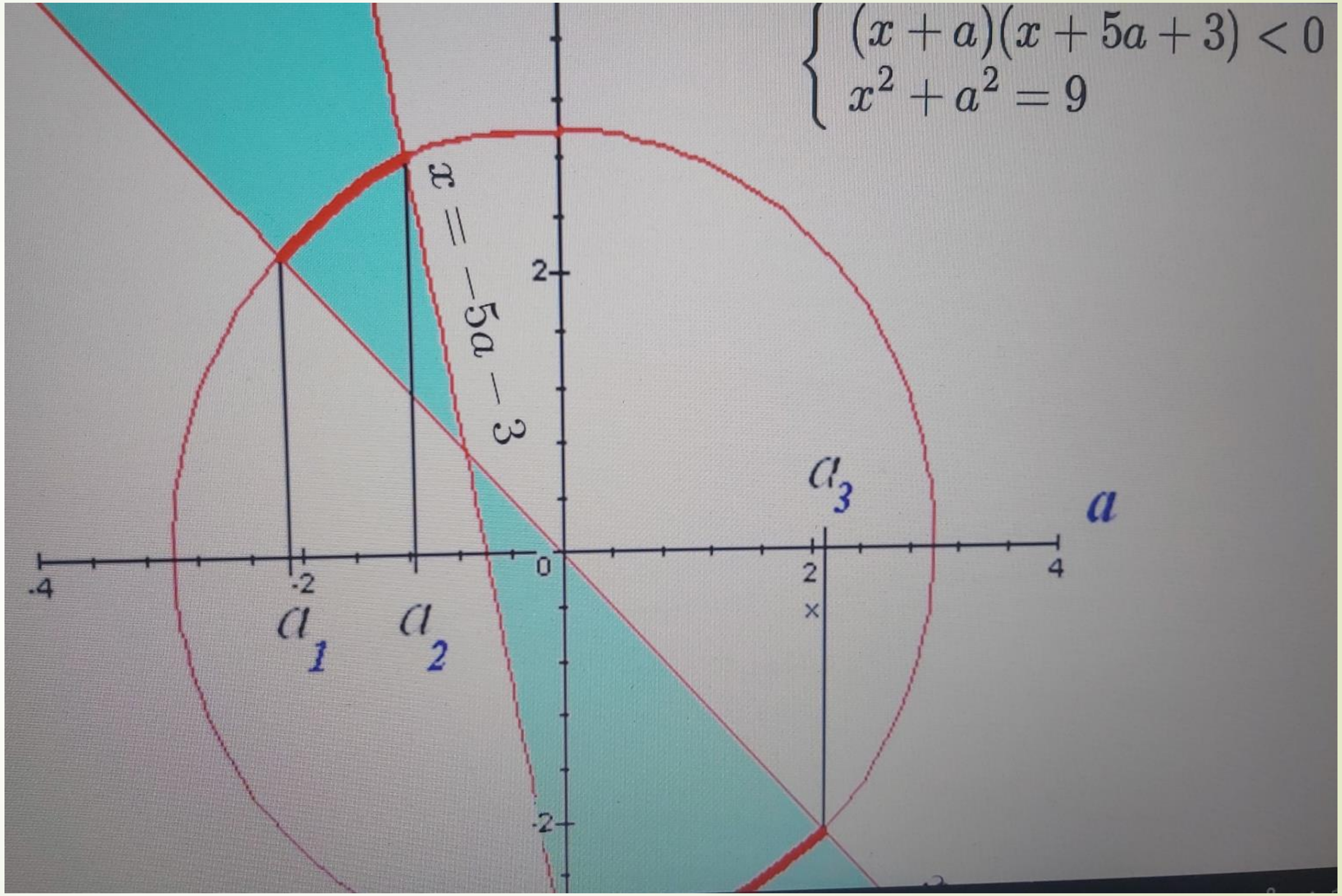
Ответ: Если $0 < a < 1$, то $3 < x < 7$; если $a > 1$, то $1 < x < 3$.

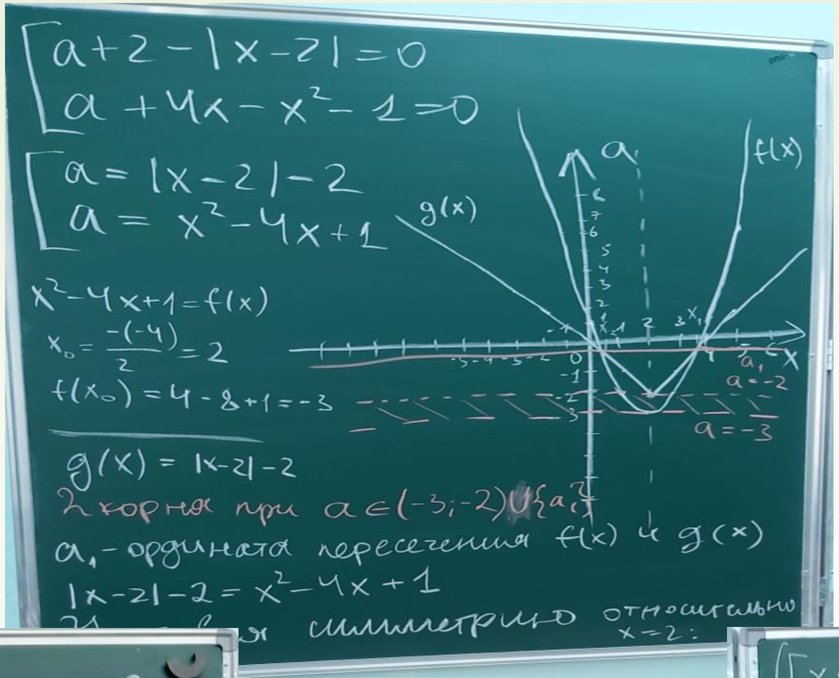
№4. Найдите все значения a, при каждом из которых система

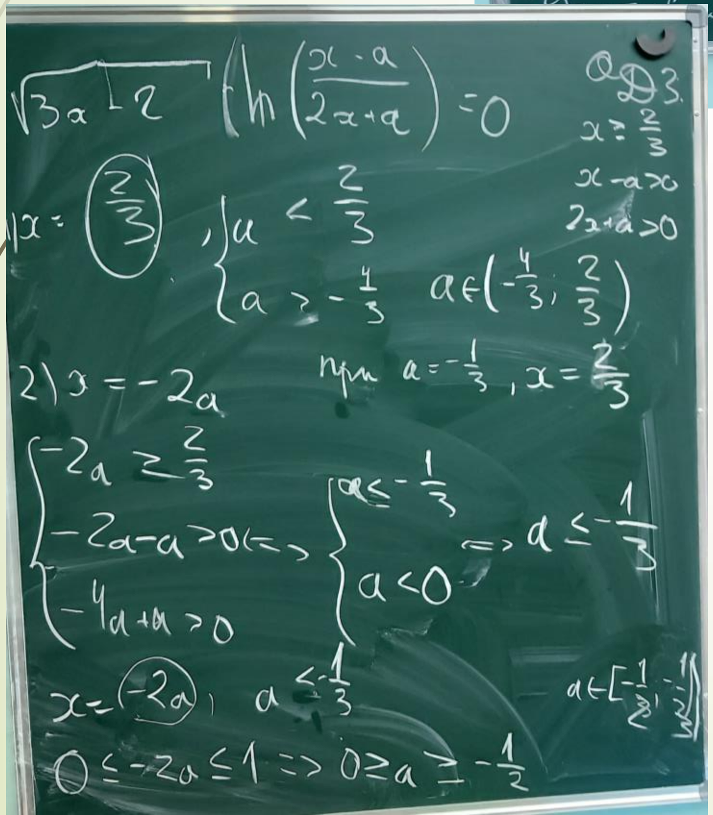
$$\begin{cases} x^2 + (6a+3)x + 5a^2 + 3a < 0, \\ x^2 + a^2 = 9 \end{cases}$$

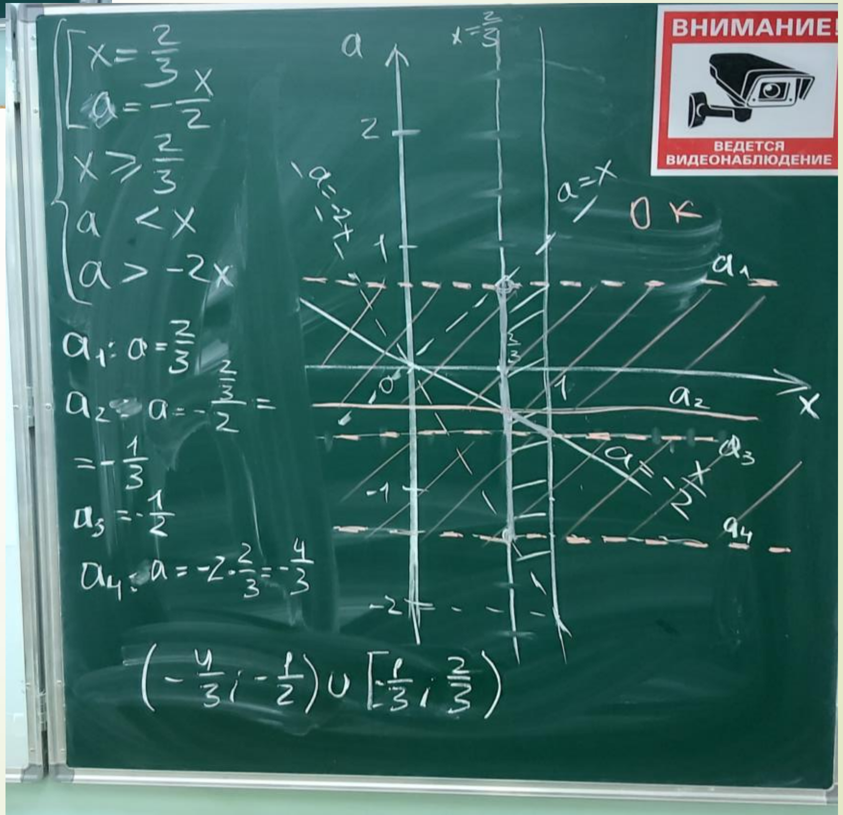
имеет решения.

Ответ: $\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{15}{13}\right) \cup \left(0; \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.




a+2−|x−2|=0
a+4x−x²−1=0
a=|x−2|−2
a=x²−4x+1
g(x)
f(x)
x²−4x+1=f(x)
x₀=−(−4)/2=2
f(x₀)=4−8+1=−3
g(x)=|x−2|−2
2 корня при a∈(−3;−2)∪{a₁}
a₁ − ордината пересечения f(x) и g(x)
|x−2|−2=x²−4x+1
a=−2
a=−3


ОДЗ
x≥2/3
x−a>0
2x+a>0
1) x=2/3
a<2/3
a>−4/3
a∈(−4/3; 2/3)
при a=−1/3, x=2/3
2) x=−2a
−2a≥2/3
−2a−a>0
−4a+a>0
a≤−1/3
a<0
a≤−1/3
x=−2a, a≤−1/3
0≤−2a≤1 => 0≥a≥−1/2


x=2/3
a=−x/2
x≥2/3
a<x
a>−2x
a₁: a=2/3
a₂: a=−(2/3)/2=−1/3
a₃: a=−1/2
a₄: a=−2·2/3=−4/3
a=x
ОК
(−4/3; −1/2)∪[−1/3; 2/3)
ВНИМАНИЕ!
ВЕДЕТСЯ ВИДЕОНАБЛЮДЕНИЕ

Задачи с параметрами являются сложными потому, что не существует единого алгоритма их решения. Спецификой подобных задач является то, что наряду с неизвестными величинами в них фигурируют параметры, численные значения которых не указаны конкретно, но считаются известными и заданными на некотором числовом множестве. При этом значения параметров существенно влияют на логический и технический ход решения задачи и форму ответа.

По статистике многие из выпускников не приступают к решению задач с параметрами на ЕГЭ. По данным ФИПИ всего 10% выпускников приступают к решению таких задач, и процент их верного решения невысок: 2-3%, поэтому приобретение навыков решения трудных, нестандартных заданий, в том числе задач с параметрами, учащимися школ по-прежнему остается актуальным.