А. Г. ЦЫПКИН • Г. Г. ЦЫПКИН

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

ББК 22.1
Ц97
УДК 51

Ц ы п к и н А. Г., Ц ы п к и н Г. Г. Математические формулы. Алгебра. Геометрия. Математический анализ: Справочник. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. литры, 1985. — 128 с.

Представлены основные формулы алгебры, геометрии (включая дифференциальную геометрию и векторное исчисление), тригонометрии. Широко представлены формулы и основные понятия и теоремы математического анализа. Приведены таблицы основных интегралов.

Для широкого круга специалистов и учащейся молодежи.

Рецензент:
Доктор физико-математических наук *С. А. Степанов*

Ц $\frac{1702070000-167}{053(02)-85}$ 52-85

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге достаточно полно представлены основные формулы следующих разделов математики: алгебры, геометрии (включая аналитическую и дифференциальную геометрию и векторное исчисление), математического анализа, теории функций комплексного переменного, а также основные формулы для некоторых трансцендентных функций (тригонометрических, гиперболических, интегральных и т. д.).

При подборе материала, включенного в справочник, авторы старались ограничиться приведением классических, часто используемых формул указанных выше разделов математики. Именно с такими формулами имеют дело учащиеся средних школ, техникумов, ПТУ, студенты втузов и научно-технические работники. Для этого круга читателей и предназначена настоящая книга.

Для удобства читателей в начале разделов справочника, посвященных высшей математике, перед изложением основного материала даются формулировки основных понятий, встречающихся в данном разделе. В ряде разделов справочника (в частности, посвященных формулам интегрального исчисления и формулам теории функций комплексного переменного) характер налагаемого материала потребовал, наряду с формулами, дать также и условия их применимости, а в некоторых случаях, для правильного понимания формул, и формулировки теорем, результатом которых является та пли иная формула. В ряде случаев авторы сочли возможным дать наиболее простые формулировки теорем, из которых следуют приводимые формулы. Более слабые условия, а также условия специального вида, при которых могут быть доказаны эти теоремы и при которых верны соответствующие формулы, читатель может найти в специальной литературе.

Основное назначение справочника — получение краткой справки по формулам указанных разделов математики. Для более подробного и детального ознакомления с интересующими читателя математическими фактами и формулами он может обратиться к литературе, список которой дан в конце справочника. В список цитируемой литературы, ни в какой мере не претендующий хотя бы на относительную полноту, включены лишь наиболее известные издания, вышедшие в последние годы.

Обозначения, принятые в справочнике, соответствуют обозначениям, принятым в большинстве учебников и книг по математике. Следуя общепринятым обозначениям в различных разделах математики, в тех случаях, когда это не вызывает недоразумения, авторы сочли возможным использовать одни и те же символы для обозначения математических объектов из разных разделов математики.

Авторы будут весьма признательны всем читателям, которые выскажут своп замечания, касающиеся как подбора материала, включенного в справочник, так и структуры изложения, что поможет им в дальнейшей работе по совершенствованию справочника и расширению возможного круга читателей.

I. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. АЛГЕБРА

1. Действительные числа

1.1. Каноническое разложение натурального числа:

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$$

где $p_1, \ldots, p_s$ — различные между собой простые, $k_1, \ldots, k_s$ — натуральные числа.

1.2. Некоторые признаки делимости натуральных чисел.

Число делится на 2, если его последняя цифра есть число четное или нуль.

Число делится на 4, если две его последние цифры — нули или образуют число, делящееся на 4.

Число делится на 8, если три последние его цифры — нули или образуют число, делящееся на 8.

Число делится на 3, если сумма цифр числа делится на 3.

Число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9.

Число делится на 5, если оно оканчивается либо на нуль, либо на 5.

Число делится на 25, если его последние две цифры — нули либо образуют число, делящееся на 25.

Число делится на 11, если у него сумма цифр, занимающих четные места, либо равна сумме цифр, занимающих нечетные места, либо отличается от нее на число, делящееся на 11.

Формула связи наибольшего общего делителя (m, n) двух натуральных чисел m и n и их наименьшего общего кратного $\{m, n\}$:

$$m \cdot n = (m, n) \cdot \{m, n\}.$$

1.3. Абсолютная величина (модуль) действительного числа:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если} \quad a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если} \quad a < 0. \end{cases}$$

Если a и b — два действительных числа, то

$$|a \cdot b| \leqslant |a| \cdot |b|; \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}; \quad ||a| - |b|| < |a - b|;$$

$$|a + b| \leqslant |a| + |b| \quad \textit{(неравенство треугольника).}$$

1.4. Дроби.

Правила действий с рациональными числами (дробями):

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}; \quad \frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - np}{nq}; \quad \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}; \quad \frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q}{n \cdot p}.$$

Формула обращения конечной десятичной дроби в рациональную дробь:

$$0{,}n_1 n_2 \ldots n_k = \frac{n_1 n_2 \ldots n_k}{10^k}, \quad n_1, n_2, \ldots, n_k \text{ — цифры.}$$

Формула обращения бесконечной периодической дроби в рациональную дробь:

$$0{,}n_1 n_2 \ldots n_k\,(n_{k+1}\, n_{k+2} \ldots n_{k+p}) = \frac{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1} n_{k+2} \ldots n_{k+p} - n_1 n_2 \ldots n_k}{10^k (10^p - 1)},$$

где $(n_{k+1}\, n_{k+2} \ldots n_{k+p})$ — *период дроби*.

1.5. Пропорции.

Из пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ следуют равенства: $a \cdot d = b \cdot c$; $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$; $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$; $\frac{ma+nb}{pa+qb} = \frac{mc+nd}{pc+qd}$ (*производные пропорции*),

где m, n, p, q — произвольные числа и $p^2 + q^2 \neq 0$.

1.6. Степени и логарифмы.

Степени с действительным показателем:

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0); \qquad a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; \qquad (a^x)^y = a^{xy};$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Логарифмы (a, M_1, $M_2 > 0$, $a \neq 1$): $\log_a a = 1$;

$$\log_a (M_1 M_2) = \log_a M_1 + \log_a M_2; \quad \log_a\left(\frac{M_1}{M_2}\right) = \log_a M_1 - \log_a M_2;$$

$$\log_a\left(b^c\right) = c \cdot \log_a b; \quad \log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}; \quad \log_a c = \frac{1}{\log_c a}.$$

2. Алгебра.

2.1. Формулы сокращенного умножения.

Общие формулы:

$$x^n - c^n = (x-c)(x^{n-1} + x^{n-2}c + x^{n-3}c^2 + \ldots + xc^{n-2} + c^{n-1}) = (x-c)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1}c^k ,$$

где n — любое;

$$x^n - c^n = (x+c)(x^{n-1} - x^{n-2}c + x^{n-3}c^2 - \ldots + xc^{n-2} - c^{n-1}) = (x+c)\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{n-k-1}c^k ,$$

где n — четное;

$$x^n + c^n = (x+c)(x^{n-1} - x^{n-2}c + x^{n-3}c^2 - \ldots - xc^{n-2} + c^{n-1}) = (x+c)\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{n-k-1}c^k ,$$

где n — нечетное.

Простейшие формулы:

$$(x + c)(x - c) = x^2 - c^2;$$

$$(x + c)(x^2 - xc + c^2) = x^3 + c^3;$$

$$(x - c)(x^2 + xc + c^2) = x^3 - c^3.$$

2.2. Формулы Виета.

Формулы Виета для приведенного многочлена n-ной степени $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ с корнями $c_1, c_2, \ldots, c_n$:

$$c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_{n-1} + c_n = -a_1,$$

$$c_1c_2 + c_1c_3 + \ldots + c_{n-1}c_n = a_2,$$

$$c_1c_2c_3 + c_1c_2c_4 + \ldots + c_{n-2}c_{n-1}c_n = -a_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_1c_2c_3\ldots c_{n-1}c_n = (-1)^n a_n .$$

Формулы Виета для приведенного квадратного трехчлена $P(x) = x^2 + px + q$:

$$c_1 + c_2 = -p, \quad c_1c_2 = q.$$

Формулы Виета для приведенного кубичного многочлена $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$:

$$c_1 + c_2 + c_3 = -p, \quad c_1c_2 + c_2c_3 + c_1c_3 = q, \quad c_1c_2c_3 = -r .$$

2.3. Корни квадратного уравнения.

Формула вычисления корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с действительными коэффициентами:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} .$$

Если $D \equiv b^2 - 4ac > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня; если $D = 0$, то уравнение имеет один действительный корень кратности 2; если $D < 0$, то уравнение имеет два комплексно сопряженных корня:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}; \quad x_2 = -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Формула вычисления корней приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Формула вычисления корней квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом $ax^2 + 2kx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

2.4. Корни кубичного уравнения с действительными коэффициентами.

Корни неполного кубичного уравнения $y^3 + py + q = 0$ вычисляются по *формулам Кардано*:

$$y_1 = A + B, \quad y_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i\frac{A-B}{2}\sqrt{3},$$

где $A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}$, $B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}$, $Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$,

причем в качестве корней выбираются любые значения кубичных корней, удовлетворяющие равенству $AB = -p/3$.

Корни неполного кубичного уравнения с действительными коэффициентами $y^3 + py + q = 0$ могут быть вычислены также по следующим формулам (тригонометрическое решение). Если $Q < 0$, то $p < 0$, и

$$y_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\alpha}{3}, \quad y_{2,3} = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\alpha}{3} \pm \frac{\pi}{3}\right),$$

где значения тригонометрических функций вычисляются по значению $\cos\alpha = -\frac{q}{2\sqrt{-(p/3)^3}}$.

Если $Q \geqslant 0$ и $p > 0$, то $y_1 = -2\sqrt{p/3}\,\mathrm{ctg}\,2\alpha$, $y_{2,3} = \sqrt{p/3}\left(\mathrm{ctg}\,2\alpha \pm i\sqrt{3}\,\mathrm{cosec}\,2\alpha\right)$, где значения тригонометрических функций вычисляются по значению

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt[3]{\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}, \quad \mathrm{tg}\,\beta = \frac{2}{q}\sqrt{(p/3)^3}, \quad |\alpha| \leqslant \frac{\pi}{4}, \quad |\beta| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Если $Q \geqslant 0$ и $p < 0$, то $y_1 = -2\sqrt{-p/3}\,\mathrm{cosec}\,2\alpha$, $y_{2,3} = \sqrt{-p/3}\left(\mathrm{cosec}\,2\alpha \pm i\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,2\alpha\right)$, где значения тригонометрических функций вычисляются по значению

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt[3]{\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}, \quad \sin\beta = \frac{2}{q}\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}, \quad |\alpha| \leqslant \frac{\pi}{4}, \quad |\beta| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Во всех трех случаях берется действительное значение кубичного корня.

Корни полного кубичного уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ вычисляются по формулам $x_i = y_i - \dfrac{b}{3a}$ $(i = 1, 2, 3)$, где y_i — корни неполного кубичного уравнения.

2.5. Корни уравнения 4-й степени.

Уравнение четвертой степени $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ с действительными коэффициентами заменой $y = x + \dfrac{b}{4a}$ сводится к неполному уравнению $y^4 + py^2 + qy + r = 0$, корни которого вычисляются по формулам:

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}\right), \quad y_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}\right), \tag{1}$$

$$y_3 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}\right), \quad y_4 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}\right),$$

где z_1, z_2, z_3 — корни кубичного уравнения (*кубичной резольвенты*)

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)\,z - q^2 = 0,$$

и знаки перед корнями в формулах (1) выбираются так, чтобы выполнялось условие $\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3} = -q$.

2.6. Неравенства.

Простейшие неравенства:

$$|\,a + b\,| \leqslant |\,a\,| + |\,b\,|; \quad |\,a - b\,| \geqslant |\,|\,a\,| - |\,b\,|\,|; \quad a^2 + b^2 \geqslant 2\,|\,ab\,|;$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2, \quad (ab > 0); \qquad \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \quad (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0).$$

Некоторые общие неравенства:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\,a_i|;$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \quad a_i \geqslant 0 \quad (\textit{неравенство Коши});$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \quad (\textit{неравенство Коши – Буняковского});$$

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2};$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q} \quad (\textit{неравенство Гёльдера}), \quad \text{где } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

2.7. Комбинаторика и бином Ньютона.

Число перестановок из n элементов: $P_n = n!$.

Число размещений из n элементов по m элементов: $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Число сочетаний из n элементов по m элементов: $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Формулы для числа сочетаний:

$C_n^m = C_n^{n-m}$; $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$; $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

Число перестановок с повторениями (кортежами) состава (спецификации) $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$:

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_m!} \quad (n = k_1 + k_1 + \ldots + k_m). \qquad (1)$$

Число сочетаний из n элементов по m с повторениями: $\tilde{C}_n^m = C_{m+n-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^m$.

Рекуррентная формула для числа сочетаний с повторениями: $\tilde{C}_n^m = \tilde{C}_{n-1}^m + \tilde{C}_n^{m-1}$.

Формула *бинома Ньютона*:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_r=n} C_n(k_1, k_2, \ldots, k_r) a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_r^{k_r},$$

где суммирование проводится по всем наборам неотрицательных целых чисел $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$, для которых $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$. Коэффициенты $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_r)$, вычисляемые по формуле (1), называются *полиномиальными коэффициентами*. Формула для числа полиномиальных коэффициентов:

$$\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_r=n} C_n(k_1, k_2, \ldots, k_r) = r^n.$$

II. ГЕОМЕТРИЯ

1. Элементарная геометрия

1.1. Треугольники.

Площадь треугольника:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}\mathrm{ch}_c; \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\textit{формула Герона});$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma; \quad S = \frac{abc}{4R}; \quad S = pr;$$

$$S = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c); \quad S = \sqrt{r_a r_b r_c r}; \quad S = p^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2};$$

$$S = p(p-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = p(p-b)\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = p(p-c)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2},$$

где a, b, c — стороны треугольника, h_a, h_b, h_c — высоты, опущенные на стороны a, b, c, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр, R – радиус окружности, описанной около треугольника, r — радиус окружности, вписанной в треугольник, α, β, γ — углы, противолежащие сторонам a, b, c соответственно, r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей, касающихся сторон a, b, c.

Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha; \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma;$$

Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R.$

Теорема тангенсов: $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}} = \dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}};$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}}; \qquad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}.$$

Формулы Мольвейде:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}; \qquad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Линии в треугольнике.

Медиана m_a к стороне a: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Высота h_a, опущенная на сторону a: $h_a = \dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$.

Биссектриса l_a к стороне a: $l_a = \dfrac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b} = \dfrac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{a+c}$.

Р а в н о с т о р о н н и й т р е у г о л ь н и к (со стороной a).

Площадь: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Радиус описанной окружности: $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Радиус вписанной окружности: $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

П р я м о у г о л ь н ы й т р е у г о л ь н и к (с катетами a и b и гипотенузой c).

Площадь: $S = \dfrac{1}{2}ab$.

Радиус описанной окружности: $R = \dfrac{c}{2} = m_c$.

Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$.

Свойства прямоугольного треугольника:

$$a_c : a = a : c, \quad b_c : b = b : c, \quad b_c : h_c = h_c : a_c,$$

где a_c и b_c — проекции катетов a и b на гипотенузу c.

1.2. Четырехугольники.

П р я м о у г о л ь н и к и к в а д р а т .

Площадь прямоугольника (со сторонами a и b): $S = a \cdot b$.

Площадь квадрата (со стороной a): $S = a^2$.

Р о м б . Площадь: $S = a^2\sin\gamma = ah = \dfrac{1}{2}d_1d_2$, где a – сторона, γ – угол, h – высота, d_1 и d_2 – диагонали.

Связь между стороной и диагоналями: $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$.

Радиус вписанной окружности: $r = \dfrac{1}{2}h = \dfrac{1}{2}a\sin\gamma$.

П а р а л л е л о г р а м м . Площадь: $S = ab\sin\alpha = ah_a = bh_b = \dfrac{1}{2}d_1d_2\sin\beta$, где a и b — стороны, α — угол, h_a и h_b — высоты, опущенные на стороны a и b, β — угол между диагоналями d_1 и d_2.

Связь между стороной и диагоналями: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Т р а п е ц и я (с основаниями a, b и высотой h). Площадь: $S = \dfrac{a+b}{2}h$.

В ы п у к л ы й ч е т ы р е х у г о л ь н и к .

Площадь: $S = \dfrac{1}{2}d_1 d_2 \sin\gamma$, где d_1 и d_2 — диагонали, γ — угол между диагоналями.

Связь между сторонами и диагоналями: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4m^2$, где a, b, c, d — стороны, m — отрезок, соединяющий середины диагоналей.

Свойства четырехугольников:

В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон равны: $a + c = b + d$.

Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных углов равны: $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$.

Для вписанного четырехугольника справедливы формулы: $ac + bd = d_1 d_2$;

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}, \quad p = (a + b + c + d)/2.$$

1.3. Многоугольник.

Сумма внутренних углов n-угольника: $180°(n - 2)$.

Число диагоналей выпуклого n-угольника: $\frac{1}{2}n(n-3)$.

Сторона правильного n-угольника: $a_n = 2R\sin\frac{180°}{n} = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}$, где R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности.

Площадь правильного n-угольника:

$$S_n = \frac{1}{2}R^2 n\sin\frac{360°}{n} = r^2 n\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n} = \frac{1}{4}a_n^2\, n\,\mathrm{ctg}\frac{180°}{n}.$$

1.4. Окружность и круг.

Длина окружности: $L = 2\pi R$. Площадь круга: $S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$.

1.5. Сегмент и сектор.

В формулах обозначено: R — радиус, l — длина дуги, a — хорда, стягивающая дугу, α — центральный угол (в градусах) дуги.

Длина хорды: $a = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$.

Длина дуги: $l = \frac{2\pi R\alpha}{360°}$.

Площадь сектора: $S = \frac{\pi R^2\alpha}{360°}$.

Площадь сегмента: $S = \frac{1}{2}R^2\left[\frac{\pi\alpha}{180°} - \sin\alpha\right]$.

1.6. Призма.

Площадь боковой поверхности: $S_{БОК} = P_П L$,

где $P_П$ — периметр перпендикулярного сечения, L — длина бокового ребра.

Объем призмы: $V = S_П L = S_{ОСН} H$,

где $S_П$ — площадь перпендикулярного сечения, H — высота.

Объем прямоугольного параллелепипеда (со сторонами a, b, c): $V = abc$.

1.7. Пирамида.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды: $S = \frac{1}{2}Ph$, где P — периметр основания, h — апофема.

Объем пирамиды: $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}H$, где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания, H — высота.

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды: $S = \frac{1}{2}(P + p)h$, где P, p — периметры оснований, h — апофема.

Объем усеченной пирамиды: $V = \frac{1}{3}H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$, где H — высота усеченной пирамиды, S_1 и S_2 — площади оснований.

1.8. Правильные многогранники.

В формулах обозначено: a — ребро, V — объем, S — площадь боковой поверхности, R — радиус описанной сферы, r — радиус вписанной сферы, H — высота.

К у б . Все шесть граней — квадраты. Куб имеет восемь вершин и двенадцать ребер.

$$V = a^3; \qquad S = 6a^2; \qquad R = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \qquad r = \frac{a}{2}; \qquad H = a.$$

Т е т р а э д р . Все четыре грани — равносторонние треугольники. Тетраэдр имеет четыре вершины и шесть ребер.

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}; \qquad S = a^2\sqrt{3}; \qquad R = \frac{a\sqrt{6}}{4}; \qquad r = \frac{a\sqrt{6}}{12}; \qquad H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

О к т а э д р . Все восемь граней — равносторонние треугольники. Октаэдр имеет шесть вершин и двенадцать ребер.

Д о д е к а э д р . Все двенадцать граней — правильные пятиугольники. Додекаэдр имеет двадцать вершин и тридцать ребер.

$$V = \frac{a^3(15 + 7\sqrt{5})}{4}; \; S = 3a^2\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}; \; R = \frac{a\sqrt{3}(1 + \sqrt{5})}{4}; \; r = \frac{a\sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})}}{20}.$$

И к о с а э д р . Все двадцать граней — равносторонние треугольники. Икосаэдр имеет двенадцать вершин и тридцать ребер.

$$V = \frac{5a^3(3 + \sqrt{5})}{12}; \quad S = 5a^2\sqrt{3}; \quad R = \frac{a\sqrt{2(5 + \sqrt{5})}}{4}; \quad r = \frac{a\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})}{12}.$$

Ф о р м у л а Э й л е р а . Число ребер L, число вершин N и число граней F многогранников связаны равенством: $N - L + F = 2$.

1.9. Цилиндр.

Объем цилиндра (с радиусом основания R и высотой H): $V = \pi R^2 H$.

Площадь боковой и полной поверхностей цилиндра:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH; \quad S_{\text{цил}} = 2\pi RH + 2\pi R^2.$$

1.10. Конус.

Объем конуса (с радиусом основания R и высотой H): $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Площадь боковой поверхности конуса: $S_{\text{бок}} = \pi RL$, где L — образующая конуса.

Объем усеченного конуса: $V = \frac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2)$,

где H — высота, R_1 и R_2 —радиусы верхнего и нижнего оснований.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса: $S_{бок} = \pi(R_1 + R_2)L$,

где L — образующая конуса.

1.11. Сфера и шар.

Площадь сферы (радиуса R): $S = 4\pi R^2$.

Объем шара (радиуса R): $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

1.12. Части шара.

Объем шарового сегмента: $V = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H)$,

где R — радиус шара, H — высота сегмента.

Площадь сегментной поверхности: $S = 2\pi RH$.

Объем шарового сектора: $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$,

где R — радиус шара, H — высота сектора.

Площадь полной поверхности шарового сектора: $S = \pi R\left(2H + \sqrt{2RH - H^2}\right)$.

Объем шарового слоя: $V = \frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}\pi(R_1^2 + R_2^2)H$,

где H — высота шарового слоя, R_1 и R_2 — радиусы шарового слоя.

Площадь шарового пояса: $S = 2\pi RH$,

где R — радиус дуги, H — высота шарового пояса.

2. Аналитическая геометрия

2.1. Прямая на плоскости.

Общее уравнение прямой: $Ax + By + C = 0.$

Уравнение прямой в параметрической форме (t – параметр):

$$x = k_x t + x_0, \quad y = k_y t + y_0, \quad kx^2 + ky^2 \neq 0.$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k:

$y = kx + b, \quad k = \operatorname{tg}\alpha, \quad \alpha \in (0; \pi/2) \bigcup (\pi/2; \pi)$ — угол наклона прямой.

Уравнение прямой в отрезках: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1, \quad (a \neq 0,\ b \neq 0), \quad (a;\ 0)$ и $(0;\ b)$ — координаты точек пересечения прямой с осями Ox и Oy соответственно.

Нормальное уравнение прямой: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$ где p — расстояние от начала координат до прямой, α — угол между положительным направлением оси Ox и перпендикуляром к прямой, опущенным из начала координат. Коэффициенты нормального уравнения прямой связаны с коэффициентами общего уравнения равенствами:

$$\frac{\cos\alpha}{\lambda} = A, \quad \frac{\sin\alpha}{\lambda} = B, \quad \frac{-p}{\lambda} = C, \quad |\lambda| = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

где λ — нормирующий множитель уравнения. Знак λ противоположен знаку C.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $(x_1,\ y_1)$ и $(x_2,\ y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Расстояние d от точки (x_0, y_0) до прямой $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|\,Ax_0 + By_0 + C\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Необходимое и достаточное условие принадлежности трех точек $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$ одной прямой: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Координаты точки (x_0, y_0), делящей отрезок с концами $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ в отношении $\lambda \neq -1$: $x_0 = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_0 = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$

Координаты точки пересечения двух прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0,\ A_2x + B_2y + C_2 = 0$ определяется по *формулам Крамера*:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Необходимое и достаточное условие параллельности прямых: $A_1B_2 - A_2B_1 = 0.$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$

Координаты точки пересечения прямых $y = k_1x + b$, $y = k_2x + b$:

$$x_0 = \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}, \quad y_0 = \frac{k_1b_2 - b_1k_2}{k_1 - k_2}.$$

Необходимое и достаточное условие параллельности прямых: $k_1 = k_2$.

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых: $k_1k_2 = -1$.

Угол α между прямыми: $\sin\alpha = \dfrac{|A_1B_2 - A_2B_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$,

$$\cos\alpha = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|.$$

Угол α между прямыми $y = k_1x + b$, $y = k_2x + b$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right| \quad (k_1k_2 \neq -1). \quad \text{Если } k_1k_2 = -1, \text{ то } \alpha = \pi/2.$$

Уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения прямых $A_ix + B_iy + C_i = 0$ $(I = 1, 2)$: $\lambda_1(A_1x + B_1x + C_1) + \lambda_2(A_2x + B_2x + C_2) = 0$ $(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0)$.

Условие пересечения трех прямых $A_ix + B_iy + C_i = 0$ $(I = 1, 2, 3)$ в одной точке:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

2.2. Плоские линии второго порядка. Эллипс. Гипербола. Парабола.

Общее уравнение линии второго порядка в декартовой системе координат:

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0. \qquad (1)$$

Инварианты относительно переноса начала координат и поворота осей:

$$S = a_{11} + a_{22}; \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Характеристическая квадратичная форма уравнения (1): $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$. (2)

Характеристическое уравнение квадратичной формы (2): $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$.

Связь между корнями характеристического уравнения квадратичной формы и инвариантами: $S = \lambda_1 + \lambda_2$; $\delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2$.

Полуинвариант уравнения (1) (инвариант относительно поворота осей):

$$A = \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix}.$$

В зависимости от значений величин δ, Δ, S, A уравнение (1) определяет одну из следующих линий:

$$\delta > 0 \begin{cases} \Delta \neq 0 \begin{cases} S \cdot \Delta < 0 & \text{действительный эллипс;} \\ S \cdot \Delta > 0 & \text{мнимый эллипс;} \end{cases} \\ \Delta = 0 \quad \text{пара мнимых сопряженных пересекающихся прямых;} \end{cases}$$

$$\delta < 0 \begin{cases} \Delta \neq 0 & \text{гипербола;} \\ \Delta = 0 & \text{пара действительных пересекающихся прямых;} \end{cases}$$

$$\delta = 0 \begin{cases} \Delta \neq 0 & \text{парабола;} \\ \Delta = 0 \begin{cases} A > 0 & \text{пара мнимых параллельных прямых;} \\ A < 0 & \text{пара действительных параллельных прямых;} \\ A = 0 & \text{пара действительных совпадающих прямых.} \end{cases} \end{cases}$$

Ортогональным преобразованием координат

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + x_0, \qquad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + y_0$$

общее уравнение $F(x, y) = 0$ в невырожденном случае ($\Delta \neq 0$) приводится к канонической форме уравнений эллипса, гиперболы и параболы.

Э л л и п с . Каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_2\delta}, \quad b^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1\delta},$$

где λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$.

Уравнение в параметрической форме (t — параметр):

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad (t \in [0; 2\pi)).$$

Уравнение в полярных координатах r, φ: $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\varphi}$, где $p = b^2/a$ — фокальный параметр, $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ — эксцентриситет ($0 \le e < 1$), a — большая полуось.

Уравнение директрис эллипса в декартовой системе координат: $x = -a/e$, $x = a/e$.

О к р у ж н о с т ь . Уравнение окружности радиуса R,
с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = R^2$;
с центром в точке $(a; b)$: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$;
с центром в точке $(r_0; \varphi)$: $r^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + r_0^2 = R^2$;
с центром в полюсе полярной системы координат: $r = R$;

Г и п е р б о л а . Каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_2\delta}, \quad b^2 = \frac{\Delta}{\lambda_1\delta},$$

где λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$.

Уравнение в параметрической форме (t — параметр):

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = b \operatorname{sh} t, \quad (t \in (-\infty; +\infty)).$$

Уравнение в полярных координатах r, φ: $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\varphi}$, $p = b^2/a$ — фокальный параметр, $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a > 1$ — эксцентриситет.

Уравнение директрис гиперболы в декартовой системе координат: $x = -a/e$, $x = a/e$.

П а р а б о л а .

Каноническое уравнение: $y^2 = 2px, \quad p = \frac{1}{S}\sqrt{-\frac{\Delta}{S}}$ — фокальный параметр.

Уравнение параболы в полярных координатах: $r = \frac{p}{1+\cos\varphi}$.

2.3. Плоскость.

Общее уравнение плоскости в декартовой системе координат:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Уравнение в отрезках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (abc \neq 0)$;

$(a; 0; 0)$, $(0; b; 0)$, $(0; 0; c)$ — точки пересечения плоскости с осями Ox, Oy и Oz соответственно.

Нормальное уравнение: $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ — компоненты вектора единичной длины, перпендикулярного плоскости, p — расстояние от начала координат до плоскости.

Коэффициенты общего и нормального уравнений плоскости связаны равенствами:

$$\cos\alpha = \lambda A, \quad \cos\beta = \lambda B, \quad \cos\gamma = \lambda C, \quad p = -\lambda D, \quad |\lambda| = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

(знак λ противоположен знаку D).

Параметрическое уравнение плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) и содержащей неколлинеарные векторы $a = (a_1; a_2; a_3)$ и $b = (b_1; b_2; b_3)$ (u, v — параметры):

$$x = x_0 + a_1u + b_1v, \quad y = y_0 + a_2u + b_2u, \quad z = z_0 + a_3u + b_3v.$$

Компоненты векторов a и b связаны с коэффициентами A, B, C:

$$A = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $(x_i; y_i; z_i)$ $(i = 1, 2, 3)$, не лежащие на одной прямой:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку (x_0, y_0, z_0) и перпендикулярной вектору $\boldsymbol{n} = (A; B; C)$: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Необходимое и достаточное условие параллельности плоскостей $A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0$ $(i = 1, 2)$: $A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2$.

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Расстояние от точки $(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Расстояние между двумя параллельными плоскостями $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ и $Ax + By + Cz + D_2 = 0$:

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Угол φ между плоскостями $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$ $(i = 1, 2)$:

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

2.4. Прямые в пространстве.

Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух непараллельных плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$ (1)

Параметрическое уравнение прямой: $x = x_0 + r_x t, \quad y = y_0 + r_y t, \quad z = z_0 + r_z t,$ где $\boldsymbol{r} = (r_x, r_y, r_z)$ — *направляющий вектор прямой*, x_0, y_0, z_0 — координаты точки, принадлежащей прямой.

Компоненты направляющего вектора прямой связаны с коэффициентами системы (1) равенствами: $r_x = (B_1C_2 - B_2C_1), \; r_y = (C_1A_2 - C_2A_1), \; r_z = (A_1B_2 - A_2B_1).$

Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей направляющий вектор $\boldsymbol{r} = (r_x, r_y, r_z)$: $\dfrac{x - x_0}{r_x} = \dfrac{y - y_0}{r_y} = \dfrac{z - z_0}{r_z}.$

Угол φ между двумя прямыми, заданными каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_0}{r_x} = \frac{y - y_0}{r_y} = \frac{z - z_0}{r_z}, \quad \frac{x - x_0'}{r_x'} = \frac{y - y_0'}{r_y'} = \frac{z - z_0'}{r_z'}:$$

$$\cos\varphi = \frac{r_x'r_x + r_y'r_y + r_z'r_z}{\sqrt{(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)(r_x'^2 + r_y'^2 + r_z'^2)}}.$$

Условие перпендикулярности двух прямых, заданными каноническими уравнениями:

$$r_x'r_x + r_y'r_y + r_z'r_z = 0.$$

Условие параллельности двух прямых, заданных каноническими уравнениями:

$$\frac{r_x}{r_x'} = \frac{r_y}{r_y'} = \frac{r_z}{r_z'}.$$

Условие перпендикулярности прямой, заданной каноническим уравнением, и плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$: $\dfrac{A}{r_x} = \dfrac{B}{r_y} = \dfrac{C}{r_z}.$

Уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0; z_0)$ и перпендикулярной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$: $x - x_0 = \lambda A, \quad y - y_0 = \lambda B, \quad z - z_0 = \lambda C.$

Расстояние от точки $(x_1; y_1; z_1)$ до прямой, заданной каноническим уравнением:

$$d = \left[\frac{\begin{vmatrix} r_y & r_z \\ y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} r_z & r_x \\ z_0 - z_1 & x_0 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} r_x & r_y \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 \end{vmatrix}^2}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}\right]^{1/2}.$$

2.5. Поверхности второго порядка.

Общее уравнение поверхности второго порядка в декартовой системе координат:

$$F(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0. \qquad (1)$$

Инварианты поверхности второго порядка относительно параллельного переноса и поворота осей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix}; \qquad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$S = a_{11} + a_{22} + a_{33}; \quad J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{13} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}.$$

Характеристическая квадратичная форма уравнения (1):

$$\varphi(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2. \qquad (2)$$

Характеристическое уравнение квадратичной формы (2):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Связь между корнями $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения квадратичной формы и инвариантами: $S = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$; $J = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$; $\delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

Классификация поверхностей второго порядка.

I. $\delta \neq 0$:

	Условия $S \cdot \delta > 0, \quad J > 0$	
	выполнены	нарушены
$\Delta < 0$	эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	двуполостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
$\Delta > 0$	мнимый эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$	однополостной гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
$\Delta = 0$	мнимый конус с действительной вершиной: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	конус: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

I I. $\delta = 0$:

$\Delta < 0$: эллиптический параболоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm z$.

$\Delta > 0$: гиперболический параболоид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm z$.

$\Delta = 0$: цилиндры:

эллиптический при $J > 0$;

гиперболический при $J < 0$;

параболический при $J = 0$,

или пары плоскостей: действительных, мнимых, совпадающих.

3. Дифференциальная геометрия

3.1. Линии на плоскости.

Касательным вектором (или *вектором скорости*) к линии, задаваемой в параметрической форме $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \equiv (x(t);\ y(t))$, где t пробегает некоторый отрезок, называется вектор

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = (\dot{x}(t);\ \dot{y}(t)).$$

Вектором ускорения называется вектор $\boldsymbol{w}(t) = \dfrac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = \dfrac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2} = \big(\ddot{x}(t);\ \ddot{y}(t)\big)$.

Если в качестве параметра t выбрана длина линии l, то $|\boldsymbol{v}| = 1$; l называют *натуральным параметром* кривой.

Кривизной k линии $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(l)$ с натуральным параметром l называется модуль вектора ускорения: $k = |\boldsymbol{w}(l)|$.

Радиусом кривизны линии называется число $R = 1/k$.

Длина линии, задаваемой в параметрической форме $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \equiv (x(t);\ y(t))$, от точки $(x(t_1);\ y(t_1))$ до точки $(x(t_2);\ y(t_2))$: $l = \int\limits_{t_1}^{t_2} |\boldsymbol{v}(t)|\, dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$.

Уравнение касательной к линии $x = x(t)$, $y = y(t)$ в точке t_0:

$$y - y(t_0) = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}(x - x(t_0)).$$

Уравнение нормали к линии $x = x(t)$, $y = y(t)$ в точке t_0:

$$y - y(t_0) = -\frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)}(x - x(t_0)).$$

Единичный вектор нормали $\boldsymbol{n}$ к кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ с натуральным параметром l: $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{w}|} = \dfrac{1}{\sqrt{\ddot{x}^2(l) + \ddot{y}^2(l)}}(\ddot{x}(l);\ \ddot{y}(l))$.

Угол между двумя кривыми $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$ и $x = x_2(t)$, $y = y_2(t)$, пересекающимися при $t = t_0$: $\cos\varphi = \left.\dfrac{\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{y}_1\dot{y}_2}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2}\sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2}}\right|_{t=t_0}$.

Кривизна k линии $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0)$: $k = \dfrac{|\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$.

Координаты центра круга кривизны линии $x = x(t)$, $y = y(t)$ при $t = t_0$:

$$x_c = x(t_0) - \lambda\dot{y}(t_0), \qquad y_c = y(t_0) + \lambda\dot{x}(t_0), \qquad \text{где} \quad \lambda = \left.[(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})]\right|_{t=t_0}.$$

Формулы Френе: $\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dl} = \boldsymbol{w} = k\boldsymbol{n}$, $\dfrac{d\boldsymbol{n}}{dl} = -k\boldsymbol{v}$.

3.2. Линии в пространстве.

Касательным вектором (*вектором скорости*) линии, задаваемой в параметрической форме $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \equiv (x(t);\ y(t);\ z(t))$, называется вектор $\boldsymbol{v}(t) = \dfrac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = (\dot{x}(t);\ \dot{y}(t);\ \dot{z}(t))$.

Вектором ускорения называется вектор $\boldsymbol{w}(t) = \dfrac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = \dfrac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2} = \left(\ddot{x}(t);\ \ddot{y}(t);\ \ddot{z}(t)\right)$.

Если в качестве параметра t выбрана длина линии l, то $|\boldsymbol{v}| = 1$; l называют *натуральным параметром* кривой.

Кривизной k линии с натуральным параметром l называется модуль вектора ускорения: $k = |\boldsymbol{w}(l)|$.

Длина линии, задаваемой в параметрической форме $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \equiv (x(t);\ y(t);\ z(t))$, от точки $(x(t_1);\ y(t_1);\ z(t_1))$ до точки $(x(t_2);\ y(t_2);\ z(t_2))$:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} |\boldsymbol{v}(t)|\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt.$$

Единичный вектор главной нормали: $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{w}|}$.

Единичный вектор бинормали линии $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(l)$ (l — натуральный параметр): $\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}]$.

Кручение $\varkappa$ линии $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(l)$ (l — натуральный параметр): $\varkappa = \left| \dfrac{d\boldsymbol{b}}{dl} \right|$.

Кривизна линии $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ (t — произвольный параметр): $k = \dfrac{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3}$.

Кручение $\varkappa$ линии $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ (t — произвольный параметр): $\varkappa = -\dfrac{\langle \dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}, \dddot{\boldsymbol{r}} \rangle}{[\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{r}]^2}$.

Формулы Френе для линии $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(l)$ (l — натуральный параметр):

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dl} = k\boldsymbol{n}, \qquad \frac{d\boldsymbol{n}}{dl} = -\varkappa\boldsymbol{b} - k\boldsymbol{v}, \qquad \frac{d\boldsymbol{b}}{dl} = \varkappa\boldsymbol{n}.$$

3.3. Подвижный трехгранник Френе пространственной кривой.

Плоскость, определяемая векторами $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{v}(l)$, — соприкасающаяся плоскость; плоскость, определяемая векторами $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b}$, — нормальная плоскость; плоскость, определяемая векторами $\boldsymbol{v}(l)$ и $\boldsymbol{b}$, — спрямляющая плоскость.

Уравнения элементов подвижного трехгранника в точке $(x(l_0);\ y(l_0);\ z(l_0))$.

Уравнения касательной: $\dfrac{x - x(l_0)}{\dot{x}(l_0)} = \dfrac{y - y(l_0)}{\dot{y}(l_0)} = \dfrac{z - z(l_0)}{\dot{z}(l_0)}$.

Уравнение главной нормали: $\dfrac{x - x(l_0)}{\ddot{x}(l_0)} = \dfrac{y - y(l_0)}{\ddot{y}(l_0)} = \dfrac{z - z(l_0)}{\ddot{z}(l_0)}$.

Уравнение бинормали: $\dfrac{x - x(l_0)}{\begin{vmatrix} \dot{y}(l_0) & \dot{z}(l_0) \\ \ddot{y}(l_0) & \ddot{z}(l_0) \end{vmatrix}} = \dfrac{y - y(l_0)}{\begin{vmatrix} \dot{z}(l_0) & \dot{x}(l_0) \\ \ddot{z}(l_0) & \ddot{x}(l_0) \end{vmatrix}} = \dfrac{z - z(l_0)}{\begin{vmatrix} \dot{x}(l_0) & \dot{y}(l_0) \\ \ddot{x}(l_0) & \ddot{y}(l_0) \end{vmatrix}}$.

Уравнение соприкасающейся плоскости: $\begin{vmatrix} x - x(l_0) & y - y(l_0) & z - z(l_0) \\ \dot{x}(l_0) & \dot{y}(l_0) & \dot{z}(l_0) \\ \ddot{x}(l_0) & \ddot{y}(l_0) & \ddot{z}(l_0) \end{vmatrix} = 0.$

Уравнение нормальной плоскости: $\dot{x}(l_0)[x - x(l_0)] + \dot{y}(l_0)[y - y(l_0)] + \dot{z}(l_0)[z - z(l_0)] = 0.$

Уравнение спрямляющей плоскости: $\begin{vmatrix} x - x(l_0) & y - y(l_0) & z - z(l_0) \\ \dot{x}(l_0) & \dot{y}(l_0) & \dot{z}(l_0) \\ \begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}_{l=l_0} & \begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{vmatrix}_{l=l_0} & \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}_{l=l_0} \end{vmatrix} = 0.$

3.4. Поверхности в трехмерном пространстве.

Способы задания поверхности:

— явный — функцией $z = f(x, y)$;

— неявный — в виде уравнения $F(x, y, z) = 0$;

— параметрический — в векторном виде: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$,

в координатном виде: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, **(1)**

где u, v — гауссовы координаты поверхности.

Точка поверхности $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ называется *неособой*, если функции (1) имеют непрерывные частные производные и ранг матрицы $\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{Vmatrix}$ равен 2.

Уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной в параметрической форме, в неособой точке $(u_0; v_0)$:

$$\begin{vmatrix} x - x(u_0, v_0) & y - y(u_0, v_0) & z - z(u_0, v_0) \\ \dfrac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial u} & \dfrac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial u} & \dfrac{\partial z(u_0, v_0)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial v} & \dfrac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial v} & \dfrac{\partial z(u_0, v_0)}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение нормали к поверхности, заданной в параметрической форме, в неособой точке $(u_0; v_0)$:

$$\frac{x - x(u_0, v_0)}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial u} & \dfrac{\partial z(u_0, v_0)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial v} & \dfrac{\partial z(u_0, v_0)}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{y - y(u_0, v_0)}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial z(u_0, v_0)}{\partial u} & \dfrac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z(u_0, v_0)}{\partial v} & \dfrac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{z - z(u_0, v_0)}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial u} & \dfrac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial v} & \dfrac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial v} \end{vmatrix}}.$$

Дифференциал радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ вдоль параметрически заданной линии $u = u(t)$, $v = v(t)$, лежащей на поверхности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(u,\ v)$: $d\boldsymbol{r} = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} du + \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} dv$.

Квадрат дифференциала радиус-вектора: $dS^2 = (d\boldsymbol{r})^2 = E(du)^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ (*первая квадратичная форма* поверхности).

Коэффициенты $E,\ F,\ G$ первой квадратичной формы:

$$E = E(u,v) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = F(u,v) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = G(u,v) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Длина дуги линии $u = u(t)$, $v = v(t)$ на поверхности, заданной в параметрической форме (1):

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + 2F\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + G\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2}\, dt\,.$$

Площадь поверхности, заданной в параметрической форме:

$$S = \iint\limits_{\Sigma} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \iint\limits_{\Sigma} \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| du\, dv\,,$$

где Σ — область поверхности на плоскости $u,\ v$.

Площадь поверхности, заданной в явной форме $z = f\,(x,\ y)$:

$$S = \iint\limits_{\Sigma_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy\,,$$

где Σ_0 — проекция области Σ поверхности на плоскость $x,\ y$.

Единичный вектор нормали к поверхности, заданной в параметрической форме $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(u,\ v)$:

$$\boldsymbol{m}(u,v) = \frac{\left[\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right]}{\sqrt{EG - F^2}},$$

где $E,\ F,\ G$ — коэффициенты первой квадратичной формы.

Вторая квадратичная форма поверхности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(u,\ v)$:

$$-\,(d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{m}) = L\,(u,\ v)\,du^2 + 2M\,(u,\ v)\,du\,dv + N\,(u,\ v)\,dv^2,$$

где $L,\ M,$ и N — коэффициенты:

$$L(u,v) = \boldsymbol{m} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^2} = \frac{\left\langle \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^2}, \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}, \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right\rangle}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$M(u,v) = \boldsymbol{m} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u\, \partial v} = \frac{\left\langle \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u\, \partial v}, \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}, \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right\rangle}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$N(u,v) = \boldsymbol{m} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial v^2} = \frac{\left\langle \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial v^2}, \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}, \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right\rangle}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Нормальное сечение поверхности в точке $(u_0;\ v_0)$ — кривая пересечения поверхности с нормальной плоскостью (плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности в точке $(u_0;\ v_0)$).

Кривизна нормального сечения, проведенного в направлении du/dv:

$$k_N = \frac{L(du)^2 + 2M\, du\, dv + N(dv)^2}{E(du)^2 + 2F\, du\, dv + G(dv)^2}.$$

Теорема Менье. *Кривизна кривой γ, лежащей на поверхности, связана с кривизной нормального сечения формулой* $k = \left| \dfrac{k_N}{\cos\theta} \right|$, *где* θ *— угол между соприкасающейся плоскостью кривой* γ *и плоскостью нормального сечения.*

В каждой точке поверхности существуют два *главных нормальных сечения*, для которых k_N принимает наибольшее k_1 и наименьшее k_2 значения (*главные кривизны*), являющиеся корнями характеристического уравнения*) $\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0$.

Направления касательных к главным сечениям в данной точке называются главными направлениями (они взаимно ортогональны).

Формула Эйлера. Кривизна произвольного нормального сечения выражается через главные кривизны k_1, k_2 и угол φ между касательным вектором к нормальному сечению и первым главным направлением: $k_N = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi$.

Средняя кривизна поверхности: $H(u,v) \equiv \dfrac{k_1 + k_2}{2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}$.

Гауссова кривизна (полная кривизна) поверхности: $K(u,v) \equiv k_1 k_2 \equiv \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2}$.

Значения k_1, k_2, H, K не зависят от выбора криволинейных координат.

---

*) Кроме *омбилических точек*, в которых k_N одно и то же для всех нормальных сечений.

4. Векторы и векторные функции

4.1. Векторная алгебра.

Сложение векторов: $\boldsymbol{a} + 0 = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$.

Умножение вектора на число:

$$\lambda\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\cdot\lambda, \quad \lambda\cdot(\mu\cdot\boldsymbol{a}) = (\lambda\cdot\mu)\cdot\boldsymbol{a}, \quad \lambda\cdot(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\cdot\boldsymbol{a} + \lambda\cdot\boldsymbol{b}, \quad (\lambda + \mu)\cdot\boldsymbol{a} = \lambda\cdot\boldsymbol{a} + \mu\cdot\boldsymbol{a}.$$

Необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов $\boldsymbol{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1;\ b_2;\ b_3)$: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$

Необходимое и достаточное условие компланарности векторов $\boldsymbol{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1;\ b_2;\ b_3)$, $\boldsymbol{c} = (c_1;\ c_2;\ c_3)$: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

Скалярное произведение двух ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними: $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi$, $\varphi = (\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

Другие обозначения: $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{ab}$.

Свойства скалярного произведения: $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a})$, $((k\boldsymbol{a}),\ \boldsymbol{b}) = k\,(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{a},\ (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})) = (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})$, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2 \le (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})$ (неравенство Коши–Буняковского).

Скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1;\ b_2;\ b_3)$ в координатах:

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\ .$$

Угол между векторами $\boldsymbol{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1;\ b_2;\ b_3)$:

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Векторное произведение двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — вектор $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$:

1) модуль вектора $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$ равен $|a|\cdot|b|\cdot\sin\varphi$ $(\varphi = (\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}))$;

2) вектор $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$ перпендикулярен как $\boldsymbol{a}$, так и $\boldsymbol{b}$;

3) упорядоченная тройка векторов $(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b};\ [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}])$, отложенных от одной точки, образует правый базис.

Другие обозначения: $[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

Векторное произведение двух векторов $\boldsymbol{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1;\ b_2;\ b_3)$ в координатах:

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

Свойства векторного произведения: $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}]$, $[(\alpha\,\boldsymbol{a}),\ \boldsymbol{b}] = \alpha\,[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$ (α — число), $[(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}),\ \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{a},\ [\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]] = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$, $[[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}],\ \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$.

Смешанное (*скалярно-векторное*) *произведение* $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\rangle$ трех ненулевых некомпланарных векторов, заданных своими координатами относительно правого базиса $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$: $\boldsymbol{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$, $\boldsymbol{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$, $\boldsymbol{c} = (c_1;\ c_2;\ c_3)$ — число, абсолютная величина которого равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, исходящих из одной точки. Это

число положительно, если упорядоченная тройка $(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b};\ \boldsymbol{c})$ образует правый базис, и отрицательно, если левый*).

Смешанное произведение векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, заданных своими координатами:

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Свойства смешанного произведения:

$$<\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}> = ([a,\ b],\ c) = ([b,\ c],\ a) = (c,\ [a,\ b]) = -\ (b,\ [a,\ c]).$$

4.2. Некоторые формулы векторного анализа.

Градиент скалярной функции $f(\boldsymbol{r})$:

в декартовой системе координат xyz: $\operatorname{grad} f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}; \dfrac{\partial f}{\partial y}; \dfrac{\partial f}{\partial z} \right)$;

в сферических координатах r, θ, φ: $\operatorname{grad} f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial r};\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta};\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \right)$;

в цилиндрических координатах ρ, φ, z: $\operatorname{grad} f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial \rho};\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi};\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \right)$.

Дивергенция векторной функции $\boldsymbol{F}$:

в декартовой системе координат xyz: $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z}$;

в сферических координатах r, θ, φ:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r^*) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \cdot F_\theta^*) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi^*}{\partial \varphi},$$

где F_r^*, F_θ^*, F_φ^* — физические компоненты вектора $\boldsymbol{F}$;

в цилиндрических координатах ρ, φ, z: $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho^*) + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial F_\varphi^*}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial F_z^*}{\partial z}$, где F_ρ^*, F_φ^*, F_z^* — физические компоненты вектора $\boldsymbol{F}$ в сферических координатах ρ, φ, z.

Ротор векторной функции $\boldsymbol{F}$:

в декартовой системе координат xyz: $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$, или

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z};\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x};\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right);$$

---

*) В случае, когда базис $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$ — левый, смешанное произведение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ положительно, если тройка $(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b};\ \boldsymbol{c})$ образует левый базис, и отрицательно в противном случае.

в сферических координатах r, θ, φ: $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \left(\frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\varphi^* \sin\theta) - \frac{\partial F_\theta^*}{\partial\varphi} \right]; \right.$

$$\left. \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r^*}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rF_\varphi^*)}{\partial r} \right]; \quad \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\theta^*)}{\partial r} - \frac{\partial F_r^*}{\partial\theta} \right] \right);$$

в цилиндрических координатах ρ, φ, z:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \left(\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z^*}{\partial\varphi} - \frac{\partial F_\varphi^*}{\partial z} \right]; \left[\frac{\partial F_\rho^*}{\partial z} - \frac{\partial F_z^*}{\partial\rho} \right]; \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho F_\varphi^*)}{\partial\rho} - \frac{\partial F_\rho^*}{\partial\varphi} \right] \right).$$

Простейшие формулы вычисления градиента, дивергенции и ротора (C — постоянная, $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор):

$$\operatorname{grad} C = 0, \qquad \operatorname{grad}(Cf) = C \operatorname{grad} f,$$
$$\operatorname{grad}(f_1 + f_2) = \operatorname{grad} f_1 + \operatorname{grad} f_2,$$
$$\operatorname{grad}(f_1 f_2) = \operatorname{grad} f_1 + \operatorname{grad} f_2,$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{c} = 0, \qquad \operatorname{div} C\boldsymbol{F} = C \operatorname{div} \boldsymbol{F}, \qquad \operatorname{div}(\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2) = \operatorname{div} \boldsymbol{F}_1 + \operatorname{div} \boldsymbol{F}_2,$$
$$\operatorname{div}(f\boldsymbol{F}) = f \operatorname{div} \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \operatorname{grad} f,$$
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{c} = 0, \qquad \operatorname{rot} C\boldsymbol{F} = C \operatorname{rot} \boldsymbol{F},$$
$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2) = \operatorname{rot} \boldsymbol{F}_1 + \operatorname{rot} \boldsymbol{F}_2,$$
$$\operatorname{rot}(f\boldsymbol{F}) = f \operatorname{rot} \boldsymbol{F} + (\operatorname{grad} f) \times \boldsymbol{F}.$$

Оператор Лапласа от скалярной функции f: $\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f$.

Оператор Лапласа в декартовой системе координат xyz: $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$;

в сферических координатах r, θ, φ:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho^2}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial f}{\partial\theta};$$

в цилиндрических координатах ρ, φ, z: $\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Ковариантная производная от контравариантных компонент вектора $\boldsymbol{w} = w^k \boldsymbol{э}_k$ в произвольной системе криволинейных координат η^k с базисными векторами $\boldsymbol{э}_k$:

$$\nabla_i w^k = \frac{\partial w^k}{\partial\eta^i} + w^j \Gamma_{ji}^k.$$

Ковариантная производная от контравариантных компонент вектора $\boldsymbol{w} = w_k \boldsymbol{э}^k$:

$$\nabla_i w_k = \frac{\partial w_k}{\partial\eta^i} - w_j \Gamma_{ki}^j.$$

Основные обозначения: g_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ — компоненты метрического тензора;
в декартовой системе координат: $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$;
в сферических координатах: $g_{11} \equiv g_{rr} = 1$, $g_{22} \equiv g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{33} \equiv g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta$, $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$;
в цилиндрических координатах: $g_{11} \equiv g_{\rho\rho} = 1$, $g_{22} \equiv g_{\varphi\varphi} = \rho^2$, $g_{33} \equiv g_{zz} = 1$, $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Свойства ковариантной производной:

$$\nabla_i (c\, w^k) = c\, \nabla_i\, w^k;$$

$$\nabla_i (v^k + w^k) = \nabla_i\, v^k + \nabla_i\, w^k;$$

$$\nabla_i (v^j\, w^k) = w^k\, \nabla_i\, v^j + v^j\, \nabla_i\, w^k;$$

$$\nabla_i (g_{jk}) = 0;$$

$$\nabla_i\, w_j = g_{jk}\, \nabla_i\, w^k.$$

Формулы для вычисления *символов Кристоффеля* по компонентам метрического тензора:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\, g^{is} \left(\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial \eta^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial \eta^s} \right);$$

в ортогональной системе координат ($g_{ij} = 0$ при $i \neq j$):

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2}\, g^{ii}\, \frac{\partial g_{ii}}{\partial \eta^j}; \qquad \Gamma^i_{jj} = -\frac{1}{2}\, g^{ii}\, \frac{\partial g_{jj}}{\partial \eta^i};$$

$$\Gamma^i_{ii} = \frac{1}{2}\, g^{ii}\, \frac{\partial g_{ii}}{\partial \eta^i}; \qquad \Gamma^i_{jk} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad j \neq k, \quad i \neq k.$$

Формулы для символов Кристоффеля в цилиндрической и сферической системах координат:

Сферические координаты r, θ, φ:	Цилиндрические координаты ρ, φ, z:
$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r$; $\quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r \sin^2 \theta$; $\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta \cos\theta$; $\quad \Gamma^\theta_{r\theta} = \dfrac{1}{r}$; $\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \dfrac{1}{r}$; $\quad \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \operatorname{ctg}\theta$.	$\Gamma^\rho_{\varphi\varphi} = -\rho$; $\Gamma^\varphi_{\rho\varphi} = \dfrac{1}{\rho}$.

Символы, не приведенные в таблице, тождественно равны нулю.

Связь ковариантной производной с градиентом, дивергенцией и ротором:

для скалярной функции φ: $\quad \nabla_i\, \varphi = \operatorname{grad} \varphi$;

для векторной функции $\boldsymbol{w}$: $\quad \nabla_i\, w^i = \operatorname{div} \boldsymbol{w}$;

для векторной функции $\boldsymbol{w}$ ($\boldsymbol{u} = \operatorname{rot} \boldsymbol{w}$): $\quad u^\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{g}} (\nabla_\alpha\, w_\beta - \nabla_\beta\, w_\alpha)$, $\quad \alpha, \beta, \gamma$ образуют круговую перестановку из чисел 1, 2, 3; $\quad g = \det \| g_{ij} \|$.

III. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРОИЗВОДНЫЕ. ИНТЕГРАЛЫ.

1. Числовые последовательности

1.1. Основные определения.

Число a называют *пределом последовательности* $\{a_n\}$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N = N(\varepsilon)$, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*. Последовательность, не имеющая предела, называется *расходящейся*. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху* (*снизу*), если существует такое число M, что $a_n \leqslant M$ $(a_n \geqslant M)$ для всех n. Последовательность, ограниченная сверху и снизу, называется *ограниченной*. Последовательность $\{a_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если $a_{n+1} > a_n$ $(a_{n+1} < a_n)$ для всех n. Возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными*.

1.2. Основные свойства пределов последовательностей.

Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две сходящиеся последовательности, то

$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c\lim_{n\to\infty} x_n \quad (c \text{ – число});$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \quad \text{при} \quad \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n \quad \text{при} \quad x_n \leqslant y_n.$$

Если члены последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ удовлетворяют неравенствам $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Если члены последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ удовлетворяют неравенству $x_n \leqslant y_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $a \leqslant b$.

К р и т е р и й К о ш и . *Для существования предела последовательности* $\{x_n\}$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое число* $N_0 = N_0(\varepsilon)$, *что* $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$, *как только* $n > N_0$ *и* $p > 0$.

Т е о р е м а В е й е р ш т р а с с а . *Всякая монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.*

1.3. Пределы некоторых последовательностей.

Здесь $a > 0$, $b > 1$, $\alpha > 0$, p — натуральное число.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{b^n} = 0; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\log_b n}{n^\alpha} = 0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1; \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1; \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) = \ln a; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{1/n} = 1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{1/n} = 1; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1^p+3^p+\ldots+(2n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2^p}{p+1};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right) = \ln 2.$$

2. Производные и дифференциалы

2.1. Основные определения.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называют предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Если этот предел существует, то говорят, что $f(x)$ *дифференцируема* в точке x_0.

Производную функции $f(x)$ обозначают $f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0) = \left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$.

Если приращение $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ может быть представлено в виде

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

где $o(\Delta x)$ — бесконечно малая высшего порядка, то главная линейная часть этого приращения $A(x_0) \cdot \Delta x$ называется *дифференциалом* функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$$df(x_0) = A(x_0)\, dx \quad (dx \equiv \Delta x).$$

Для существования дифференциала функции $y = f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы существовала производная $f'(x_0)$, причем $df(x_0) = f'(x_0)\, dx$.

Частной производной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ по переменной x_k называют предел $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \dfrac{f(x_1^0, \ldots, x_k^0 + \Delta x_k, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\Delta x_k}$.

Если этот предел существует, то говорят, что функция f *дифференцируема* по x_k. Частную производную обозначают $\dfrac{\partial f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_k}$ или $f'_{x_k}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Если полное приращение может быть представлено в виде

$$\Delta f(x_1^0, \ldots, x_n^0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0) = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + o(\rho),$$

где $A_1, \ldots, A_n$ не зависят от Δx_i $(i = 1, \ldots, n)$ и $\rho = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (\Delta x_k)^2}$, то функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется дифференцируемой в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, и главная линейная часть приращения $A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n$, равная

$$f'_{x_1} dx_1 + \ldots + f'_{x_n} dx_n \qquad (dx_i \equiv \Delta x_i,\ i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

называется *полным дифференциалом* функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, который обозначается df. Слагаемые в (1) называются *частными дифференциалами* и обозначаются $d_{x_i} f$: $d_{x_i} f = f'_{x_i} dx_i \quad (i = 1, \ldots, n)$.

2.2. Основные свойства производных и дифференциалов.

Если $u(x) \equiv \text{const}$, то $u'(x) \equiv 0$, $du \equiv 0$.

Если $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые функции в точке x_0, то в этой точке:

$$(c \cdot u)' = c \cdot u' \quad (c = \text{const}); \qquad d(cu) = c \cdot du;$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'; \qquad d(u \pm v) = du \pm dv;$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \quad d(uv) = v\,du + u\,dv;$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u\,dv - v\,du}{v^2}.$$

Производная обратной функции. Если функция $y = f(x)$ непрерывна и монотонна в окрестности точки x_0 и существует производная $f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция $g(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и $g'(y) = 1/f'(x_0)$.

Производная сложной функции. Если функции $f(x)$ и $\varphi(t)$ дифференцируемы в точках x_0 и t_0 соответственно и $x_0 = \varphi(t_0)$, то сложная функция $f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке t_0 и $(f(\varphi(t)))'\big|_{t=t_0} = f'(x_0)\,\varphi(t_0) = \dfrac{d\,f(\varphi)}{d\varphi}\dfrac{d\varphi(t)}{dt}\Bigg|_{t=t_0}$.

Производная функции, заданной в параметрической форме. Если функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке t_0 и $x'(t_0) \neq 0$, то в точке $x_0 = x(t_0)$ $y'_x = \dfrac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)} = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}\Bigg|_{t=t_0}$.

2.3. Свойства производных и дифференциалов высшего порядка.

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные n-го порядка в точке x_0, то в этой точке

$$(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}; \qquad d^n(u + v) = d^n u + d^n v;$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, u^{(k)}\, v^{(n-k)}, \quad d^n(uv) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, d^k u\, d^{n-k} v \quad (\textit{формула Лейбница}).$$

Вторая производная обратной функции. Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0, непрерывна и монотонна в окрестности этой точки и $f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция $x = g(y)$ также дважды дифференцируема в точке и $g''(y_0) = -f''(x_0) / f'^3(x_0)$.

Вторая производная сложной функции. Если функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ дважды дифференцируемы в точках x_0 и t_0 соответственно и $x_0 = \varphi(t_0)$, то сложная функция $f(\varphi(t))$ дважды дифференцируема в точке t_0 и $(f(\varphi(t)))''\big|_{t=t_0} = f''(x_0)\,\varphi'^2(t_0) + f'(x_0)\,\varphi''(t_0)$.

Вторая производная функции, заданной в параметрической форме. Если функции $x(t)$ и $y(t)$ дважды дифференцируемы в точке t_0 и $x'(t_0) \neq 0$, то в точке $x_0 = x(t_0)$ $y''_{xx} = \dfrac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{x'^3_t}$.

Теорема Ферма. *Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, принимает в этой точке наибольшее или наименьшее значение и дифференцируема в точке x_0, то $f'(x_0) = 0$.*

Теорема Ролля. *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, имеет в каждой точке интервала (a, b) конечную производную и принимает равные значения на концах отрезка, то существует хотя бы одна такая точка $c \in (a, b)$, что $f'(c) = 0$.*

Теорема Лагранжа. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$ *и дифференцируема на* (a, b), *то в этом интервале существует по крайней мере одна такая точка* c, *что* $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Теорема Коши. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(y)$ *непрерывны на* $[a, b]$, *дифференцируемы на* (a, b) *и* $g'(x) \neq 0$ *для* $x \in (a, b)$, *то существует такая точка* $c \in (a, b)$, *что* $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

2.4. Производные от элементарных функций.

$$(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad (\alpha = \mathrm{const}); \qquad (x^x)' = x^x(\ln x + 1);$$

$$(\sin x)' = \cos x; \qquad (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad (\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}; \qquad (\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$(a^x)' = a^x \ln a; \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x; \qquad (\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x;$$

$$(\mathrm{th}\, x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}; \qquad (\mathrm{cth}\, x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}.$$

2.5. Частные производные и дифференциалы.

Производная сложной функции. Если функция $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, а функции $x_i = x_i(t_1, \ldots, t_m)$ имеют частные производные $\dfrac{\partial x_i}{\partial t_j}$ $(i = 1, \ldots, n;\ \ j = 1, \ldots, m)$, то сложная функция $y(x(t))$ имеет в точке t^0 частные производные $\dfrac{\partial y}{\partial t_j}$, которые вычисляются по формуле

$$\frac{\partial y}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_j}.$$

Инвариантность формы первого дифференциала. Если функция $y(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функции $x_i = x_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ дифференцируемы в точке t^0, то сложная функция $y(x(t)) = y(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ дифференцируема в точке t^0: $dy = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\, y(x(t^0))}{\partial t_j} dt_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\, y(x^0)}{\partial x_i} dx_i(t^0)$.

Частные производные функции, заданной в неявном виде. Если функция задана в неявном виде уравнением $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$, которое разрешимо относительно $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ в окрестности некоторой точки $(x_1^0; \ldots; x_n^0;\ y^0)$, и в окрестности этой точки существуют частные производные F'_{x_i}, F'_y, непрерывные в этой точке, и $F'_y \neq 0$, то в точке $(x_1^0; \ldots; x_n^0)$ существуют непрерывные частные производные f'_{x_i}, причем $f'_{x_i} = -F'_{x_i} / F'_y$.

Частные производные неявных функций, определяемых системой уравнений. Пусть функции $y_j = f_j(x_1, \ldots, x_n)$ $(j = 1, \ldots, n)$ заданы неявно системой уравнений $F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, которая в некоторой окрестности точки $(x_1^0; \ldots; x_n^0;\ y_1^0; \ldots; y_m^0)$ имеет единственное решение. Тогда частные производные $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ находятся как решение системы

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Дифференциалы высших порядков функции двух переменных. Дифференциал n-го порядка от функции двух переменных $f(x, y)$:

$$d^n f(x, y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial f(x, y)}{\partial x^{n-k} \partial y^k} dx^{n-k}\, d^k y,$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты.

3. Первообразная и неопределенный интеграл

3.1. Основные определения.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на промежутке X*), если функция непрерывна на X и $F'(x) = f(x)$ во всех внутренних точках.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке X называют, и обозначают $\int f(x)\,dx$, множество всех первообразных: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ ($C = \text{const}$).

3.2. Свойства неопределенного интеграла.

Если функция $f(x)$ имеет первообразную на промежутке X, то для внутренних точек промежутка $\dfrac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке X и дифференцируема в его внутренних точках, то $\int df(x) = f(x) + C$.

Если функция $f(x)$ имеет первообразную на промежутке X, а k — число, то для функции $kf(x)$ существует первообразная и $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют первообразную на промежутке X, то функция $f(x) + g(x)$ также имеет первообразную и $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

Интегрирование по частям. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на промежутке X, дифференцируемы в его внутренних точках и существует интеграл $\int g(x)\,df(x)$, то на X существует и интеграл $\int f(x)\,dg(x)$ и

$$\int f(x)\,dg(x) = f(x)\,g(x) - \int g(x)\,df(x).$$

Интегрирование подстановкой (замена переменной). Если функция $f(z)$ определена и имеет первообразную на промежутке Z, а функция $z = g(x)$ непрерывна на промежутке X, дифференцируема в его внутренних точках и $g(X) \subset Z$, то функция $f(g(x)) \cdot g'(x)$ имеет первообразную на X и

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(z)\,dz.$$

3.3. Некоторые неопределенные интегралы от элементарных функций.

$\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$; постоянную C далее везде опускаем;

$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a}$; $\qquad \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| \quad (x \neq 0)$

$\int \sin x\,dx = -\cos x$; $\qquad \int \cos x\,dx = \sin x$;

$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x|$; $\qquad \int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x|$;

$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x$; $\qquad \int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x$;

---

*) Конечном или бесконечном

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x; \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x; \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \quad (a \neq 0); \qquad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \quad (a \neq 0);$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} \quad (|x| < a); \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \quad (a \neq 0);$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|; \qquad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|;$$

$$\int \operatorname{th} x \, dx = \ln \operatorname{ch} x; \qquad \int \operatorname{cth} x \, dx = \ln |\operatorname{sh} x|;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right|; \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2 \operatorname{arctg} e^x.$$

4. Некоторые неопределенные интегралы

4.1. Интегралы от рациональных функций.

Интегралы, содержащие $X = ax + b$.

$$\int X^n\,dx = \frac{1}{a\,(n+1)}\,X^{n+1} \qquad (n \neq -1);$$

$$\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{a}\ln|X|;$$

$$\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|X|;$$

$$\int \frac{x\,dx}{X^2} = \frac{b}{a^2 X} + \frac{1}{a^2}\ln|X|;$$

$$\int \frac{x\,dx}{X^n} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{-1}{(n-2)X^{n-2}} + \frac{b}{(n-1)X^{n-1}}\right) \qquad (n \neq 1, 2);$$

$$\int \frac{x^2 dx}{X} = \frac{1}{a^3}\left(\frac{X^2}{2} - 2bX + b^2\ln|X|\right);$$

$$\int \frac{x^2 dx}{X^2} = \frac{1}{a^3}\left(X - 2b\ln|X| - \frac{b^2}{X}\right);$$

$$\int \frac{x^2 dx}{X^3} = \frac{1}{a^3}\left(\ln|X| + \frac{2b}{X} - \frac{b^2}{2X^2}\right);$$

$$\int \frac{x^2 dx}{X^n} = \frac{1}{a^3}\left(\frac{-1}{(n-3)X^{n-3}} + \frac{2b}{(n-2)X^{n-2}} - \frac{b^2}{(n-1)X^{n-1}}\right) \qquad (n \neq 1, 2, 3);$$

$$\int \frac{dx}{xX} = -\frac{1}{b}\ln\left|\frac{X}{x}\right|;$$

$$\int \frac{dx}{xX^2} = -\frac{1}{b^2}\left(\ln\left|\frac{X}{x}\right| + \frac{ax}{X}\right);$$

$$\int \frac{dx}{xX^n} = -\frac{1}{b^n}\left[\ln\left|\frac{X}{x}\right| - \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i}\,\frac{(-a)^i x^i}{iX^i}\right] \qquad (n \geqslant 1);$$

$$\int \frac{dx}{x^2 X} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2}\ln\left|\frac{X}{x}\right|;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 X^2} = -a\left[\frac{1}{b^2 X} + \frac{1}{ab^2 x} - \frac{2}{b^3}\ln\left|\frac{X}{x}\right|\right];$$

$$\int \frac{dx}{x^2 X^n} = -\frac{1}{b^{n+1}}\left[\sum_{i=2}^{n} C_n^i\,\frac{(-a)^{i-1}x^{i-1}}{(i-1)X^{i-1}} + \frac{X}{x} - na\ln\left|\frac{X}{x}\right|\right] \qquad (n \geqslant 2);$$

$$\int \frac{dx}{x^m X^n} = -\frac{1}{b^{m+n-1}} \sum_{i=0}^{m+n-2} C_{m+n-2}^{i} \frac{X^{m-i-1}(-a)^i}{(m-i-1)x^{m-i-1}};$$

если $m - i - 1 = 0$, то соответствующий член под знаком суммы заменяется членом $C_{m+n-2}^{m-1}(-a)^{m-1} \ln\left|\frac{X}{x}\right|$.

Интегралы, содержащие $X = ax^2 + bx + c$ $(\Delta = 4ac - b^2)$.

$$\int \frac{dx}{X} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} & (\text{для } \Delta > 0), \\ -\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{-\Delta}}{2ax+b+\sqrt{-\Delta}}\right| & (\text{для } \Delta < 0); \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{X^n} = \frac{2ax+b}{(n-1)\Delta X^{n-1}} + \frac{(2n-3)2a}{(n-1)\Delta} \int \frac{dx}{X^{n-1}};$$

$$\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2a} \ln|X| - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X};$$

$$\int \frac{x\,dx}{X^n} = -\frac{bx+2c}{(n-1)\Delta X^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{(n-1)\Delta} \int \frac{dx}{X^{n-1}};$$

$$\int \frac{x^2 dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2} \ln|X| + \frac{b^2 - 2ac}{2a^2} \int \frac{dx}{X};$$

$$\int \frac{x^2 dx}{X^n} = \frac{-x}{(2n-3)\,aX^{n-1}} + \frac{c}{(2n-3)a} \int \frac{dx}{X^n} - \frac{(n-2)b}{(2n-3)a} \int \frac{x\,dx}{X^n};$$

$$\int \frac{x^m dx}{X^n} = -\frac{x^{m-1}}{(2n-m-1)\,aX^{n-1}} + \frac{(m-1)\,c}{(2n-m-1)\,a} \int \frac{x^{m-2}dx}{X^n} - \frac{(n-m)b}{(2n-m-1)\,a} \int \frac{x^{m-1}dx}{X^n} \quad (m \neq 2n-1);$$

$$\int \frac{x^{2n-1}dx}{X^n} = \frac{1}{a} \int \frac{x^{2n-3}dx}{X^{n-1}} - \frac{c}{a} \int \frac{x^{2n-3}dx}{X^n} - \frac{b}{a} \int \frac{x^{2n-2}dx}{X^n};$$

$$\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2c} \ln\left|\frac{x^2}{X}\right| - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X};$$

$$\int \frac{dx}{xX^n} = \frac{1}{2c(n-1)X^{n-1}} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X^n} + \frac{1}{c} \int \frac{dx}{xX^{n-1}};$$

$$\int \frac{dx}{x^2 X} = \frac{b}{2c^2} \ln\left|\frac{X}{x^2}\right| - \frac{1}{cx} + \left(\frac{b^2}{2c^2} - \frac{a}{c}\right) \int \frac{dx}{X};$$

$$\int \frac{dx}{x^m X^n} = -\frac{1}{(m-1)\,cx^{m-1}X^{n-1}} - \frac{(2n+m-3)\,a}{(m-1)\,c} \int \frac{dx}{x^{m-2}X^n} - \frac{(n+m-2)\,b}{(m-1)\,c} \int \frac{dx}{x^{m-1}X^n} \quad (m > 1);$$

Интегралы, содержащие $X = a^2 \pm x^2$.

Через Y обозначено $\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ для знака плюс, $\operatorname{arth}\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$ для знака минус при $|x| < a$, $\operatorname{arth}\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{a+x}{x-a}\right|$ для знака минус при $|x| > a$. В случае двойного знака в формуле верхний знак относится к $X = a^2 + x^2$, нижний знак — к $X = a^2 - x^2$.

$$\int\frac{dx}{X} = \frac{1}{a}Y;$$

$$\int\frac{dx}{X^{n+1}}\frac{x}{2na^2X^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int\frac{dx}{X^n};$$

$$\int\frac{x\,dx}{X} = \pm\frac{1}{2}\ln|X|;$$

$$\int\frac{x\,dx}{X^{n+1}} = \mp\frac{1}{2nX^n} \qquad (n \neq 0);$$

$$\int\frac{x^2dx}{X} = \pm x \mp aY;$$

$$\int\frac{x^2dx}{X^{n+1}} = \mp\frac{x}{2nX^n} \pm \frac{1}{2n}\int\frac{dx}{X^n} \qquad (n \neq 0);$$

$$\int\frac{x^3dx}{X} = \pm\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\ln|X|;$$

$$\int\frac{x^3dx}{X^2} = \frac{a^2}{2X} + \frac{1}{2}\ln|X|;$$

$$\int\frac{x^3dx}{X^{n+1}} = -\frac{1}{2(n-1)X^{n-1}} + \frac{a^2}{2nX^n} \qquad (n > 1).$$

Интегралы, содержащие $X = a^3 \pm x^3$. В случае двойного знака в формуле верхний знак относится к $X = a^3 + x^3$, нижний знак — к $X = a^3 - x^3$.

$$\int\frac{dx}{X} = \pm\frac{1}{6a^2}\ln\frac{(a \pm x)^2}{\left|a^2 \mp ax + x^2\right|} + \frac{1}{a^2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x \mp a}{a\sqrt{3}};$$

$$\int\frac{dx}{X^2} = \frac{x}{3a^3X} + \frac{3}{3a^3}\int\frac{dx}{X};$$

$$\int\frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{6a}\ln\frac{\left|a^2 \mp ax + x^2\right|}{(a \pm x)^2} \pm \frac{1}{a\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x \mp a}{a\sqrt{3}};$$

$$\int\frac{x\,dx}{X^2} = \frac{x^2}{3a^2X} + \frac{1}{3a^2}\int\frac{x\,dx}{X};$$

$$\int\frac{x^2dx}{X} = \pm\frac{1}{3}\ln|X|;$$

$$\int \frac{x^2 dx}{X^2} = \mp \frac{1}{3X};$$

$$\int \frac{x^3 dx}{X} = \pm x \mp a^3 \int \frac{dx}{X};$$

$$\int \frac{x^3 dx}{X^2} = \mp \frac{x}{3X} \pm \frac{1}{3} \int \frac{dx}{X}.$$

Интегралы, содержащие $X = a^4 + x^4$.

$$\int \frac{dx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{4a^3\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x^2 + ax\sqrt{2} + a^2}{x^2 - ax\sqrt{2} + a^2}\right| + \frac{1}{2a^3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{ax\sqrt{2}}{a^2 - x^2};$$

$$\int \frac{x\,dx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{2a^2} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{a^2};$$

$$\int \frac{x^2 dx}{a^4 + x^4} = -\frac{1}{4a\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x^2 + ax\sqrt{2} + a^2}{x^2 - ax\sqrt{2} + a^2}\right| + \frac{1}{2a\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{ax\sqrt{2}}{a^2 - x^2};$$

$$\int \frac{x^3 dx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{4} \ln(a^4 + x^4).$$

Интегралы, содержащие $X = a^4 - x^4$.

$$\int \frac{dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a^3} \ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a};$$

$$\int \frac{x\,dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a^3} \ln\left|\frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}\right|;$$

$$\int \frac{x^2 dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a} \ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| - \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a};$$

$$\int \frac{x^3 dx}{a^4 - x^4} = -\frac{1}{4} \ln\left|a^4 - x^4\right|.$$

4.2. Интегралы от иррациональных функций.

Интегралы вида $\int \frac{x^{\pm n + 1/2} dx}{(a \pm bx)^m}$ (при $a > 0$, $b > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $m = 1, 2, 3, \ldots$).

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{a + bx} = \frac{2\sqrt{x}}{b} - \frac{2\sqrt{a}}{b\sqrt{b}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{bx}{a}};$$

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{a - bx} = -\frac{2\sqrt{x}}{b} + \frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{b}} \ln\left|\frac{\sqrt{a} + \sqrt{bx}}{\sqrt{a} - \sqrt{bx}}\right|;$$

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{(a \pm bx)^m} = \frac{\pm x\sqrt{x}}{(m-1)\,a(a \pm bx)^{m-1}} + \frac{2m - 5}{2a(m-1)} \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{(a \pm bx)^{m-1}} \qquad (m \geqslant 2);$$

$$\int \frac{x\sqrt{x}\,dx}{a+bx} = -\frac{6a\sqrt{x}-2bx\sqrt{x}}{3b^2} + \frac{2a^2}{b^2\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{bx}{a}};$$

$$\int \frac{x\sqrt{x}\,dx}{a-bx} = -\frac{6a\sqrt{x}+2bx\sqrt{x}}{3b^2} + \frac{a\sqrt{a}}{b^2\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{a}+\sqrt{bx}}{\sqrt{a}-\sqrt{bx}}\right|;$$

$$\int \frac{x\sqrt{x}\,dx}{(a\pm bx)^m} = \pm\frac{x\sqrt{x}}{(m-1)(a\pm bx)^{m-1}} \mp \frac{3}{2b(m-1)}\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{(a\pm bx)^{m-1}} \qquad (m \geqslant 2);$$

$$\int \frac{x^n\sqrt{x}\,dx}{a\pm bx} = 2\sqrt{x}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k a^k x^{n-k}}{(2n-2k+1)(\pm b)^{k+1}} + \frac{a^{n+1}}{(\mp b)^{n+1}}\int\frac{dx}{\sqrt{x}(a\pm bx)} \qquad (n \geqslant 2);$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(a+bx)} = \frac{2}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{bx}{a}};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(a-bx)} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{a}+\sqrt{bx}}{\sqrt{a}-\sqrt{bx}}\right|;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(a+bx)^2} = \frac{\sqrt{x}}{a(a+bx)} + \frac{1}{a\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{bx}{a}};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(a-bx)^2} = \frac{\sqrt{x}}{a(a-bx)} + \frac{1}{2a\sqrt{ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{a}+\sqrt{bx}}{\sqrt{a}-\sqrt{bx}}\right|;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(a\pm bx)^m} = \frac{2\sqrt{x}}{a(a\pm bx)^{m-1}} \pm \frac{(2m-3)\,b}{a}\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{(a\pm bx)^m}.$$

Интегралы вида $\int \frac{x^{\pm n}dx}{\sqrt{(a+bx)^m}}$ (при $n = 0, 1, 2, \ldots$; $m = 1, 3, 5, \ldots$).

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx};$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(a+bx)^m}} = \frac{2}{b^2\sqrt{(a+bx)^{m-2}}}\left(\frac{a+bx}{m-4} + \frac{a}{m-2}\right);$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a+bx)^m}} = \frac{2}{b^3\sqrt{(a+bx)^{m-2}}}\left(-\frac{(a+bx)^2}{m-6} + \frac{2a(a+bx)}{m-4} - \frac{a^2}{m-2}\right);$$

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(a+bx)^m}} = \frac{2}{b^4\sqrt{(a+bx)^{m-2}}}\left[-\frac{(a+bx)^3}{m-8} + \frac{3a(a+bx)^2}{m-6} - \frac{3a^2(a+bx)}{m-4} + \frac{a^3}{m-2}\right];$$

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{(a+bx)^m}} = \frac{2}{b^{n+1}\sqrt{(a+bx)^{m-2}}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k (a+bx)^{n-k}a^k}{2n-2k-m+2};$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\dfrac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right| & (a>0), \\ \dfrac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{-a}} & (a<0); \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(a+bx)^m}} = \frac{2}{(m-2)\,a\sqrt{(a+bx)^{m-2}}} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x\sqrt{(a+bx)^{m-2}}} \qquad (m \geqslant 3);$$

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{a+bx}} = -\frac{\sqrt{a+bx}}{(n-1)\,ax^{n-1}} - \frac{(2n-3)\,b}{2(n-1)\,a}\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{a+bx}} \qquad (n \geqslant 2);$$

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{(a+bx)^m}} = -\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}\sqrt{(a+bx)^m}} - \frac{mb}{2(n-1)}\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{(a+bx)^{m+2}}} \qquad (n \geqslant 2);$$

$$= \frac{-2}{(m-2)\,bx^n\sqrt{(a+bx)^{m-2}}} - \frac{2n}{(m-2)\,b}\int \frac{dx}{x^{n+1}\sqrt{(a+bx)^{m-2}}} \qquad (m \geqslant 3).$$

Интегралы вида $\int x^{\pm n}\sqrt{(a+bx)^m}\,dx$ (при $n = 0, 1, 2, \ldots$; $m = 1, 3, 5, \ldots$).

$$\int \sqrt{(a+bx)^m}\,dx = \frac{2\sqrt{(a+bx)^{m+2}}}{(m+2)\,b};$$

$$\int x\sqrt{(a+bx)^m}\,dx = \frac{2}{b^2}\left[\frac{\sqrt{(a+bx)^{m+4}}}{m+4} - \frac{a\sqrt{(a+bx)^{m+2}}}{m+2}\right];$$

$$\int x^2\sqrt{(a+bx)^m}\,dx = \frac{2}{b^3}\left[\frac{\sqrt{(a+bx)^{m+6}}}{m+6} - \frac{2a\sqrt{(a+bx)^{m+4}}}{m+4} + \frac{a^2\sqrt{(a+bx)^{m+2}}}{m+2}\right];$$

$$\int x^n\sqrt{(a+bx)^m}\,dx = \frac{2\sqrt{(a+bx)^{m+2}}}{b^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k (a+bx)^{n-k} a^k}{2n-2k+m+2};$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x}\,dx = \begin{cases} 2\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}\ln\left|\dfrac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right| & (a>0), \\ 2\sqrt{a+bx} + \dfrac{2a}{\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{-a}} & (a<0); \end{cases}$$

$$\int \frac{\sqrt{(a+bx)^m}}{x}\,dx = \frac{2(a+bx)^{m/2}}{m} + a\int \frac{(a+bx)^{m/2-1}}{x}\,dx;$$

$$\int \frac{\sqrt{(a+bx)^m}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{(a+bx)^{m+2}}}{2ax^2} + \frac{mb}{2a}\int \frac{\sqrt{(a+bx)^m}}{x}\,dx;$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x^n}\,dx = -\frac{\sqrt{(a+bx)^3}}{(n-1)\,ax^{n-1}} + \frac{(5-2n)\,b}{2a(n-1)}\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x^{n-1}}\,dx \qquad (n \geqslant 2);$$

$$\int \frac{\sqrt{(a+bx)^m}}{x^n}\,dx = -\frac{\sqrt{(a+bx)^{m+2}}}{(n-1)\,ax^{n-1}} + \frac{b(m-2n+4)}{2a(n-1)}\int \frac{\sqrt{(a+bx)^m}}{x^{n-1}}\,dx \qquad (n \geqslant 2);$$

Интегралы вида $\int x^{\pm n}\sqrt{(a+bx)^{\pm n}(c+fx)^{\pm m}}\,dx$ $(\Delta = af - bc \neq 0,\ n = 1, 3, 5, \ldots;$ $m = 1, 3, 5, \ldots)$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)(c+fx)}} = \begin{cases} \dfrac{-1}{\sqrt{-bf}}\arcsin\dfrac{2bfx+af+bc}{\Delta} & (bf<0), \\ \dfrac{2}{\sqrt{bf}}\ln\left|\sqrt{bf(a+bx)}+b\sqrt{c+fx}\right| & (bf>0), \\ \dfrac{2}{\sqrt{-bf}}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{-f(a+bx)}{b(c+fx)}} & (b>0,\ f<0); \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)(c+fx)^m}} = -\frac{2}{\Delta(m-2)}\left[\sqrt{\frac{a+bx}{(c+fx)^{m-2}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{b(m-3)}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)(c+fx)^{m-2}}}\right] \qquad (m \geqslant 3);$$

$$\int \sqrt{\frac{a+bx}{c+fx}}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{(a+bx)(c+fx)}}{f} + \dfrac{\Delta}{2f\sqrt{-bf}}\arcsin\dfrac{2bfx+af+bc}{\Delta} & (bf<0), \\ \dfrac{\sqrt{(a+bx)(c+fx)}}{f} - \dfrac{\Delta}{f\sqrt{bf}}\ln\left|\sqrt{bf(a+bx)}+b\sqrt{c+fx}\right| & (bf>0); \end{cases}$$

$$\int \sqrt{\frac{(a+bx)^n}{c+fx}}\,dx = \frac{2\sqrt{(a+bx)^n(c+fx)}}{(n+1)f} - \frac{n\Delta}{(n+1)f}\int \sqrt{\frac{(a+bx)^{n-2}}{c+fx}}\,dx;$$

$$\int \sqrt{\frac{a+bx}{(c+fx)^m}}\,dx = -\frac{2}{f(m-2)}\sqrt{\frac{a+bx}{(c+fx)^{m-2}}} + \frac{b}{f(m-2)}\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)(c+fx)^{m-2}}} \quad (m \geqslant 3);$$

$$\int \sqrt{(a+bx)^n(c+fx)}\,dx = \frac{2\sqrt{(a+bx)^{n+2}(c+fx)}}{b(n+3)} + \frac{\Delta}{b(n+3)}\int \sqrt{\frac{(a+bx)^n}{c+fx}}\,dx.$$

Интегралы вида $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(a^2+b^2x^2)^m}}$ $(a>0,\ b>0,\ n = 0, 1, 2, \ldots;\ m = 1, 3, 5, \ldots)$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}} = \frac{1}{b}\ln\left|bx + \sqrt{(a^2+b^2x^2)^m}\right|;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+b^2x^2)^m}} = \frac{1}{a^{m-1}}\sum_{k=0}^{(m-3)/2} \frac{(-1)^k C_{(m-3)/2}^k\, b^{2k}x^{2k+1}}{(2k+1)\sqrt{(a^2+b^2x^2)^{2k+1}}} \qquad (m \geqslant 3);$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}} = \frac{1}{b^2}\sqrt{a^2+b^2x^2}\,;$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2+b^2x^2)^m}} = -\frac{1}{(m-2)\,b^2\sqrt{(a^2+b^2x^2)^{m-2}}} \qquad (m \geqslant 3)\,;$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}} = \frac{x\sqrt{a^2+b^2x^2}}{2b^2} - \frac{a^2}{2b^3}\ln\left|bx+\sqrt{a^2+b^2x^2}\right|;$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2+b^2x^2)^3}} = -\frac{x}{b^2\sqrt{a^2+b^2x^2}} + \frac{1}{b^3}\ln\left|bx+\sqrt{a^2+b^2x^2}\right|.$$

Интегралы вида $\int \frac{dx}{x^n\sqrt{(a^2+b^2x^2)^m}}$ $(a>0,\ b>0,\ n=1,2,3,\ldots;\ m=1,3,5,\ldots)$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+b^2x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+b^2x^2}}{bx}\right|;$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(a^2+b^2x^2)^m}} = \sum_{k=1}^{(m-1)/2} \frac{1}{(m-2k)\,a^{2k}\sqrt{(a^2+b^2x^2)^{m-2k}}} - \\ -\frac{1}{a^m}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+b^2x^2}}{bx}\right| \qquad (m \geqslant 3);$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+b^2x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a^2x};$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(a^2+b^2x^2)^m}} = \frac{1}{a^{m+1}}\sum_{k=0}^{(m-1)/2} \frac{(-1)^k C^k_{(m-1)/2}\,b^{2k}x^{2k-1}}{(2k-1)\sqrt{(a^2+b^2x^2)^{2k-1}}};$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a^2+b^2x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{2a^2x^2} + \frac{b^2}{2a^3}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+b^2x^2}}{bx}\right|;$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{(a^2+b^2x^2)^m}} = -\frac{1}{(m-2)b^2x^4\sqrt{(a^2+b^2x^2)^{m-2}}} - \\ -\frac{4}{(m-2)\,b^2}\int \frac{dx}{x^5\sqrt{(a^2+b^2x^2)^{m-2}}} \qquad (m \geqslant 3);$$

Интегралы вида $\int x^{\pm n}\sqrt{(a^2+b^2x^2)^m}\,dx$ $(a>0,\ b>0,\ n=0,1,2,\ldots;\ m=1,3,5,\ldots)$.

$$\int \sqrt{a^2+b^2x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2+b^2x^2}}{2} + \frac{a^2}{2b}\ln\left|bx+\sqrt{a^2+b^2x^2}\right|;$$

$$\int \sqrt{(a^2+b^2x^2)^m}\,dx = \frac{x}{m+1}\sqrt{(a^2+b^2x^2)^m} + \frac{ma^2}{m+1}\int \sqrt{(a^2+b^2x^2)^{m-2}}\,dx;$$

$$\int x\sqrt{(a^2+b^2x^2)^m}\,dx = \frac{\sqrt{(a^2+b^2x^2)^{m+2}}}{(m+2)\,b^2};$$

$$\int x^2\sqrt{(a^2+b^2x^2)^m}\,dx = \frac{x\sqrt{(a^2+b^2x^2)^{m+2}}}{(m+3)\,b^2} - \frac{a^2}{(m+3)\,b^2}\int \sqrt{(a^2+b^2x^2)^m}\,dx;$$

$$\int x^n\sqrt{(a^2+b^2x^2)^m}\,dx = \frac{x^{n-1}\sqrt{(a^2+b^2x^2)^{m+2}}}{(m+n+1)\,b^2} - \frac{a^2(n-1)}{b^2(m+n+1)}\int x^{n-2}\sqrt{(a^2+b^2x^2)^m}\,dx;$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2+b^2x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+b^2x^2}}{bx}\right|;$$

$$\int \frac{\sqrt{(a^2+b^2x^2)^m}}{x}\,dx = \frac{\sqrt{(a^2+b^2x^2)^m}}{m} + a^2\int \frac{\sqrt{(a^2+b^2x^2)^{m-2}}}{x}\,dx;$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{x} + b\ln\left|bx+\sqrt{a^2+b^2x^2}\right|;$$

$$\int \frac{\sqrt{(a^2+b^2x^2)^m}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{(a^2+b^2x^2)^m}}{x} + mb^2\int \sqrt{(a^2+b^2x^2)^{m-2}}\,dx.$$

Интегралы вида $\int x^{\pm n}\sqrt{(a^2-b^2x^2)^m}\,dx$ $(a>0,\ b>0,\ n=0,1,2,\ldots;\ m=1,3,5,\ldots)$.

$$\int \sqrt{a^2-b^2x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-b^2x^2}}{2} + \frac{a^2}{2b}\arcsin\frac{bx}{a};$$

$$\int \sqrt{(a^2-b^2x^2)^m}\,dx = \frac{x}{m+1}\sqrt{(a^2-b^2x^2)^m} + \frac{ma^2}{m+1}\int \sqrt{(a^2-b^2x^2)^{m-2}}\,dx \qquad (m \geqslant 3);$$

$$\int x\sqrt{a^2-b^2x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{(a^2-b^2x^2)^3}}{3b^2};$$

$$\int x\sqrt{(a^2-b^2x^2)^m}\,dx = -\frac{\sqrt{(a^2-b^2x^2)^{m+3}}}{(m+2)\,b^2};$$

$$\int x^2\sqrt{a^2-b^2x^2}\,dx = \frac{2b^2x^3-a^2x}{8b^2}\sqrt{a^2-b^2x^2} + \frac{a^4}{8b^3}\arcsin\frac{bx}{a};$$

$$\int x^2\sqrt{(a^2-b^2x^2)^m}\,dx = -\frac{x\sqrt{(a^2-b^2x^2)^{m+2}}}{(m+3)\,b^2} + \frac{a^2}{(m+3)\,b^2}\int \sqrt{(a^2-b^2x^2)^m}\,dx;$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2-b^2x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-b^2x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-b^2x^2}}{bx}\right|;$$

$$\int \frac{\sqrt{(a^2-b^2x^2)^m}}{x}\,dx = \frac{1}{m}\sqrt{(a^2-b^2x^2)^m} + a^2\int \frac{\sqrt{(a^2-b^2x^2)^{m-2}}}{x}\,dx \qquad (m \geqslant 3);$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2-b^2x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2-b^2x^2}}{x} - b\arcsin\frac{bx}{a};$$

$$\int \frac{\sqrt{(a^2-b^2x^2)^m}}{x^2}\,dx = a^2\int \frac{\sqrt{(a^2-b^2x^2)^{m-2}}}{x^2}\,dx - b^2\int \sqrt{(a^2-b^2x^2)^{m-2}}\,dx.$$

Интегралы вида $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{(a^2-b^2x^2)^m}}$ $(a > 0,\ b > 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots;\ m = 1, 3, 5, \ldots)$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} = \frac{1}{b}\arcsin\frac{bx}{a};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-b^2x^2)^m}} = \frac{1}{a^{m-1}}\sum_{k=0}^{(m-3)/2} \frac{C^k_{(m-3)/2}\,b^{2k}x^{2k+1}}{(2k+1)\sqrt{(a^2-b^2x^2)^{2k+1}}} \qquad (m \geqslant 3);$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-b^2x^2}}{b^2};$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2-b^2x^2)^m}} = \frac{1}{(m-2)\,b^2\sqrt{(a^2-b^2x^2)^{m-2}}};$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} = -\frac{x\sqrt{a^2-b^2x^2}}{2b^2} + \frac{a^2}{2b^3}\arcsin\frac{bx}{a};$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2-b^2x^2)^3}} = \frac{x}{b^2\sqrt{a^2-b^2x^2}} - \frac{1}{b^3}\arcsin\frac{bx}{a};$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2-b^2x^2)^m}} = \frac{1}{a^{m-3}}\sum_{k=0}^{(m-5)/2} \frac{C_{(m-5)/2}\,b^{2k}x^{2k+3}}{(2k+3)\sqrt{(a^2-b^2x^2)^{2k+3}}} \qquad (m \geqslant 5);$$

$$\int \frac{x^ndx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} = -\frac{x^{n-1}\sqrt{a^2-b^2x^2}}{b^2} + \frac{n-1}{b^2}\int x^{n-2}\sqrt{a^2-b^2x^2}\,dx;$$

$$\int \frac{x^{2k+1}dx}{\sqrt{(a^2-b^2x^2)^m}} = \frac{1}{2}\int \frac{t^k dt}{\sqrt{(a^2-b^2t^2)^m}} \qquad (t = x^2);$$

$$\int \frac{x^ndx}{\sqrt{(a^2-b^2x^2)^m}} = \frac{x^{n-1}}{b^2(m-2)\sqrt{(a^2-b^2x^2)^{m-2}}} -$$

$$-\frac{n-1}{b^2(m-2)}\int \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{(a^2-b^2x^2)^{m-2}}} \qquad (m \geqslant 3);$$

Интегралы вида $\int \frac{dx}{x^n\sqrt{(a^2-b^2x^2)^m}}$ $(a>0,\ b>0,\ n=0,1,2,\ldots;\ m=1,3,5,\ldots)$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-b^2x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-b^2x^2}}{bx}\right|;$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(a^2-b^2x^2)^m}} = \sum_{k=1}^{(m-1)/2} \frac{1}{(m-2k)\,a^{2k}\sqrt{(a^2-b^2x^2)^{m-2k}}} - \\ -\frac{1}{a^m}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-b^2x^2}}{bx}\right| \quad (m \geqslant 3);$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-b^2x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-b^2x^2}}{a^2x};$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(a^2-b^2x^2)^m}} = \frac{1}{a^{m+1}}\sum_{k=0}^{(m-1)/2} \frac{C^k_{(m-1)/2}\,b^{2k}x^{2k-1}}{(2k-1)\sqrt{(a^2-b^2x^2)^{2k-1}}} \quad (m \geqslant 3).$$

Интегралы вида $\int x^{\pm n}\sqrt{(b^2x^2-a^2)^{\pm m}}\,dx$ $(a>0,\ b>0,\ n=0,1,2,\ldots;\ m=1,3,5,\ldots)$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}} = \frac{1}{b}\ln\left|bx+\sqrt{b^2x^2-a^2}\right|;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(b^2x^2-a^2)^m}} = \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{a^{m-1}}\sum_{k=0}^{(m-3)/2} \frac{(-1)^k C^k_{(m-3)/2}\,b^{2k}x^{2k+1}}{(2k+1)\sqrt{(b^2x^2-a^2)^{2k+1}}} \quad (m \geqslant 3);$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(b^2x^2-a^2)^m}} = -\frac{1}{(m-2)\,b^2\sqrt{(b^2x^2-a^2)^{m-2}}};$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}} = \frac{x\sqrt{b^2x^2-a^2}}{2b} + \frac{a^2}{2b^3}\ln\left|bx+\sqrt{b^2x^2-a^2}\right|;$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(b^2x^2-a^2)^3}} = -\frac{x}{b^2\sqrt{b^2x^2-a^2}} + \frac{1}{b^3}\ln\left|bx+\sqrt{b^2x^2-a^2}\right|;$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(b^2x^2-a^2)^m}} = \frac{(-1)^{(m-3)/2}}{a^{m-3}}\sum_{k=0}^{(m-5)/2} \frac{(-1)^k C^k_{(m-5)/2}\,b^{2k}x^{2k+3}}{(2k+3)\sqrt{(b^2x^2-a^2)^{2k+3}}} \quad (m \geqslant 5);$$

$$\int \frac{x^ndx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}} = \frac{x^{n-1}\sqrt{b^2x^2-a^2}}{b^2} - \frac{n-1}{b^2}\int x^{n-2}\sqrt{b^2x^2-a^2}\,dx;$$

$$\int \frac{x^ndx}{\sqrt{(b^2x^2-a^2)^m}} = -\frac{x^{n-1}}{b^2(m-2)\sqrt{(b^2x^2-a^2)^{m-2}}} + \frac{n-1}{b^2(m-2)}\int \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{(b^2x^2-a^2)^{m-2}}} \quad (m \geqslant 3);$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{b^2x^2-a^2}} = \frac{1}{2}\arccos\left|\frac{a}{bx}\right|;$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{b^2x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{b^2x^2-a^2}}{a^2x};$$

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{(b^2x^2-a^2)^m}} = -\frac{1}{(m-2)\,b^2x^{n+1}\sqrt{(b^2x^2-a^2)^{m-2}}} -$$

$$-\frac{n+1}{(m-2)\,b^2}\int \frac{dx}{x^{n+2}\sqrt{(b^2x^2-a^2)^{m-2}}} \qquad (m \geqslant 3);$$

$$\int \sqrt{b^2x^2-a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{b^2x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2b}\ln\left|bx+\sqrt{b^2x^2-a^2}\right|;$$

$$\int \sqrt{(b^2x^2-a^2)^m}\,dx = \frac{x}{m+1}\sqrt{(b^2x^2-a^2)^m} - \frac{ma^2}{m+1}\int \sqrt{(b^2x^2-a^2)^{m-2}}\,dx;$$

$$\int x^n\sqrt{(b^2x^2-a^2)^m}\,dx = \frac{x^{n-1}\sqrt{(b^2x^2-a^2)^{m+2}}}{(m+n+1)\,b^2} + \frac{(n-1)\,a^2}{(m+n+1)\,b^2}\int x^{n-2}\sqrt{(b^2x^2-a^2)^m}\,dx;$$

$$\int \frac{\sqrt{b^2x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{b^2x^2-a^2} - a\arccos\left|\frac{a}{bx}\right|;$$

$$\int \frac{\sqrt{(b^2x^2-a^2)^m}}{x^n}\,dx = -a^2\int \frac{\sqrt{(b^2x^2-a^2)^{m-2}}}{x^n}\,dx + b^2\int \frac{\sqrt{(b^2x^2-a^2)^{m-2}}}{x^{n-2}}\,dx.$$

4.3. Интегралы от тригонометрических функций.

Интегралы, содержащие синус ($n \geqslant 0$ — целое, $a \geqslant 0$ — действительное).

$$\int \sin^n ax\,dx = -\frac{\sin^{n-1}ax\cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}ax\,dx \qquad (n>0);$$

$$\int x^n \sin ax\,dx = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx \qquad (n>0);$$

$$\int \frac{\sin ax}{x}\,dx = ax - \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5\cdot 5!} - \frac{(ax)^7}{7\cdot 7!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(ax)^{2k+1}}{(2k+1)\cdot(2k+1)!};$$

$$\int \frac{\sin ax}{x^n}\,dx = -\frac{1}{n-1}\frac{\sin ax}{x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{\cos ax}{x^{n-1}}\,dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)}\frac{\cos ax}{\sin^{n-1}ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2}ax};$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sin ax} = \frac{1}{a^2}\left(ax + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \frac{7(ax)^5}{3\cdot 5\cdot 5!} + \frac{31(ax)^7}{3\cdot 7\cdot 7!} + \frac{127(ax)^9}{3\cdot 5\cdot 9!} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n+1)!} B_n (ax)^{2n+1} + \ldots \right) \quad (B_n \text{ – числа Бернулли});$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sin^2 ax} = -\frac{x}{a}\operatorname{ctg} ax + \frac{1}{a^2}\ln\left|\sin ax\right|;$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sin^n ax} = -\frac{x\cos ax}{(n-1)\,a\sin^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-1)(n-2)\,a^2\sin^{n-2} ax} +$$

$$+ \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x\,dx}{\sin^{n-2} ax} \quad (n > 2);$$

$$\int \frac{dx}{1 \pm \sin ax} = \mp\frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2}\right);$$

$$\int \frac{x\,dx}{1+\sin ax} = -\frac{x}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)\right|;$$

$$\int \frac{x\,dx}{1-\sin ax} = \frac{x}{a}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)\right|;$$

$$\int \frac{\sin ax\,dx}{1 \pm \sin ax} = \pm x + \frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2}\right);$$

$$\int \frac{dx}{\sin ax\,(1 \pm \sin ax)} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right|;$$

$$\int \frac{dx}{(1+\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right);$$

$$\int \frac{dx}{(1-\sin ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right);$$

$$\int \frac{\sin ax\,dx}{(1+\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right);$$

$$\int \frac{\sin ax\,dx}{(1-\sin ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right);$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 ax} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,a}\arcsin\left(\frac{3\sin^2 ax - 1}{\sin^2 ax + 1}\right) = \frac{1}{a\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} ax);$$

$$\int \frac{dx}{1-\sin^2 ax} = \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax;$$

$$\int \sin ax \sin bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \quad (|a| \neq |b|);$$

$$\int \frac{dx}{b + c\sin ax} = \begin{cases} \dfrac{2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \dfrac{b \operatorname{tg} \dfrac{ax}{2} + c}{\sqrt{b^2 - c^2}} & (b^2 > c^2), \\ \dfrac{2}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln \left| \dfrac{b \operatorname{tg} \dfrac{ax}{2} + c - \sqrt{c^2 - b^2}}{b \operatorname{tg} \dfrac{ax}{2} + c + \sqrt{c^2 - b^2}} \right| & (b^2 < c^2); \end{cases}$$

$$\int \frac{\sin ax\, dx}{b + c\sin ax} = \frac{x}{c} - \frac{b}{c} \int \frac{dx}{b + c\sin ax};$$

$$\int \frac{dx}{\sin ax\,(b + c\sin ax)} = \frac{1}{ab} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{ax}{2} \right| - \frac{c}{b} \int \frac{dx}{b + c\sin ax};$$

$$\int \frac{dx}{(b + c\sin ax)^2} = \frac{c\cos ax}{a(b^2 - c^2)(b + c\sin ax)} + \frac{b}{b^2 - c^2} \int \frac{dx}{b + c\sin ax};$$

$$\int \frac{\sin ax\, dx}{(b + c\sin ax)^2} = \frac{b\cos ax}{a(c^2 - b^2)(b + c\sin ax)} + \frac{c}{c^2 - b^2} \int \frac{dx}{b + c\sin ax};$$

$$\int \frac{dx}{b^2 + c^2 \sin^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2 + c^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{b^2 + c^2}\, \operatorname{tg} ax}{b} \qquad (b > 0);$$

$$\int \frac{dx}{b^2 - c^2 \sin^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{b^2 - c^2}\, \operatorname{tg} ax}{b} \qquad (b^2 > c^2,\ b > 0),$$

$$= \frac{1}{2ab\sqrt{c^2 - b^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{c^2 - b^2}\, \operatorname{tg} ax + b}{\sqrt{c^2 - b^2}\, \operatorname{tg} ax - b} \right| \qquad (b^2 < c^2,\ b > 0);$$

Интегралы, содержащие косинус.

$$\int \cos^n ax\, dx = \frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax\, dx;$$

$$\int x^n \cos ax\, dx = \frac{x^n \sin ax}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax\, dx;$$

$$\int \frac{\cos ax}{x} dx = \ln(ax) - \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 4!} - \frac{(ax)^6}{6 \cdot 6!} + \ldots = \ln(ax) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (ax)^{2k}}{2k \cdot (2k)!};$$

$$\int \frac{\cos ax}{x^n} dx = -\frac{\cos ax}{(n-1)\, x^{n-1}} - \frac{a}{n-1} \int \frac{\sin ax}{x^{n-1}} dx \qquad (n \neq 1);$$

$$\int \frac{dx}{\cos ax} = \int \sec ax\, dx = \frac{1}{a} \ln \left| \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right) \right| = \frac{1}{a} \ln \left| \sec ax + \operatorname{tg} ax \right|;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)} \frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax} \qquad (n > 1);$$

$$\int \frac{x\,dx}{\cos ax} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^4}{4\cdot 2!} + \frac{5(ax)^6}{6\cdot 4!} + \frac{61(ax)^8}{8\cdot 6!} + \frac{1385(ax)^{10}}{10\cdot 8!} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{E_n (ax)^{2n+2}}{(2n+2)\cdot(2n)!} + \ldots\right) \quad (E_n \text{ – числа Эйлера});$$

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 ax} = \frac{x}{a}\operatorname{tg} ax + \frac{1}{a^2}\ln\left|\cos ax\right|;$$

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^n ax} = \frac{x\sin ax}{(n-1)\,a\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-1)(n-2)\,a^2\cos^{n-2} ax} +$$

$$+\frac{n-2}{n-1}\int \frac{x\,dx}{\cos^{n-2} ax} \quad (n > 2);$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2};$$

$$\int \frac{dx}{1-\cos ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2};$$

$$\int \frac{x\,dx}{1+\cos ax} = \frac{x}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\left|\cos\frac{ax}{2}\right|;$$

$$\int \frac{x\,dx}{1-\cos ax} = -\frac{x}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\left|\sin\frac{ax}{2}\right|;$$

$$\int \frac{\cos ax\,dx}{1+\cos ax} = x - \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2};$$

$$\int \frac{\cos ax\,dx}{1-\cos ax} = -x - \frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2};$$

$$\int \frac{dx}{\cos ax\,(1+\cos ax)} = \frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)\right| - \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2};$$

$$\int \frac{dx}{\cos ax\,(1-\cos ax)} = \frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)\right| - \frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2};$$

$$\int \frac{dx}{(1+\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} + \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\frac{ax}{2};$$

$$\int \frac{dx}{(1-\cos ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\frac{ax}{2};$$

$$\int \frac{\cos ax\,dx}{(1+\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\frac{ax}{2};$$

$$\int \frac{\cos ax\,dx}{(1-\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\frac{ax}{2};$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 ax} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,a}\arcsin\left(\frac{1-3\cos^2 ax}{1+\cos^2 ax}\right);$$

$$\int \frac{dx}{1-\cos^2 ax} = \int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax;$$

$$\int \cos ax \cos bx\, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \qquad (|a| \neq |b|);$$

$$\int \frac{dx}{b + c\cos ax} = \frac{2}{\sqrt{b^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \frac{(b-c)\operatorname{tg}\frac{ax}{2}}{\sqrt{b^2 - c^2}} \qquad (b^2 > c^2),$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c^2 - b^2}} \ln \frac{(c-b)\operatorname{tg}\frac{ax}{2} + \sqrt{c^2 - b^2}}{(c-b)\operatorname{tg}\frac{ax}{2} - \sqrt{c^2 - b^2}} \qquad (b^2 < c^2);$$

$$\int \frac{\cos ax\, dx}{b + c\cos ax} = \frac{x}{c} - \frac{b}{c}\int \frac{dx}{b + c\cos ax};$$

$$\int \frac{dx}{\cos ax\,(b + c\cos ax)} = \frac{1}{ab} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)\right| - \frac{c}{b}\int \frac{dx}{b + c\cos ax};$$

$$\int \frac{dx}{(b + c\cos ax)^2} = \frac{c\sin ax}{a(c^2 - b^2)(b + c\cos ax)} - \frac{b}{c^2 - b^2}\int \frac{dx}{b + c\cos ax};$$

$$\int \frac{\cos ax\, dx}{(b + c\cos ax)^2} = \frac{b\sin ax}{a(b^2 - c^2)(b + c\cos ax)} - \frac{c}{b^2 - c^2}\int \frac{dx}{b + c\cos ax};$$

$$\int \frac{dx}{b^2 + c^2\cos^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2 + c^2}} \operatorname{arctg} \frac{b\operatorname{tg} ax}{\sqrt{b^2 + c^2}} \qquad (b > 0);$$

$$\int \frac{dx}{b^2 - c^2\cos^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \frac{b\operatorname{tg} ax}{\sqrt{b^2 - c^2}} \qquad (b^2 > c^2,\ b > 0),$$

$$= \frac{1}{ab\sqrt{c^2 - b^2}} \ln\left|\frac{b\operatorname{tg} ax - \sqrt{c^2 - b^2}}{b\operatorname{tg} ax + \sqrt{c^2 - b^2}}\right| \qquad (b^2 < c^2,\ b > 0);$$

Интегралы, содержащие синус и косинус.

$$\int \frac{\sin x\, dx}{a + b\cos x} = -\frac{1}{b}\ln|a + b\cos x|;$$

$$\int \frac{\sin x\, dx}{(a + b\cos x)^n} = \frac{1}{(n-1)\,b\,(a + b\cos x)^{n-1}} \qquad (n \geqslant 2);$$

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\cos x\,(1 \pm \cos x)} = \ln\left|\frac{1 \pm \cos x}{\cos x}\right|;$$

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\cos x\,(1 \pm \sin x)} = \frac{1}{2(1 \pm \sin x)} \pm \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|;$$

$$\int \frac{\sin x\, dx}{(a + b\cos x)(c + d\cos x)} = \frac{1}{ad - bc}\ln\left|\frac{a + b\cos x}{c + d\cos x}\right| \qquad (ad - bc \neq 0);$$

$$\int \frac{c + d\sin x}{a + b\cos x}\, dx = -\frac{d}{b}\ln|a + b\cos x| + c\int \frac{dx}{a + b\cos x};$$

$$\int \frac{\cos x\, dx}{a + b\sin x} = \frac{1}{b}\ln|a + b\sin x|;$$

$$\int \frac{\cos x\,dx}{(a+b\sin x)^n} = -\frac{1}{(n-1)\,b\,(a+b\sin x)^{n-1}} \qquad (n \geqslant 2);$$

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x\,(1\pm\sin x)} = \ln\left|\frac{\sin x}{1\pm\sin x}\right|;$$

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x\,(1\pm\cos x)} = -\frac{1}{2(1\pm\cos x)} \pm \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|;$$

$$\int \frac{\cos x\,dx}{(a+b\sin x)(c+d\sin x)} = \frac{1}{ad-bc}\ln\left|\frac{c+d\sin x}{a+b\sin x}\right| \qquad (ad-bc\neq 0);$$

$$\int \frac{c+d\cos x}{a+b\sin x}\,dx = \frac{d}{b}\ln\left|a+b\sin x\right| + c\int\frac{dx}{a+b\sin x};$$

$$\int \frac{dx}{\sin x\,(1\pm\cos x)} = \pm\frac{1}{2\,(1\pm\cos x)} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|;$$

$$\int \frac{dx}{\cos x\,(1\pm\sin x)} = \mp\frac{1}{2\,(1\pm\cos x)} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|;$$

$$\int \frac{dx}{\sin x\pm\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\pm\frac{\pi}{8}\right)\right|;$$

$$\int \frac{dx}{a\cos x+b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\arccos\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{2}\right|;$$

$$\int \frac{dx}{(a\cos x+b\sin x)^n} = \int\frac{d(x-\varphi)}{\left[\rho\cos\left(x-\varphi\right)\right]^n} \qquad (a=\rho\cos\varphi,\ b=\rho\sin\varphi);$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x\pm\sin x} = \pm\ln\left|1\pm\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|;$$

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x} = \int\frac{dt}{a+\sqrt{b^2+c^2}\,\sin t} \qquad \left(t = x+\operatorname{arctg}\frac{b}{c}\right);$$

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x+c\sin x)^n} = \int\frac{d(x-\varphi)}{\left[a+\rho\cos\left(x-\varphi\right)\right]^n} \qquad (b=\rho\cos\varphi,\ c=\rho\sin\varphi);$$

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\sin x\pm\cos x} = \frac{x}{2}\mp\frac{1}{2}\ln\left|\sin x\pm\cos x\right|;$$

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x\pm\cos x} = \pm\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\sin x\pm\cos x\right|;$$

$$\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right) \qquad \left(a>0,\ b>0\right);$$

$$\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x-b^2\sin^2 x} = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{b\operatorname{tg} x+a}{b\operatorname{tg} x-a}\right|;$$

$$\int \frac{\sin x\cos x\,dx}{a\cos^2 x+b\sin^2 x} = \frac{1}{2\left(b-a\right)}\ln\left|a\cos^2 x+b\sin^2 x\right| \qquad \left(a\neq b\right).$$

Интегралы, содержащие тангенс и котангенс.

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x|;$$

$$\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx \qquad (n \geqslant 2);$$

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x|;$$

$$\int \operatorname{ctg}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x\,dx \qquad (n \geqslant 2);$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \pm 1} = \pm\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sin x \pm \cos x|;$$

$$\int \frac{dx}{a + b\operatorname{tg} x} = \frac{1}{a^2 + b^2}\left(b\ln|a + b\operatorname{tg} x| + b\ln|\cos x| + ax\right);$$

$$\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\operatorname{tg} x \pm 1} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2}\ln|\sin x \pm \cos x|;$$

$$\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{a + b\operatorname{tg} x} = \frac{1}{a^2 + b^2}\left(bx - a\ln|a\cos x + b\sin x|\right);$$

$$\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{a^2 - b^2}\left[x - \left|\frac{b}{a}\right|\operatorname{arctg}\left(\left|\frac{b}{a}\right|\operatorname{tg} x\right)\right] \qquad \left(a^2 \neq b^2\right);$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - b^2\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{a^2 + b^2}\left(x + \frac{b}{2a}\ln\left|\frac{a + b\operatorname{tg} x}{a - b\operatorname{tg} x}\right|\right);$$

$$\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = -\frac{\cos^2 x}{2};$$

$$\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{1 + a^2\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\ln\left(\cos^2 x + a\sin^2 x\right)}{2\left(a^2 - 1\right)} \qquad \left(a^2 \neq 1\right);$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ctg} x \pm 1} = \frac{x}{2} \pm \frac{1}{2}\ln|\sin x \pm \cos x|;$$

$$\int \frac{\operatorname{ctg} x\,dx}{\operatorname{ctg} x \pm 1} = \pm\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sin x \pm \cos x|;$$

$$\int \frac{\operatorname{ctg} x\,dx}{a + b\operatorname{ctg} x} = \int \frac{dx}{a\operatorname{tg} x + b};$$

$$\int \frac{dx}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2\operatorname{ctg}^2 x} = \frac{1}{a^2 - b^2}\left[x - \left|\frac{b}{a}\right|\operatorname{arctg}\left(-\left|\frac{b}{a}\right|\operatorname{ctg} x\right)\right] \qquad \left(a^2 \neq b^2\right);$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - b^2\operatorname{ctg}^2 x} = \frac{1}{a^2 + b^2}\left(x + \frac{b}{2a}\ln\left|\frac{a - b\operatorname{ctg} x}{a + b\operatorname{ctg} x}\right|\right);$$

$$\int \frac{\operatorname{ctg} x\,dx}{1+\operatorname{ctg}^2 x} = \frac{\sin^2 x}{2};$$

$$\int \frac{\operatorname{ctg} x\,dx}{1+a^2\operatorname{ctg}^2 x} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{1+\frac{1}{a^2}\operatorname{tg}^2 x};$$

$$\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{1\pm\operatorname{ctg} x} = \mp\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x\pm\cos x}{\cos^2 x}\right|;$$

$$\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\sqrt{a+b\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}\arccos\left(\frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{b}}\cos x\right);$$

$$\int x\operatorname{tg} ax\,dx = \frac{ax^3}{3}+\frac{a^3x^5}{15}+\frac{2a^5x^7}{105}+\frac{17a^7x^9}{2835}+\ldots+\frac{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)B_n\,a^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$(B_n$ – числа Бернулли$)$;

$$\int \frac{\operatorname{tg} ax\,dx}{x} = ax+\frac{(ax)^3}{9}+\frac{2(ax)^5}{75}+\frac{17(ax)^7}{2205}+\ldots+\frac{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)B_n\,(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!},$$

$(B_n$ – числа Бернулли$)$;

$$\int x\operatorname{ctg} ax\,dx = \frac{x}{a}-\frac{ax^3}{9}-\frac{a^3x^5}{225}-\ldots-\frac{2^{2n}B_n\,a^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad (B_n \text{ – числа Бернулли});$$

$$\int \frac{\operatorname{ctg} ax\,dx}{x} = -\frac{1}{ax}-\frac{ax}{3}-\frac{(ax)^3}{135}-\frac{2(ax)^5}{4725}-\ldots-\frac{2^{2n}B_n\,(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!},$$

$(B_n$ – числа Бернулли$)$.

4.4. Интегралы, содержащие показательную функцию.

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax};$$

$$\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax}-\frac{x}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx;$$

$$\int \frac{e^{ax}}{x}dx = \ln x+\frac{ax}{1\cdot 1!}+\frac{(ax)^2}{2\cdot 2!}+\frac{(ax)^3}{3\cdot 3!}+\ldots = \ln x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(ax)^k}{k\cdot k!};$$

$$\int \frac{e^{ax}}{x^n}dx = \frac{1}{n-1}\left(-\frac{e^{ax}}{x^{n-1}}+a\int\frac{e^{ax}}{x^{n-1}}dx\right)\quad (n\neq 1);$$

$$\int \frac{dx}{1+e^{ax}} = \frac{1}{a}\ln\frac{e^{ax}}{1+e^{ax}};$$

$$\int \frac{dx}{b+ce^{ax}} = \frac{x}{b}-\frac{1}{ab}\ln\left(b+ce^{ax}\right);$$

$$\int \frac{e^{ax}dx}{b+ce^{ax}} = \frac{1}{ac}\ln\left(b+ce^{ax}\right);$$

$$\int e^{ax}\ln x\,dx = \frac{e^{ax}\ln x}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx;$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin bx - b\cos bx\right);$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos bx + b\sin bx\right);$$

$$\int e^{ax}\sin^n x\,dx = \frac{e^{ax}\sin^{n-1}x}{a^2+n^2}\left(a\sin x - n\cos x\right) + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}x\,dx;$$

$$\int e^{ax}\cos^n x\,dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1}x}{a^2+n^2}\left(a\cos x + n\sin x\right) + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}x\,dx;$$

$$\int x\,e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{x\,e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin bx - b\cos bx\right) -$$

$$-\frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}\left[(a^2-b^2)\sin bx - 2ab\cos bx\right];$$

$$\int x\,e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{x\,e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos bx - b\sin bx\right) -$$

$$-\frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}\left[(a^2-b^2)\cos bx - 2ab\sin bx\right].$$

4.5. Интегралы, содержащие логарифмическую функцию.

$$\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx \qquad (n \neq -1);$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} = \ln|\ln x| + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3\cdot 3!} + \ldots = \ln|\ln x| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\ln x)^k}{k\cdot k!};$$

$$\int \frac{dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{(\ln x)^{n-1}} \qquad (n \neq 1);$$

$$\int x^m \ln x\,dx = x^{m+1}\left[\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right] \qquad (m \neq -1);$$

$$\int x^m (\ln x)^n\,dx = \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m (\ln x)^{n-1}\,dx \qquad (m \neq 1,\ n \neq -1);$$

$$\int \frac{(\ln x)^n}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^{n-1}}{n+1};$$

$$\int \frac{\ln x}{x^m}\,dx = -\frac{\ln x}{(m-1)\,x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2\,x^{m-1}} \qquad (m \neq 1);$$

$$\int \frac{(\ln x)^n}{x^m}\,dx = -\frac{(\ln x)^n}{(m-1)\,x^{m-1}} + \frac{n}{m-1}\int \frac{(\ln x)^{n-1}}{x^m}\,dx \qquad (m \neq 1);$$

$$\int \frac{x^m\,dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m\,dx}{(\ln x)^{n-1}} \qquad (n \neq 1);$$

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x|;$$

$$\int \frac{dx}{x^n \ln x} = \ln|\ln x| - (n-1)\ln x + \frac{(n-1)^2(\ln x)^2}{2\cdot 2!} - \frac{(n-1)^3(\ln x)^3}{3\cdot 3!} + \ldots =$$

$$= \ln|\ln x| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[(-1)(n-1)\ln x\right]^k}{k\cdot k!};$$

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^n} = -\frac{1}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} \qquad (n \neq 1);$$

$$\int \frac{dx}{x^m(\ln x)^n} = -\frac{1}{x^{m-1}(n-1)(\ln x)^{n-1}} - \frac{m-1}{n-1}\int \frac{dx}{x^m(\ln x)^{n-1}} \qquad (n \neq 1);$$

$$\int \sin\ln x\,dx = \frac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x);$$

$$\int \cos\ln x\,dx = \frac{x}{2}(\sin\ln x + \cos\ln x);$$

$$\int e^{ax}\ln x\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\ln x - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}}{x}dx.$$

4.6. Интегралы, содержащие обратные тригонометрические функции.

$$\int \arcsin\frac{x}{a}dx = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2};$$

$$\int x\arcsin\frac{x}{a}dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{a^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{4}\sqrt{a^2 - x^2};$$

$$\int x^2\arcsin\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{a}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{9}\left(x^2 + 2a^2\right)\sqrt{a^2 - x^2};$$

$$\int x^n\arcsin\frac{x}{a}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$\int \frac{1}{x}\arcsin\frac{x}{a}dx = \frac{x}{a} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 3}\frac{x^3}{a^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 5}\frac{x^5}{a^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 7}\frac{x^7}{a^7} + \ldots =$$

$$= \frac{x}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}\prod\limits_{i=1}^{k}\frac{(2i-1)}{2i}}{a^{2k+1}(2k+1)^2};$$

$$\int \frac{1}{x^2}\arcsin\frac{x}{a}dx = -\frac{1}{x}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right|;$$

$$\int \frac{1}{x^n}\arcsin\frac{x}{a}dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad (n \geqslant 2);$$

$$\int \arccos\frac{x}{a}\,dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}\,;$$

$$\int x\arccos\frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{a^2}{4}\right)\arccos\frac{x}{a} - \frac{x}{4}\sqrt{a^2 - x^2}\,;$$

$$\int x^2\arccos\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\arccos\frac{x}{a} - \frac{1}{9}\left(x^2 + 2a^2\right)\sqrt{a^2 - x^2}\,;$$

$$\int x^n\arccos\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\arccos\frac{x}{a} + \frac{1}{n+1}\int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$\int \frac{1}{x}\arccos\frac{x}{a}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln|x| - \frac{x}{a} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 3}\frac{x^3}{a^3} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 5}\frac{x^5}{a^5} -$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 7}\frac{x^7}{a^7} - \ldots = \frac{\pi}{2}\ln|x| - \frac{x}{a} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k+1}\prod\limits_{i=1}^{k}\frac{(2i-1)}{2i}}{a^{2k+1}(2k+1)^2};$$

$$\int \frac{1}{x^2}\arccos\frac{x}{a}\,dx = -\frac{1}{x}\arccos\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x};$$

$$\int \frac{1}{x^n}\arccos\frac{x}{a}\,dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\arccos\frac{x}{a} - \frac{1}{n-1}\int\frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$\int \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln\left(a^2 + x^2\right);$$

$$\int x\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x^2 + a^2\right)\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{ax}{2};$$

$$\int x^2\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{ax^3}{6} + \frac{a^3}{6}\ln\left(x^2 + a^2\right);$$

$$\int x^n\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{n+1}\int\frac{x^{n+1}dx}{x^2 + a^2} \qquad (n \neq -1);$$

$$\int \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3\cdot 3\cdot a^3} + \frac{x^5}{5\cdot 5\cdot a^5} - \frac{x^7}{7\cdot 7\cdot a^7} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)^2 a^{2k+1}} \qquad (|x| < |a|);$$

$$\int \frac{1}{x^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx = -\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{1}{2a}\ln\frac{x^2 + a^2}{x^2};$$

$$\int \frac{1}{x^n}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{n-1}\int\frac{dx}{x^{n-1}\left(x^2 + a^2\right)} \qquad (n \neq 1);$$

$$\int \operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln\left(x^2 + a^2\right);$$

$$\int x\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x^2 + a^2\right)\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{ax}{2};$$

$$\int x^2\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^3}{6}\ln\left(x^2 + a^2\right);$$

$$\int x^n \operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{n+1}\int\frac{x^{n+1}dx}{x^2+a^2} \qquad (n \neq -1);$$

$$\int \frac{1}{x}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln|x| - \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3\cdot 3\cdot a^3} - \frac{x^5}{5\cdot 5\cdot a^5} + \frac{x^7}{7\cdot 7\cdot a^7} + \ldots =$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln|x| + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}x^{2k+1}}{(2k+1)^2 a^{2k+1}} \qquad (|x| < |a|);$$

$$\int \frac{1}{x^2}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx = -\frac{1}{x}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a}\ln\frac{x^2+a^2}{x^2};$$

$$\int \frac{1}{x^n}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{n-1}\int\frac{dx}{x^{n-1}\left(x^2+a^2\right)} \qquad (n \neq 1).$$

4.7. Интегралы, содержащие гиперболические функции.

$$\int \operatorname{sh} ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{ch} ax;$$

$$\int \operatorname{ch} ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sh} ax;$$

$$\int \operatorname{ch}^2 ax\,dx = \frac{1}{2a}\operatorname{sh} ax \operatorname{ch} ax + \frac{x}{2};$$

$$\int \operatorname{sh}^n ax\,dx = \frac{1}{an}\operatorname{sh}^{n-1} ax \operatorname{ch} ax - \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sh}^{n-2} ax\,dx \qquad (n > 0),$$

$$= \frac{1}{a(n-1)}\operatorname{sh}^{n+1} ax \operatorname{ch} ax - \frac{n+2}{n+1}\int \operatorname{sh}^{n+2} ax\,dx \qquad (n < 0,\ n \neq -1);$$

$$\int \operatorname{ch}^n ax\,dx = \frac{1}{an}\operatorname{sh} ax \operatorname{ch}^{n-1} ax + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{ch}^{n-2} ax\,dx \qquad (n > 0),$$

$$= \frac{1}{a(n+1)}\operatorname{sh} ax \operatorname{ch}^{n+1} ax + \frac{n+2}{n+1}\int \operatorname{ch}^{n+2} ax\,dx \qquad (n < 0,\ n \neq -1);$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{th}\frac{ax}{2}\right|;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} ax} = \frac{2}{a}\operatorname{arctg} e^{ax};$$

$$\int x\operatorname{sh} ax\,dx = \frac{1}{a}x\operatorname{ch} ax - \frac{1}{a^2}\operatorname{sh} ax;$$

$$\int x\operatorname{ch} ax\,dx = \frac{1}{a}x\operatorname{sh} ax - \frac{1}{a^2}\operatorname{ch} ax;$$

$$\int \operatorname{th} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\operatorname{ch} ax;$$

$$\int \operatorname{cth} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln|\operatorname{sh} ax|;$$

$$\int \operatorname{th}^2 ax\,dx = x - \frac{\operatorname{th} ax}{a};$$

$$\int \operatorname{cth}^2 ax\,dx = x - \frac{\operatorname{cth} ax}{a};$$

$$\int \operatorname{sh} ax \operatorname{sh} bx\,dx = \frac{1}{a^2 - b^2}\left(a \operatorname{sh} bx \operatorname{ch} ax - b \operatorname{ch} bx \operatorname{sh} ax\right) \quad (a^2 \neq b^2);$$

$$\int \operatorname{ch} ax \operatorname{ch} bx\,dx = \frac{1}{a^2 - b^2}\left(a \operatorname{sh} ax \operatorname{ch} bx - b \operatorname{sh} bx \operatorname{ch} ax\right) \quad (a^2 \neq b^2);$$

$$\int \operatorname{ch} ax \operatorname{sh} bx\,dx = \frac{1}{a^2 - b^2}\left(a \operatorname{sh} ax \operatorname{sh} bx - b \operatorname{ch} bx \operatorname{ch} ax\right) \quad (a^2 \neq b^2);$$

$$\int \operatorname{sh} ax \sin ax\,dx = \frac{1}{2a}\left(\operatorname{ch} ax \sin ax - \operatorname{sh} ax \cos ax\right);$$

$$\int \operatorname{ch} ax \sin ax\,dx = \frac{1}{2a}\left(\operatorname{sh} ax \sin ax - \operatorname{ch} ax \cos ax\right);$$

$$\int \operatorname{sh} ax \cos ax\,dx = \frac{1}{2a}\left(\operatorname{ch} ax \cos ax + \operatorname{sh} ax \sin ax\right);$$

$$\int \operatorname{ch} ax \cos ax\,dx = \frac{1}{2a}\left(\operatorname{sh} ax \cos ax + \operatorname{ch} ax \sin ax\right).$$

5. Определенный интеграл

5.1. Основные определения.

Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, то *определенным интегралом* функции $f(x)$ на $[a, b]$ называется предел

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i\,, \qquad (1)$$

где $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Функции $f(x)$, для которых этот предел существует, называются *интегрируемыми* на отрезке $[a, b]$.

Определенный интеграл обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

5.2. Свойства определенного интеграла.

1. $\int\limits_a^b dx = b - a$.

2. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то функция $f(x)$ интегрируема и на отрезках $[a, c]$, $[c, b]$ $(a \leqslant c \leqslant b)$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$.

3. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$.

4. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то и функция $|f(x)|$ интегрируема на $[a, b]$ и $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то и функция $kf(x)$ $(k = \mathrm{const})$ интегрируема на $[a, b]$ и $\int\limits_a^b kf(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

6. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то и функции $f(x) + g(x)$ и $f(x) \cdot g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и $\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

7. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и $f(x) \geqslant g(x)$ на $[a, b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Первая теорема о среднем. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ и если $g(x)$ не меняет знак на $[a, b]$, то существует такое число $\mu \in [m, M]$, что* $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Вторая теорема о среднем. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна, а* $g(x)$ *монотонна и непрерывно дифференцируема на* $[a, b]$, *то существует такое число* $\xi \in [a, b]$, *что* $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int\limits_{\xi}^b f(x)\,dx$.

Формула Ньютона-Лейбница. *Если функция* $f(x)$ *определена и непрерывна на* $[a, b]$ *и* $F'(x) = f(x)$, *то* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \equiv F(x)\Big|_a^b$.

Формула замены переменной. Если функция $f(z)$ непрерывна на $[a, b]$, а функция $z = g(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную на $[\alpha; \beta]$; $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$, $a \leqslant g(x) \leqslant b$, то $\int\limits_a^b f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(g(x))\,g'(x)\,dx$.

Интегрирование по частям. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$ вместе со своими первыми производными, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b g(x)\,f'(x)\,dx.$$

Интегральное неравенство Минковского. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, $1 < p < +\infty$, то

$$\left[\int\limits_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \leqslant \left[\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} + \left[\int\limits_a^b |g(x)|^p\,dx\right]^{1/p}.$$

Интегральное неравенство Гёльдера. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, $1 < p < +\infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, то

$$\int\limits_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx \leqslant \left[\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \left[\int\limits_a^b |g(x)|^q\,dx\right]^{1/q}.$$

При $p = q = 2$ неравенство Гёльдера превращается в неравенство Коши.

Интеграл с переменным верхним пределом. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ непрерывна на $[a, b]$.

Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ дифференцируема в точке x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.

5.3. Приложения определенного интеграла.

Длина кривой. Если кривая задана функцией $y = f(x)$ $(x \in [x_0, x_1])$, то

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f')^2}\, dx.$$

Если кривая задана параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

Если кривая задана в полярных координатах: $\rho = \rho(\varphi)$ $(\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1)$, то

$$l = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi.$$

П л о щ а д ь т р а п е ц и и . Если функция $y = f(x)$ неотрицательна и непрерывна на $[a, b]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле $S = \int_a^b f(x)\, dx$.

П л о щ а д ь с е к т о р а OAB, ограниченного кривой AB, заданной в полярных координатах: $\rho = \rho(\varphi)$ $(\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1)$, и радиусами OA и OB: $S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \rho^2 d\varphi$.

О б ъ е м т е л а в р а щ е н и я , полученного в результате вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox: $V = \pi\int_a^b f^2(x)\, dx$.

П л о щ а д ь п о в е р х н о с т и в р а щ е н и я , полученной при вращении вокруг оси Ox кривой, заданной на $[a, b]$ непрерывно дифференцируемой функцией $y = f(x)$:

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Если кривая задана параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(t \in [t_0, t_1])$, то

$$S = 2\pi\int_{t_0}^{t_1} \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

К о о р д и н а т ы ц е н т р а т я ж е с т и к р и в о й , задаваемой функцией $y = f(x)$ $(x \in [a, b])$, с линейной плотностью $\delta(x)$:

$$x_0 = \frac{1}{M}\int_a^b \delta(x)\, x\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx, \qquad y_0 = \frac{1}{M}\int_a^b \delta(x)\, f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx,$$

где $M = \int_a^b \delta(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$ — полная масса.

Координаты центра тяжести криволинейной трапеции с постоянной поверхностной плотностью $\delta(x,\ y) = 1$, ограниченной графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$:

$$x_0 = \frac{1}{S}\int_a^b x f(x)\,dx, \qquad y_0 = \frac{1}{2S}\int_a^b f^2(x)\,dx,$$

где S — площадь криволинейной трапеции.

Момент инерции относительно оси Oy кривой, задаваемой непрерывно дифференцируемой функцией $y = f(x)$, с линейной плотностью $\delta(x)$:

$$I_y = \int_a^b \delta(x)\,x^2\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx\,.$$

Момент инерции относительно оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$, с постоянной поверхностной плотностью $\delta(x,\ y) = 1$:

$$I_y = \int_a^b x^2 f(x)\,dx\,.$$

5.4. Некоторые определенные интегралы.

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \qquad (a > 0);$$

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-b/(4a^2)} \qquad (a > 0);$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6};$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x + 1} = \frac{\pi^2}{12};$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx = -\gamma \quad (\gamma \approx 0{,}5772156649 \text{ — } \textit{постоянная Эйлера–Маскерони});$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\ln x\,dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}(\gamma + 2\ln 2);$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\ln^2 x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{8}\left[(\gamma + 2\ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{2}\right];$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x)^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x)^2\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

$$\int_0^1 \ln\ln x\,dx = -\gamma;$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

6. Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра

6.1. Основные определения.

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, и интегрируема на любом $[a, \beta]$, $\beta < b$; существует предел $\lim\limits_{\beta \to b} \int\limits_a^{\beta} f(x)\,dx$. Этот предел обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и называется *несобственным интегралом*, а функция $f(x)$ называется *интегрируемой в несобственном смысле* на $[a, b)$.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\beta \to b} \int\limits_a^{\beta} f(x)\,dx$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называют *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*.

Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

Если функция $f(x, y)$ определена в замкнутой ограниченной области $\overline{G} = \{(x, y)$: $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$; $\varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)\}$, то интеграл вида $\Phi(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx$ называется *интегралом, зависящим от параметра* y.

Несобственным интегралом, зависящим от параметра, называется несобственный интеграл вида $\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\,dx$, где $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, а $y \in Y$.

Если для любого $y_0 \in Y$ интеграл $\Phi(y_0)$ сходится, то $\Phi(y)$ называется *сходящимся в* Y.

Если интеграл $\Phi(y)$ сходится в Y и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_\varepsilon < b$ такое, что для всех $\delta \in (\delta_\varepsilon, b)$ и для всех $y \in Y$ выполняется неравенство $\left| \int\limits_\delta^b f(x, y)\,dx \right| < \varepsilon$, то $\Phi(y)$ называется *равномерно сходящимся в* Y.

6.2. Несобственные интегралы.

К р и т е р и й К о ш и . *Для сходимости несобственного интеграла* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое* $b^*(\varepsilon)$, *что для любых* $b', b'' > b^*$ *выполнялось неравенство* $\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.

П р и з н а к с х о д и м о с т и Д и р и х л е . *Если функция* $f(x)$ *непрерывна и имеет ограниченную первообразную* $F(x)$ *при* $x \geqslant a$, *а функция* $g(x)$ *непрерывно дифференцируема и убывает при* $x \geqslant a$ *и* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, *то сходится интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$.

П р и з н а к и с х о д и м о с т и н е с о б с т в е н н ы х и н т е г р а л о в . Если $|\,f(x)\,| \leqslant F(x)$ при $x \geqslant a$ и $\int\limits_a^{+\infty} F(x)\,dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится абсолютно.

Если $f(x) > 0$ и $f(x) = O(g(x))$ при $x \to +\infty$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Если $f(x) = O(x^{-p})$ при $x \to +\infty$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, если $p > 1$, и расходится, если $p \leqslant 1$.

6.3. Интегралы, зависящие от параметра.

Н е п р е р ы в н о с т ь . Если функция $f(x, y)$ непрерывна на $\overline{G}$, а $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$, то функция $\Phi(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$ и

$$\lim_{y\to y_0} \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx = \int\limits_{\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)}^{\lim\limits_{y\to y_0}\psi(y)} \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx.$$

Д и ф ф е р е н ц и р у е м о с т ь (ф о р м у л а Л е й б н и ц а) . Если функции $f(x, y)$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны на $\overline{G}$ и $\varphi(y)$, $\psi(y)$ непрерывны вместе со своими первыми производными на $[\alpha, \beta]$, то интеграл, зависящий от параметра, имеет на $[\alpha, \beta]$ производную $\dfrac{d\Phi(y)}{dy} = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx - f\big(\varphi(y), y\big)\dfrac{d\varphi(y)}{dy} + f\big(\psi(y), y\big)\dfrac{d\psi(y)}{dy}$.

Если $\psi(y) = b = \text{const}$, $\varphi(y) = a = \text{const}$, то имеет место *формула Лейбница*

$$\frac{d\Phi(y)}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx.$$

Интегрирование. Если функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$ и $f(x, y)$ непрерывна в $\overline{G} = \{(x, y)\colon\ \alpha \leqslant y \leqslant \beta;\ \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)\}$, то имеет место формула

$$\int_\alpha^\beta \Phi(y)\,dy = \int_\alpha^\beta \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx\right] dy = \iint_{\overline{G}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

6.4. Несобственные интегралы, зависящие от параметра.

Критерий Коши. *Для того, чтобы интеграл* $\Phi(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ *равномерно сходился в* Y, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое* $\delta_\varepsilon < b$, *что для любых* $\delta' \in (\delta_\varepsilon, b)$ *и* $\delta'' \in (\delta_\varepsilon, b)$ *и всех* $y \in Y$ *выполнялось неравенство*

$$\left|\int_{\delta'}^{\delta''} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Критерий Вейерштрасса. *Интеграл* $\Phi(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно в* Y, *если существует не зависящая от параметра* y *неотрицательная функция* $g(x)$, *определенная на* $[a, b)$ *и интегрируемая* (*по Риману*) *на любом* $[a, \delta]$ (*где* $\delta \in (a, b)$) *и такая, что* $|f(x, y)| \leqslant g(x)$, $x \in [a, b)$, $y \in Y$, *и интеграл* $\int_a^b g(x)\,dx$ *сходится.*

Переход к пределу под знаком интеграла. Если функция $f(x, y)$ определена для любого $x \in [a, b)$ $(-\infty < a < b \leqslant +\infty)$ и $y \in Y$, при любом $y \in Y$ непрерывна по x на $[a, b)$, и если для любого $\eta \in [a, b)$ функция $f(x, y)$ равномерно на $[a, \eta]$ стремится к функции $g(x)$ при $y \to y_0$ и интеграл $\int_a^b f(x,y)\,dx$ равномерно сходится на Y, то $\lim\limits_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$.

Перестановка порядка интегрирования. Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на $\{(x, y)\colon\ a \leqslant x < b,\ c \leqslant y < d\}$ $(-\infty < a < b \leqslant +\infty$, $-\infty < c < d \leqslant +\infty)$ и $\int_a^b f(x,y)\,dx$ равномерно сходится на любом $[c, \eta]$, $c < \eta < d$, а интеграл

$\int\limits_c^d f(x,y)\,dx$ равномерно сходится на $[a,\ \xi]$, $a < \xi < b$ и существует один из двух повторных интегралов $\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b |f(x,y)|\,dx$, $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d |f(x,y)|\,dy$, то существует и другой и имеет место равенство $\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b |f(x,y)|\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d |f(x,y)|\,dy$.

Дифференцирование интеграла по параметру. Если $f(x,\ y)$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ определены и непрерывны на $\{(x,\ y)\colon\ a \leqslant x < b,\ \ c \leqslant y < d\}$ $(-\infty < a < b \leqslant +\infty,\ \ -\infty < c < d \leqslant +\infty)$ и $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ сходится, а $\int\limits_a^b \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$ равномерно сходится на $[c,\ d]$, то $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ непрерывно дифференцируема на этом отрезке и

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx.$$

7. Кратные интегралы

Если интеграл, зависящий от параметра $\Phi(y) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dx$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — непрерывные функции на $[a, b]$, представляет собой функцию, интегрируемую на $[a, b]$, то *повторным интегралом* $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$ называется выражение $\int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$.

Двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по квадрируемой замкнутой области $\overline{G}$ плоскости x, y называется предел $\iint\limits_{\overline{G}} f(x,y)\,dx\,dy = \lim\limits_{\substack{\max\Delta x_i\to 0\\ \max\Delta y_j\to 0}} \sum\limits_i\sum\limits_j f(x_i,y_j)\Delta x_i\Delta y_j$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, $(x_i; y_j) \in \overline{G}$.

Тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по кубируемой замкнутой области $\overline{V}$ трехмерного пространства x, y, z называется предел

$$\iiint\limits_{\overline{V}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\substack{\max\Delta x_i\to 0\\ \max\Delta y_j\to 0\\ \max\Delta z_k\to 0}} \sum_i\sum_j\sum_k f(x_i,y_j,z_k)\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k\,,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$, $(x_i; y_j; z_k) \in \overline{V}$.

Сведение двойного интеграла к повторному. Если $\overline{G} = \{(x, y)\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$ — непрерывные функции на $[a, b]$, а $f(x, y)$ непрерывна в $\overline{G}$, то имеет место формула

$$\iint\limits_{\overline{G}} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\,.$$

Замена переменных в двойном интеграле. Пусть $\overline{G}_{uv}$ и $\overline{G}_{xy}$ — квадрируемые замкнутые области соответственно на плоскостях (x, y) и (u, v); $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ — непрерывное отображение $\overline{G}_{uv}$ на $\overline{G}_{xy}$, взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо отображающее G_{uv} на G_{xy}. Якобиан $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ отличен от нуля на G_{uv} и непрерывно продолжаем*) на $\overline{G}_{uv}$. Тогда если функция $f(x, y)$ непрерывна в $\overline{G}_{xy}$, то имеет место формула

$$\iint\limits_{\overline{G}_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\overline{G}_{uv}} f\big[x(u,v),\ y(u,v)\big]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv\,.$$

---

*) Функция g, определенная в области G, называется непрерывно продолжаемой на $\overline{G}$, если существует такая непрерывная на функция h, что $h = g$ на G.

Сведение тройного интеграла к повторному. Если $\overline{V} = \{(x, y, z)\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),\ z_1(x, y) \leqslant y \leqslant z_2(x, y)\}$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$ непрерывны в $[a, b]$, $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ непрерывны в $\overline{G} = \{(x, y)\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}$, а функция $f(x, y, z)$ непрерывна в $\overline{V}$, то

$$\iiint\limits_{\overline{V}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,.$$

Замена переменных в тройном интеграле. Пусть $\overline{G}_{uvw}$ и $\overline{G}_{xyz}$ — кубируемые области соответственно в пространствах (x, y, z) и (u, v, w); $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ — непрерывное отображение $\overline{G}_{uvw}$ на $\overline{G}_{xyz}$, взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо отображающее G_{uvw} на G_{xyz}. Якобиан $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0$ на G_{uvw} и непрерывно продолжаем на $\overline{G}_{uvw}$. Тогда если функция $f(x, y, z)$ непрерывна на $\overline{G}_{xyz}$, то имеет место формула

$$\iiint\limits_{\overline{G}_{xyz}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\overline{G}_{uvw}} f\big[x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w)\big]\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw\,.$$

8. Криволинейные интегралы

Пусть имеется гладкая кривая γ, заданная параметрически $(0 \leqslant t \leqslant T)$:

$$r = r(t) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

Пусть $f(x, y, z)$ — функция, определенная и непрерывная в точках кривой γ. Тогда выражение $\int\limits_{\gamma} f(x, y, z)\, ds$ называется *криволинейным интегралом* I *рода* от функции f по кривой γ и определяется формулой (ds — дифференциал дуги):

$$\int\limits_{\gamma} f(x, y, z)\, ds = \int\limits_{\gamma} f(r)\, ds = \int\limits_{0}^{T} f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, dt\,.$$

Значение криволинейного интеграла I рода не зависит от направления обхода кривой (A и B — начало и конец кривой):

$$\int\limits_{\gamma} f(x, y, z)\, ds = \int\limits_{AB} f(x, y, z)\, ds = \int\limits_{BA} f(x, y, z)\, ds\,.$$

Пусть функции $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ — компоненты вектор-функции $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (P; Q; R)$, непрерывные в точках кривой γ, пробегаемой в направлении возрастания параметра t. *Криволинейным интегралом* II *рода* называется выражение $\int\limits_{\gamma} P\, dx + Q\, dy + R dz$, определяемое формулой

$$\int\limits_{\gamma} P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \int\limits_{\gamma} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\, dr = \int\limits_{\gamma} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\, dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{T} \big\{P\big(x(t), y(t), z(t)\big)\, \dot{x}(t) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)\, \dot{y}(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big)\, \dot{z}(t)\big\}\, dt.$$

При изменении направления обхода кривой γ криволинейный интеграл II рода меняет знак.

9. Поверхностные интегралы

Пусть Σ — гладкая двусторонняя поверхность, заданная параметрически $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in D$, D —плоская область, где $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ — непрерывно дифференцируемые функции, E, F, G —коэффициенты первой квадратичной формы поверхности:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2; \qquad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2;$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

П о в е р х н о с т н ы й и н т е г р а л I р о д а . Если $f(x, y, z)$ — функция, определенная и непрерывная в точках поверхности Σ, то *поверхностным интегралом* I *рода* называется выражение $\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\, d\sigma$, определяемое равенством

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\, d\sigma = \iint\limits_{D} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Значение интеграла I рода не зависит от выбора стороны поверхности.

П о в е р х н о с т н ы й и н т е г р а л I I р о д а . Пусть Σ^+ — сторона поверхности Σ, задаваемая направлением нормали $n = \{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}$; $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ — функции, определенные и непрерывные на поверхности Σ. *Поверхностным интегралом* II *рода* называют выражение $\iint\limits_{\Sigma^+} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy$, определяемое равенством

$$\iint\limits_{\Sigma^+} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy = \iint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma.$$

Для поверхности, заданной параметрически,

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где $A = \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$; $B = \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$; $C = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, а знак выбирается в зависимости от направления нормали. При переходе к другой стороне Σ^- поверхности Σ интеграл II рода меняет знак на противоположный.

Ф о р м у л а Г р и н а . Пусть G — ограниченная область на плоскости x, y с кусочно гладкой замкнутой границей Γ. При условии непрерывности функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ на $\overline{G}$ имеет место формула*) $\iint\limits_{\overline{G}} \left(\dfrac{\partial P}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint\limits_{\Gamma} P\, dx + Q\, dy$. (Направление обхода по контуру выбрано так, что область G остается слева).

---

*) Символом $\oint\limits_{\Gamma}$ обозначен интеграл по замкнутому контуру Γ.

Ф о р м у л а С т о к с а . Пусть Σ — конечная кусочно гладкая поверхность в пространстве x, y, z, натянутая на замкнутый кусочно гладкий контур Γ; функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными в области G пространства x, y, z такой, что $\Sigma \subset G$. Тогда имеет место формула

$$\int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали к поверхности Σ и направление нормали таково, что обход по контуру Γ совершается против часовой стрелки, если смотреть из конца нормали.

Если $(P; Q; R)$ — компоненты вектор-функции $\boldsymbol{F}$, то в векторной форме теорема Стокса имеет вид $\oint_{\Gamma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$.

Ф о р м у л а О с т р о г р а д с к о г о — Г а у с с а . Пусть Σ — кусочно гладкая поверхность, ограничивающая объем V, и $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ — функции, непрерывные вместе со своими частными производными на области V. Тогда имеет место формула

$$\iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma = \iiint_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz\,,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности.

Если функции P, Q, R рассматривать как компоненты вектор-функции $\boldsymbol{F}$, то формула Остроградского—Гаусса может быть записана в векторной форме:

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \iiint_{V} \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dx\,dy\,dz\,,$$

где $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

IV. Ряды и произведения

1. Числовые ряды

1.1. Основные определения.

В *числовом ряде*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

числа a_n называются членами ряда, а числа

$$S_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

частичными суммами.

Ряд (1) называется *сходящимся*, если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Число S называется *суммой ряда*. Если последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ не имеет конечного предела, то ряд (1) называется *расходящимся*. Ряд с действительными членами, знаки которых зависят, в общем случае, от номера члена, называется *знакопеременным*.

Ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*.

1.2. Действия с рядами.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (сходится абсолютно), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ также сходится (сходится абсолютно) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся (сходятся абсолютно), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ также сходится (сходится абсолютно) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — абсолютно сходящиеся ряды, то их произведение — абсолютно сходящийся ряд и $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{n-1} a_m b_{n-m}$.

1.3. Признаки сходимости знакопостоянных рядов.

Необходимое условие сходимости ряда: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

К р и т е р и й К о ш и . *Для сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* $N = N(\varepsilon)$, *что при* $n > N$ *и* $p > 0$

$$\left| S_{n+p} - S_n \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon .$$

Признаки сходимости числовых рядов с неотрицательными членами.

П р и з н а к с р а в н е н и я . *Если для ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *существует такой ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *что при* $n > N$ *выполнено* $a_n \leqslant b_n$, *то из сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует сходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

П р и з н а к Д а л а м б е р а . *Если* $a_n > 0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, *то при* $q < 1$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, при* $q > 1$ *расходится.*

П р и з н а к К о ш и . *Если* $a_n \geqslant 0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, *то при* $q < 1$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, при* $q > 1$ *расходится.*

П р и з н а к Р а а б е . *Если* $a_n > 0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q$, *то при* $q > 1$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, при* $q < 1$ *расходится.*

П р и з н а к Г а у с с а . *Если* $a_n > 0$ *и* $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$, *где* $|\theta_n| < c$ $(c = \text{const})$ *и* $\varepsilon > 0$, *то при* $\lambda > 1$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, при* $\lambda < 1$ *расходится. Если* $\lambda = 1$, *то при* $\mu > 1$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, при* $\mu \leqslant 1$ *расходится.*

И н т е г р а л ь н ы й п р и з н а к К о ш и . *Если* $f(x)$ *— неотрицательная убывающая функция при* $x \geqslant 1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *сходится или расходится одновременно с интегралом* $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$.

1.4. Признаки сходимости знакопеременных рядов.

П р и з н а к Л е й б н и ц а . *Знакопеременный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ $(b_n \geqslant 0)$ *сходится, если* а) $b_n \geqslant b_{n+1}$, б) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Для остатка ряда $R_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + \ldots$ *справедлива оценка* $R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1}$ $(0 \leqslant \theta_n \leqslant 1)$.

П р и з н а к А б е л я . *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится, если* а) *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;* б) *числа* b_n *образуют монотонную ограниченную последовательность*.

П р и з н а к Д и р и х л е . *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится, если* а) *последовательность* $\{b_n\}$ *монотонно стремится к* 0; б) *последовательность частичных сумм* $\{S_m\}$ *ограничена*.

1.5. Свойства рядов.

Сумма абсолютно сходящегося ряда не зависит от порядка слагаемых.

Т е о р е м а Р и м а н а . *Члены каждого условно сходящегося ряда с действительными членами можно представить так, что*: а) *последовательность его частичных сумм будет сходиться к любому заданному числу*; б) *последовательность его частичных сумм будет неограниченно возрастать*; в) *последовательность его частичных сумм будет неограниченно убывать*; г) *последовательность его частичных сумм будет колебаться между двумя любыми заданными числами*.

1.6. Некоторые конечные суммы.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$p + (p+1) + (p+2) + \ldots + (p+n) = \frac{(n+1)(2p+n)}{n};$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2;$$

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1);$$

$$1 + 8 + 16 + \ldots + 8(n-1) = (2n-1)^2;$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4};$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3};$$

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1);$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30};$$

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\ \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}};$$

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\cos\frac{n+1}{2}x\ \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}};$$

$$\cos x + 2\cos 2x + \ldots + n\cos nx = \frac{n\sin\frac{2n+1}{2}x\ \sin\frac{x}{2} - \sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}};$$

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n} - 2\operatorname{ctg} 2x;$$

$$\operatorname{ch} x + 2\operatorname{ch} 2x + \ldots + n\operatorname{ch} nx = \frac{n\operatorname{sh}\frac{x}{2}\ \operatorname{sh}\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \operatorname{sh}^2\frac{nx}{2}}{2\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}.$$

1.7. Некоторые числовые ряды.

$$B_n = \frac{(2n)!}{\pi^{2n}2^{2n-1}}\left[1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \ldots\right] \quad (\textit{числа Бернулли});$$

$$E_n = \frac{2^{2n+2}(2n)!}{\pi^{2n+1}}\left[1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + \ldots\right] \quad (\textit{числа Эйлера});$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = e; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots = \frac{1}{e};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \ln 2;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{2}{3};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots = \frac{\pi}{4};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots = 1;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots = \frac{1}{2};$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots = \frac{3}{4};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)(4n+1)}=\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{11\cdot 13}+\ldots=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots=\frac{1}{4};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{12};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^2}=1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{32};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots=\frac{\pi^2}{90};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^4}=1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots=\frac{7\pi^4}{720};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{96};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=1+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{4^{2k}}+\ldots=\frac{\pi^{2k}2^{2k-1}}{(2k)!}B_k;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{2k}}=1-\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}-\frac{1}{4^{2k}}+\ldots=\frac{\pi^{2k}\left(2^{2k-1}-1\right)}{(2k)!}B_k;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^{2k}}=1+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{5^{2k}}+\frac{1}{7^{2k}}+\ldots=\frac{\pi^{2k}(2^{2k}-1)}{2\cdot(2k)!}B_k;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^{2k+1}}=1-\frac{1}{3^{2k+1}}+\frac{1}{5^{2k+1}}-\frac{1}{7^{2k+1}}+\ldots=\frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2}\cdot(2k)!}E_k;$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}=\operatorname{ch}1;\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}=\operatorname{sh}1;$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}=\cos 1;\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}=\sin 1.$$

2. Функциональные ряды

2.1. Основные определения.

Ряд, членами которого являются некоторые функции, называется *функциональным рядом*.

Множество значений x, при которых функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится, называется *областью сходимости* ряда.

Функции $S_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называются *частичными суммами* ряда.

Функция $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ в области сходимости ряда называется *суммой ряда*.

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется *равномерно сходящимся на промежутке* X, если последовательность $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм сходится равномерно.

Функциональный ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, где a_n и x_0 — некоторые (действительные) числа, а x — переменное, называется *степенным рядом*.

Интервалом сходимости степенного ряда называется интервал $|x - x_0| < R$ (R — *радиус сходимости*), на котором степенной ряд сходится (а вне его — расходится).

Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке x_0.

Правила действий с функциональными рядами в области их сходимости совпадают с правилами действий для сходящихся числовых рядов (см. п. 1.1).

2.2. Признаки сходимости функциональных рядов.

К р и т е р и й К о ш и . *Для того чтобы ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *равномерно сходился на некотором промежутке* X, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* $N = N(\varepsilon)$, *что для всех* $n > N$, *всех натуральных* p *и всех* $x \in X$

$$\left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(x)\right| < \varepsilon .$$

П р и з н а к В е й е р ш т р а с с а . *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится абсолютно и равномерно на промежутке* X, *если существует такой сходящийся числовой ряд с положительными членами* $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$, *что* $|a_n(x)| \leqslant r_n$.

П р и з н а к А б е л я . *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, g_n(x)$ *сходится равномерно на промежутке* X, *если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* X; *последовательность* $\{g_n(x)\}$ *ограничена и монотонна при каждом* $x \in X$.

П р и з н а к Д и р и х л е . *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, g_n(x)$ *сходится равномерно на* X, *если последовательность частичных сумм* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *ограничена на* X *и последовательность* $\{g_n(x)\}$ *монотонна для всех* $x \in X$ *и равномерно стремится к нулю на* X.

2.3. Свойства функциональных рядов.

Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций есть непрерывная функция.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на промежутке X и для любого n существуют конечные пределы $\lim_{x \to x_0} f_n(x)$, $x_0 \in X$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\lim_{x \to x_0} f_n(x))$ сходится и

$$\lim_{x \to x_0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lim_{x \to x_0} f_n(x) \right\}.$$

Если члены сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$ и ряд производных $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$, то

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и этот ряд сходится равномерно на $[a, b]$, то $\int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$ и ряд в правой части равенства равномерно сходится на $[a, b]$.

2.4. Формулы для вычисления радиуса сходимости *R* степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$.

Формула Коши–Адамара: $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Если существует предел $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, то $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

2.5. Действия со степенными рядами.

Внутри общего интервала сходимости $|x - x_0| < R$ степенных рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$ справедливы равенства:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-x_0)^n;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n, \text{ где } c_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_{n-i};$$

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} (x-x_0)^n;$$

$$\int\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + c \qquad (c = \text{const}).$$

2.6. Некоторые степенные ряды.

$$(1 \pm x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n \qquad (m > 0);$$

$$(1 \pm x)^m = 1 \pm \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)x^2}{2!} \pm \frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!} + \ldots \qquad (|x| \leqslant 1);$$

$$(1 \pm x)^{-m} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^n \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!} x^n =$$

$$= 1 \mp \frac{mx}{1!} + \frac{m(m+1)x^2}{2!} \mp \frac{m(m+1)(m+2)x^3}{3!} + \ldots \qquad (m > 0;\ |x| < 1);$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \qquad (|x| < \infty);$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad (|x| < \infty);$$

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)B_n}{(2n)!} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n-1} = \frac{1}{x} - \left(\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} + \ldots\right) \quad (0 < |x| < \pi);$$

$$\sec x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!}x^{2n} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \frac{277x^8}{8064} + \ldots \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(2^{2n-1}-1\right)}{(2n)!}B_n x^{2n-1} =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + \frac{31x^5}{15120} + \frac{127x^7}{604800} + \ldots \quad \left(0 < |x| < \pi\right);$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots;$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}B_n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1 x^2}{2!} - \frac{B_2 x^4}{4!} + \frac{B_3 x^6}{6!} - \ldots \quad \left(|x| < 2\pi\right);$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} - \frac{8x^5}{5!} - \frac{3x^6}{6!} + \frac{56x^7}{7!} + \ldots \quad \left(|x| < \infty\right);$$

$$e^{\cos x} = e\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{4x^4}{4!} - \frac{31x^6}{6!} + \ldots\right] \quad \left(|x| < \infty\right);$$

$$e^{\operatorname{tg} x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{3x^3}{3!} + \frac{9x^4}{4!} + \frac{37x^5}{5!} + \ldots \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right);$$

$$e^{\arcsin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{5x^4}{4!} + \ldots \quad \left(|x| < 1\right);$$

$$e^{\operatorname{arctg} x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{7x^4}{4!} + \frac{5x^5}{5!} + \ldots \quad \left(|x| < 1\right);$$

$$\ln x = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)(x+1)^{2n+1}} = 2\left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \ldots\right) \quad (x > 0);$$

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots \quad \left(0 < x \leqslant 2\right);$$

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\,x^n} = \frac{x-1}{x} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} + \frac{(x-1)^3}{3x^3} + \ldots \quad \left(x > 1/2\right);$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad \left(-1 < x \leqslant 1\right);$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right) \quad (-1 \leqslant x < 1);$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots\right) \quad (|x|<1);$$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\,x^{2n+1}} = 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}+\ldots\right) \quad (|x|>1);$$

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\,x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)(2n+1)} =$$

$$= x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3x^3}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots \quad (|x|<1);$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\,x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)(2n+1)} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots\right) \quad (|x|<1);$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad (|x|<1);$$

$$\operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)\,x^{2n+1}} = \pm\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \ldots \quad (|x|>1);$$

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\right) \quad (|x|<1);$$

$$\operatorname{arcctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\,x^{2n+1}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \ldots \quad (x>1);$$

$$\operatorname{arcctg} x = \pi + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\,x^{2n+1}} = \pi + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \ldots \quad (x<-1);$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots \quad (|x|<\infty);$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots \quad (|x|<\infty);$$

$$\operatorname{th} x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}B_n x^{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} - \ldots \quad \left(|x|<\frac{\pi}{2}\right);$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n}}{(2n)!}B_n x^{2n-1} = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \ldots \quad (0<|x|<\pi);$$

$$\operatorname{arsh} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)\, x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)(2n+1)} =$$

$$= x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots \qquad (|x| < 1);$$

$$\operatorname{arch} x = \pm \left[\ln(2x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)(2n)\, x^{2n}} \right] =$$

$$= \pm \left[\ln(2x) - \frac{1}{2 \cdot 2x^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6x^6} - \ldots \right] \qquad (x > 1);$$

$$\operatorname{arth} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad (|x| < 1);$$

$$\operatorname{arcth} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\, x^{2n+1}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \ldots \qquad (|x| > 1).$$

3. Бесконечные произведения

3.1. Основные определения

В бесконечном произведении $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$ числа p_n — члены бесконечного произведения, $P_m = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m = \prod_{n=1}^{m} p_n$ — частичные произведения.

Предел P последовательности $\{P_n\}$ при $n \to \infty$ называется значением бесконечного произведения. Если P конечно и $P \neq 0$, то произведение называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*.

Если $\lim\limits_{m \to \infty} P_m = 0$, то бесконечное произведение *расходится к нулю*.

Бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если абсолютно сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$.

3.2. Свойства бесконечных произведений.

Если бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится, то $\lim\limits_{n \to \infty} p_n = 1$.

Для сходимости $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$.

Если $P = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$, $M = \sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$, то $P = e^M$.

Если в бесконечном произведении $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$, начиная с некоторого номера N_0, все числа a_n имеют один знак, то для сходимости произведения необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился.

3.3. Некоторые бесконечные произведения.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \frac{\pi}{2} \quad (\textit{формула Валлиса});$$

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2};$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right] = \frac{\pi}{4};$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{1+\dfrac{1}{n}}=\gamma \quad (\gamma \text{ — постоянная Эйлера – Маскерони});$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+(-1)^n\frac{a}{2n+1}\right]=\frac{\sqrt{2}}{a+1}\sin\frac{(a+1)\pi}{2};$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)=\frac{1}{\pi}\operatorname{ch}\frac{\pi\sqrt{3}}{2}; \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^3}\right)=\frac{1}{3\pi}\operatorname{ch}\frac{\pi\sqrt{3}}{2};$$

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{a}{2n+1}\right)\left(1-\frac{a}{2n+2}\right)\left(1+\frac{a}{n+1}\right)=2^{-a}\frac{\sin\pi a}{\pi a};$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+ae^{-2^n})=\frac{1}{2}(1+\operatorname{cth}a);$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{(-1)^{n+1}n}=\frac{\pi^2}{12}\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{(-1)^n n}=\frac{\pi}{2e};$$

$$\prod_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\left(1\pm\frac{a}{n}\right)e^{\mp a/n}=\frac{\sin\pi a}{\pi a};$$

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{a}{2n+1}\right)e^{a/(2n+1)}=\frac{\cos\pi a}{2};$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-1/p_n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x} \quad (\textit{тождество Эйлера})$$

(p_k — простые числа ($p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, …), x > 1);

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n})=\frac{1}{1-x} \quad (|x|<1);$$

$$x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)=\sin x; \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)=\cos x;$$

$$x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)=\operatorname{sh}x; \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right]=\operatorname{ch}x;$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x} \quad (|x|<1);$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{x}{3^n}\right)=\frac{\sin x}{x}.$$

V. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Комплексные числа

Алгебраическая (декартова) форма записи: $z = x + iy$ $(i^2 = -1)$;

$\mathrm{Re}\, z = x$ — *действительная часть* комплексного числа,

$\mathrm{Im}\, z = y$ — *мнимая часть* комплексного числа.

Комплексное число $\overline{z} = x - iy$ — комплексно сопряженное с числом z.

Арифметические действия:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2), \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad \left(z_2 \neq 0\right).$$

Тригонометрическая форма записи*): $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Модуль комплексного числа: $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Аргумент комплексного числа: $\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2\pi k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $\arg z = \varphi$ — главное значение аргумента.

Показательная форма записи: $z = r\,e^{i\varphi}$.

Формула Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Произведение и частное комплексных чисел в показательной и тригонометрической форме записи: $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right] \quad \left(z_2 \neq 0\right).$$

Формулы Муавра: $z^n = r^n e^{in\varphi} = r\,(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,\exp\left\{i\,\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right\} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \quad \left(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\right).$$

Степень с произвольным рациональным показателем: $z^{m/n} = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m$.

---

*) Определена для комплексного числа z, отличного от нуля.

2. Функции комплексного переменного

2.1. Основные определения.

Функция $f(z)$ называется *непрерывной* в точке z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Функция $f(z)$, непрерывная в каждой точке области G, называется *непрерывной в области* G.

Функция $f(z)$ называется *дифференцируемой* в точке z, если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z} = f'(z)$.

Функция $f(z)$ называется *аналитической в точке* z_0, если она представима степенным рядом $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n$, сходящимся в некоторой окрестности точки z_0 (a_n — комплексные числа). Функция называется *аналитической в области* G, если она аналитическая в каждой точке области.

Точка z_0 называется *нулем функции* $f(z)$, если $f(z_0) = 0$. Точка z_0 называется *нулем n-го порядка* аналитической функции $f(z)$, если $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — аналитическая и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Точка z_0 называется *особой точкой* функции $f(z)$, если $f(z)$ в этой точке не аналитическая. Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что в области $0 < | z - z_0 | < \varepsilon$ функция $f(z)$ — аналитическая.

Особая точка аналитической функции $f(z)$ называется *устранимой особой точкой*, если ее разложение в ряд Лорана не содержит отрицательных степеней $z - z_0$, т. е. $c_{-n} = 0$ ($n = 1, 2, \ldots$).

Особая точка z_0 аналитической функции $f(z)$ называется *полюсом*, если ее разложение в ряд Лорана содержит конечное число отрицательных степеней $z - z_0$ ($c_{-1} \neq 0$, $c_{-k} \neq 0$, …, $c_{-k-i} = 0$ ($i = 1, 2, \ldots$)), число k называется *порядком полюса*; если $k = 1$, то полюс называется *простым*.

Особая точка z_0 аналитической функции $f(z)$ называется *существенно особой точкой*, если ее разложение в ряд Лорана содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями $z - z_0$.

Направление обхода по контуру считается *положительным*, если область, ограниченная контуром, при обходе остается слева. В противном случае направление обхода считается *отрицательным*.

Непрерывное отображение $w = f(z)$ области G комплексной плоскости z в область комплексной плоскости w называется *конформным* в точке $z_0 \in G$, если отображение в этой точке сохраняет углы и растяжения постоянными. Непрерывное отображение области G называется *конформным*, если оно конформно в каждой точке области G.

Конформное отображение называется *конформным отображением I рода*, если оно сохраняет абсолютную величину и знак угла, и *конформным отображением II рода*, если оно меняет знак угла на противоположный.

2.2. Дифференцирование функций комплексного переменного.

Условия Коши – Римана. Чтобы однозначная в области G функция комплексного переменного была аналитической в G, необходимо и достаточно, чтобы ее действительная и мнимая части были дифференцируемыми функциями как функции двух действительных переменных и удовлетворяли условиям Коши – Римана в области G:

в декартовых координатах: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$;

в полярных координатах: $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = -r\dfrac{\partial v}{\partial r}, \quad r\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad u = u\,(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$,

$v = v\,(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

Функция $f(z)$, дифференцируемая в некоторой области G, является аналитической в этой области. Из дифференцируемости функции в точке z_0 не следует ее аналитичность в этой точке.

Правила вычисления производных функций комплексного переменного формально совпадают с правилами вычисления производных для функций действительного переменного.

2.3. Интегрирование функций комплексного переменного.

Интеграл от функции комплексного переменного определяется формулой

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (v\,dx + u\,dy),$$

где C — кусочно гладкая кривая, $f(z) = u\,(x, y) + i\,v\,(x, y)$. В правой части равенства стоят криволинейные интегралы по кривой C в координатной плоскости x, y.

Формула вычисления интеграла от функции $f(z) = u\,(x, y) + i\,v\,(x, y)$ при параметрическом задании кривой C: $z = z(t) = x(t) + i\,y(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, $x(t)$ и $y(t)$ — дифференцируемые функции): $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} \{u\dot{x} - v\dot{y}\}\,dt + i\int_{t_1}^{t_2} \{v\dot{x} + u\dot{y}\}\,dt$.

Основные свойства интеграла от функции комплексного переменного следуют из свойств криволинейных интегралов.

Неопределенный интеграл от функции комплексного переменного $f(z)$ определяется формулой $F(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta + C \quad (C = \mathrm{const})$, где $f(\zeta)$ — аналитическая функция в односвязной области G, z_0 и z — начальная и конечная точки произвольного кусочно гладкого пути интегрирования, целиком лежащего в G.

Формула перехода к пределу под знаком интеграла:

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz = \int_C \lim_{n\to\infty} f_n(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz,$$

где $f_n(z)$ $(n \in N)$ — последовательность функций, равномерно сходящаяся к функции $f(z)$ на кривой C.

Теорема Коши. $\int\limits_C f(z)\,dz = 0$, *где* $f(z)$ *— аналитическая функция в односвязной области* G, C *— произвольный замкнутый контур в области* G.

Интегральная формула Коши. $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_C \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$, где C — замкнутый кусочно гладкий контур, ограничивающий область G' и лежащий в односвязной области G, $f(\zeta)$ — аналитическая функция в области G, $z \in G'$.

Интеграл типа Коши. $\Phi(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_C \dfrac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$, где C — кусочно гладкая линия, $\varphi(\zeta)$ — непрерывная функция вдоль C; точка z не принадлежит линии C, $\Phi(z)$ определяет аналитическую функцию во всякой односвязной области G, не содержащей C.

Формула для производной интеграла типа Коши: $\Phi^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \dfrac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta$, $n \in N$.

Теорема Лиувилля. *Если* $f(z)$ *— аналитическая ограниченная функция во всей плоскости, то* $f(z) = \mathrm{const}$.

Теорема Морера. *Если* $f(z)$ *— непрерывная функция в односвязной области* G *и* $\int\limits_C f(z)\,dz = 0$ *для произвольного кусочно гладкого контура* C, *лежащего в* G, *то* $f(z)$ *— аналитическая функция.*

Формулы Сохоцкого:

$$\varphi_i(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta + \frac{1}{2}\varphi(z_0), \qquad \varphi_e(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta - \frac{1}{2}\varphi(z_0),$$ где

$\varphi(z)$ — аналитическая функция на произвольной замкнутой линии C, $z_0 \in C$, $\varphi_i(z_0)$ — предельное значение интеграла типа Коши, если $z \to z_0$ внутри контура C, $\varphi_e(z_0)$ — предельное значение, если $z \to z_0$ вне контура C.

2.4. Ряды.

Первая теорема Вейерштрасса. *Если функции* $f_n(z)$ (n = 1, 2, …) *— аналитические в области* G *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *сходится равномерно в любой замкнутой области* $\overline{G}' \subset G$, *то функция* $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *— аналитическая в области* G *и имеет место формула почленного дифференцирования* $\dfrac{d^{(k)}}{dz^{(k)}} f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{d^{(k)}}{dz^{(k)}} f_n(z)$, *где ряд в правой части сходится равномерно в* $\overline{G}'$.

Вторая теорема Вейерштрасса. *Если члены ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *непрерывны в замкнутой ограниченной области* $\overline{G}$ *и аналитичны в области* G, *то из равномерной сходимости ряда на границе области* G *следует его равномерная сходимость в* $\overline{G}$.

Ряд Тейлора: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$, где $f(z)$ — аналитическая функция в любом открытом круге с центром в точке z_0.

Формула ряда Тейлора с остаточным членом:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k + R_n(z), \quad R_n(z) = \frac{(z - z_0)^{n+1}}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Ряд Лорана: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$,

где $f(z)$ — аналитическая функция в кольце $r < |z - z_0| < R$, $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$

($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), γ —произвольная окружность $|z - z_0| = \rho$, $r < \rho < R$.

Правила действий со степенными рядами на плоскости комплексного переменного совпадают с соответствующими правилами действий для рядов с действительными членами.

2.5. Вычеты.

Вычет функции $f(z)$ относительно изолированной особой точки $z = z_0$ определяется формулой $\operatorname{res} f(z_0) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz = c_{-1}$, где $f(z)$ — аналитическая функция в области G, C — произвольный замкнутый контур, лежащий в области G, содержащий особую точку функции и не содержащий других особых точек, c_{-1} — коэффициент при $(z - z_0)^{-1}$ в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности особой точки z_0.

Теорема Коши. $\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k)$, *где* $f(z)$ — *функция аналитическая в области* G *везде, кроме конечного числа особых точек* z_k ($k = 1, 2, \ldots, n$); *замкнутый контур* $C \subset G$ *и содержит внутри себя точки* z_k.

Вычет в точке z_0 — полюсе порядка n:

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}} \left\{ (z - z_0)^n f(z_0) \right\}.$$

Вычет функции относительно бесконечно удаленной точки:

$$f(z_\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z)\, dz = -c_{-1},$$

где C^- — контур C, проходимый в отрицательном направлении (т.е. так, чтобы бесконечно удаленная точка оставалась все время слева).

П р и н ц и п а р г у м е н т а : $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z) = N - P$. Разность между количеством нулей (N) и полюсов (P) функции $f(z)$, аналитической внутри замкнутой кривой C всюду, кроме конечного числа полюсов, равен числу оборотов $\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z)$ вокруг начала координат радиус-вектора, изображающего функцию $w = f(z)$ на плоскости w, при прохождении точкой z контура C в положительном направлении (каждый нуль и полюс считаются с учетом их кратности). Интеграл, стоящий в левой части равенства, называется *логарифмическим вычетом* функции $f(z)$ относительно контура C.

Т е о р е м а Р у ш е . $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f_1' + f_2'}{f_1 + f_2}dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f'}{f_1}dz$, *где* f_1, f_2 — *аналитические функции в области* G *и на границе* Γ *области* G; $f_1(z) \neq 0$ *и* $|f_2(z)| < |f_1(z)|$ *на границе* Γ.

2.6. Конформные отображения.

Отображение $w = f(z)$ является *конформным* (*конформным* I *рода*) в области G конечной комплексной плоскости тогда и только тогда, когда функция $f(z)$ $(z \in G)$ является аналитической и $f'(z) \neq 0$ в области G.

Всякое *конформное отображение* II *рода* осуществляется посредством функции, сопряженной с аналитической функцией. Всякое отображение, осуществляемое посредством функции, сопряженной с аналитической функцией, является конформным отображением II рода.

Формула вычисления длины l образа кусочно гладкой кривой C при конформном отображении $w = f(z)$: $l = \int\limits_C |f'(z)||dz|$.

Формула вычисления площади образа S области G при конформном отображении $w = f(z)$: $S = \iint\limits_G |f'(z)|^2\, dx\, dy$.

VI. Трансцендентные функции

1. Тригонометрические функции

1.1. Некоторые значения тригонометрических функций.

Аргумент	Функция			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
0° (0)	0	1	0	не определен
15° $\left(\frac{\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
18° $\left(\frac{\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
30° $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
36° $\left(\frac{\pi}{5}\right)$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
54° $\left(\frac{3\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
60° $\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
72° $\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
75° $\left(\frac{5\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	не определен	0

1.2. Связь между тригонометрическими функциями одного аргумента.

(в приведенных формулах перед знаком радикала должен быть выбран «плюс» или «минус», в зависимости от того, в какой четверти находится угол α, а именно, таким образом, чтобы знак тригонометрической функции, стоящей в левой части, совпадал со знаком величины, стоящей в правой части равенства)

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
$\sin\alpha$	$=$	$=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$=\dfrac{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$=\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}$
$\cos\alpha$	$=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$=$	$=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$=\dfrac{1}{\sec\alpha}$	$=\dfrac{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}{\operatorname{cosec}\alpha}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$=\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$=\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$=$	$=\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$	$=\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$=\dfrac{1}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$=\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$=\dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	$=$	$=\dfrac{1}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$=\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}$
$\sec\alpha$	$=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$=\dfrac{1}{\cos\alpha}$	$=\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$	$=\dfrac{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}$	$=$	$=\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$
$\operatorname{cosec}\alpha$	$=\dfrac{1}{\sin\alpha}$	$=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$=\dfrac{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$	$=\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$	$=\dfrac{\sec\alpha}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$=$

1.3. Формулы приведения.

Функция	Аргумент			
	$\beta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = \pi \pm \alpha$	$\beta = \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = 2\pi - \alpha$
$\sin\beta =$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta =$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,\beta =$	$\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\beta =$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

Тригонометрические функции суммы и разности двух углов:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta; \qquad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha\ \mathrm{tg}\,\beta}; \qquad \mathrm{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\ \mathrm{ctg}\,\beta \mp 1}{\mathrm{ctg}\,\beta \pm \mathrm{ctg}\,\alpha}.$$

Тригонометрические функции двойных, тройных и половинных аргументов:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\,\alpha}; \qquad \mathrm{ctg}\,2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\,\alpha - 1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha};$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$\mathrm{tg}\,3\alpha = \frac{3\,\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}^3\,\alpha}{1 - 3\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}; \qquad \mathrm{ctg}\,3\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^3\,\alpha - 3\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{3\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha - 1};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}; \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}};$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

В формулах половинного угла знаки перед радикалами берутся в зависимости от знака тригонометрической функции, стоящей в левой части равенства.

Преобразование суммы (разности) тригонометрических функций в произведение:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}; \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\beta - \alpha}{2};$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(45^\circ - \alpha); \qquad \cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(45^\circ - \alpha);$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha \pm \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta};\qquad \operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2\operatorname{cosec}2\alpha;\qquad \operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=-2\operatorname{ctg}2\alpha;$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2};\qquad 1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$1+\sin\alpha=2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right);\qquad 1-\sin\alpha=2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$1\pm\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ\pm\alpha)}{\cos\alpha};$$

$$1\pm\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{\cos(\alpha\mp\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\qquad \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\pm1=\frac{\cos(\alpha\mp\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$1-\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{\cos2\alpha}{\cos^2\alpha};\qquad 1-\operatorname{ctg}^2\alpha=-\frac{\cos2\alpha}{\sin^2\alpha};$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta};$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta};$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\ \sin^2\alpha;\qquad \operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\ \cos^2\alpha.$$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\frac{1}{4}\left[\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)\right];$$

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma=\frac{1}{4}\left[-\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)\right];$$

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma=\frac{1}{4}\left[\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\right];$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\frac{1}{4}\left[\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)\right].$$

Соотношения между обратными тригонометрическими функциями:

$$\arcsin x=-\arcsin(-x)=\frac{\pi}{2}-\arccos x=\operatorname{arctg}\left(x\big/\sqrt{1-x^2}\right);$$

$$\arccos x=\pi-\arccos(-x)=\frac{\pi}{2}-\arcsin x=\operatorname{arcctg}\left(x\big/\sqrt{1-x^2}\right);$$

$$\operatorname{arctg}x=-\operatorname{arctg}(-x)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg}x=\arcsin\left(x\big/\sqrt{1+x^2}\right);$$

$$\operatorname{arcctg}x=\pi-\operatorname{arcctg}(-x)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x=\arccos\left(x\big/\sqrt{1+x^2}\right).$$

2. Гиперболические функции

Определения:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}; \qquad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x};$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}; \qquad \operatorname{cosech} = \frac{1}{\operatorname{sh} x}.$$

Основные соотношения:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \qquad \operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1;$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}}; \qquad \operatorname{ch} x = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}} = \frac{\operatorname{cth} x}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}};$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}{\operatorname{ch} x}; \qquad \operatorname{cth} x = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}.$$

Формулы приведения:

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y; \qquad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}; \qquad \operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cth} x \operatorname{cth} y \pm 1}{\operatorname{cth} y \pm \operatorname{cth} x};$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x; \qquad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x;$$

$$\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}; \qquad \operatorname{cth} 2x = \frac{\operatorname{cth}^2 x + 1}{2 \operatorname{cth} x};$$

$$\operatorname{ch} x - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}; \qquad \operatorname{ch} x + 1 = 2 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2};$$

$$\operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x}; \qquad \operatorname{cth} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{sh} x};$$

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2};$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x + y}{2} \operatorname{ch} \frac{x - y}{2}; \qquad \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x + y}{2} \operatorname{sh} \frac{x - y}{2};$$

$$\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}; \qquad \operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y};$$

$$2 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \operatorname{ch}(x + y) + \operatorname{ch}(x - y); \qquad 2 \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \operatorname{ch}(x + y) - \operatorname{ch}(x - y);$$

$$2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \operatorname{sh}(x + y) + \operatorname{sh}(x - y).$$

Соотношения между обратными гиперболическими функциями:

$$\operatorname{arsh} x \pm \operatorname{arsh} y = \operatorname{arsh}\left(x\sqrt{y^2 + 1} \pm y\sqrt{x^2 + 1}\right) = \operatorname{arch}\left(\sqrt{x^2 + 1}\sqrt{y^2 + 1} \pm xy\right);$$

$$\operatorname{arch} x \pm \operatorname{arch} y = \operatorname{arch}\left(xy \pm \sqrt{x^2 - 1}\sqrt{y^2 - 1}\right) = \operatorname{arsh}\left(y\sqrt{x^2 - 1} \pm x\sqrt{y^2 - 1}\right);$$

$$\operatorname{arth} x \pm \operatorname{arth} y = \operatorname{arth} \frac{x \pm y}{1 \pm xy}.$$

Соотношения между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$\cos x = \operatorname{ch} ix; \qquad \operatorname{ch} x = \cos ix;$$
$$\sin x = -i \operatorname{sh} ix; \qquad \operatorname{sh} x = -i \sin ix;$$
$$\operatorname{tg} x = -i \operatorname{th} ix; \qquad \operatorname{th} x = -i \operatorname{tg} ix;$$
$$\operatorname{ctg} x = i \operatorname{cth} ix; \qquad \operatorname{cth} x = i \operatorname{ctg} ix.$$

Соотношения между обратными тригонометрическими и обратными гиперболическими функциями:

$$\arccos x = i \operatorname{arch} x; \qquad \operatorname{arch} x = i \arccos x;$$
$$\arcsin x = -i \operatorname{arsh} ix; \qquad \operatorname{arsh} x = -i \arcsin ix;$$
$$\operatorname{arctg} x = -i \operatorname{arth} ix; \qquad \operatorname{arth} x = -i \operatorname{arctg} ix;$$
$$\operatorname{arcctg} x = i \operatorname{arcth} ix; \qquad \operatorname{arcth} x = i \operatorname{arcctg} ix.$$

3. Гамма-функция

Формула Эйлера: $\Gamma(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!\,n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)} \quad (z \neq 0,-1,-2,\ldots)$.

Интегральное представление (*интеграл Эйлера* II *рода*):

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \quad (\operatorname{Re} z > 0).$$

Разложение в ряд:

$$\ln\Gamma(1+z) = -\ln(1+z) + z(1-\gamma) + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left[\zeta(n)-1\right]\frac{z^n}{n} \quad (|z| < 2).$$

Бесконечное произведение Эйлера:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\,e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right],$$

где $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} - \ln n\right) \approx 0,5772156649$ — постоянная Эйлера – Маскерони.

Формула умножения Гаусса:

$$\Gamma(nz) = (2\pi)^{(1-n)/2}\,n^{nz-1/2}\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right).$$

Рекуррентная формула: $\Gamma(n+z) = (n-1+z)(n-2+z)\ldots(1+z)z\Gamma(z)$.

Формулы симметрии: $\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\dfrac{\pi}{z\,\sin\pi z}$;

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int\limits_0^\infty \frac{t^{z-1}}{1+t}dt \quad (0 < \operatorname{Re} z < 1).$$

Формула Стирлинга:

$$\Gamma(z) \approx e^{-z}\,z^{z-1/2}\sqrt{2}\left[1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}-\frac{139}{51840z^3}-\ldots\right] \quad (|\arg z| < \pi).$$

Формула Валлиса:

$$\frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1)} \approx \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{8n}+\frac{1}{128n^2}-\ldots\right) \quad (n\to\infty).$$

Частные значения: $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Бета-функция: $B(z,w) \equiv \dfrac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$, $B(z,w) = B(w,z)$;

$$B(z,w) = \int\limits_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt = \int\limits_0^\infty \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}}dt \quad \text{(интеграл Эйлера I рода).}$$

Логарифмическая производная гамма-функции (*пси-функция*):

$$\psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Интегральные представления (при $\operatorname{Re} z > 0$):

$$\psi(z) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}} \right) dt = \int_0^\infty \left(e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^z} \right) \frac{dt}{t} = -\gamma + \int_0^1 \frac{1-t^{z-1}}{1-t}\, dt .$$

Разложение в ряд: $\psi(z) = -\gamma - \dfrac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z}{n(z+n)}$;

$$\psi(1+z) = -\gamma + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \zeta(n)\, z^{n-1} \qquad (|z| < 1).$$

Формула умножения: $\psi(nz) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \psi\left(z + \dfrac{k}{n} \right) + \ln n$.

Рекуррентная формула: $\psi(n+z) = \dfrac{1}{n-1+z} + \dfrac{1}{n-2+z} + \ldots + \dfrac{1}{z} + \psi(z)$.

Формула симметрии: $\psi(z) - \psi(1-z) = -\pi \operatorname{ctg} \pi z$.

Частные значения: $\psi(n) = -\gamma + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k} \quad (n \geqslant 2)$, $\qquad \psi\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\gamma - \ln 2$.

Неполная гамма-функция:

$$\gamma(a,z) = \int_0^z e^{-t}\, t^{a-1} dt \quad (\operatorname{Re} a > 0,\ a = \mathrm{const}), \qquad \Gamma(a,z) \equiv \Gamma(a) - \gamma(a,z) = \int_z^\infty e^{-t}\, t^{a-1}\, dt .$$

Рекуррентная формула: $\gamma(a+1,z) = a\,\gamma(a,z) - z^a e^{-z}$.

Формула дифференцирования: $\dfrac{d^n}{dz^n}\left[z^{-a}\, \Gamma(a,z) \right] = (-1)^n z^{-a-n}\, \Gamma(a+n,z)$.

Связь с интегралом вероятностей: $\gamma\left(\dfrac{1}{2}, z^2\right) = \sqrt{\pi} \operatorname{erf} z, \quad \Gamma\left(\dfrac{1}{2}, z^2\right) = \sqrt{\pi} \operatorname{erfc} z$.

4. Функции Бесселя

Дифференциальное уравнение Бесселя:

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}+\left(z^2-\nu^2\right)w=0;$$

решения: *функции Бесселя первого рода* $J_{\pm\nu}(z)$, *второго рода* $Y_\nu(z)$ и *третьего рода* $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ (или *функции Ганкеля*).

Соотношения между функциями Бесселя:

$$Y_\nu(z)=\frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}.$$

Если ν — целое, то под правой частью понимается ее предельное значение.

$$H_\nu^{(1)}(z)=J_\nu(z)+iY_\nu(z)\qquad H_\nu^{(2)}(z)=J_\nu(z)-iY_\nu(z)$$

$$J_{-n}(z)=(-1)^nJ_n(z)\qquad Y_{-n}(z)=(-1)^nY_n(z).$$

Разложение в ряд: $J_\nu(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(z/2\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}$; $J_{-n}(z)=\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(z/2\right)^{2k-n}}{k!\left(k-n\right)!}$;

$$Y_n(z)=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z^2}{4}\right)^k+\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{z}{2}\right)J_n(z)-$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\left[\psi(k+1)+\psi(n+k+1)\right]\frac{(-z^2/4)^k}{k!\left(n+k\right)!}.$$

Интегральные представления:

$$J_\nu(z)=\frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^\pi\cos\left(z\cos\theta\right)\sin^{2\nu}\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{2\,(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^1\left(1-t^2\right)^{\nu-1/2}\cos zt\,dt\qquad\left(\operatorname{Re}\nu>-1/2\right);$$

$$Y_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin\left(z\sin\theta-\nu\theta\right)d\theta-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left\{e^{\nu t}+e^{-\nu t}\cos\left(\nu\pi\right)\right\}e^{-z\operatorname{sh}t}dt\qquad\left(\left|\arg z\right|<\frac{\pi}{2}\right);$$

$$J_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos\left(z\sin\theta-\nu\theta\right)d\theta-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{-z\operatorname{sh}(t-\nu t)}dt\qquad\left(\left|\arg z\right|<\frac{\pi}{2}\right);$$

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos\left(z\sin\theta-n\theta\right)d\theta.$$

Дифференцирование (здесь f — любая из функций J, Y, $H^{(1)}$, $H^{(2)}$):

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m\left[z^\nu f_\nu(z)\right]=z^{\nu-m}f_{\nu-m}(z);$$

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m\left[z^{-\nu} f_\nu(z)\right]=(-1)^m z^{-\nu-m}f_{\nu+m}(z).$$

Произведение функций Бесселя:

$$J_\nu(z)\,J_\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(z/2)^{\nu+\mu+2k}\,\Gamma(\nu+\mu+2k+1)}{k!\,\Gamma(\mu+k+1)\,\Gamma(\nu+k+1)\,\Gamma(\nu+\mu+k+1)}.$$

Рекуррентное соотношение (здесь f — любая из функций J, Y, $H^{(1)}$, $H^{(2)}$):

$$f_{\nu-1}(z) + f_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}\,f_\nu(z).$$

Связь между функциями Бесселя полуцелого порядка:

$$J_{-n-1/2}(z) = (-1)^{n+1}\,Y_{n+1/2}(z); \qquad Y_{-n-1/2}(z) = (-1)^n\,J_{n+1/2}(z).$$

Связь с элементарными функциями:

$$J_{n+1/2}(z) = (-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,z^{n+1}\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\left[\frac{\sin z}{z}\right];$$

$$Y_{n+1/2}(z) = (-1)^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,z^{n+1}\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\left[\frac{\cos z}{z}\right];$$

$$J_\nu(z)\,J_{-\nu+1}(z) + J_{-\nu}(z)\,J_{\nu+1}(z) = \frac{2\sin\nu\pi}{\pi z};$$

$$J_\nu(z)\,Y_{\nu-1}(z) - Y_\nu(z)\,J_{\nu-1}(z) = \frac{2}{\pi z}.$$

5. Модифицированные функции Бесселя *I* и *K*

Дифференциальное уравнение:

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}-\left(z^2+\nu^2\right)w=0;$$

решения: *модифицированные функции Бесселя* $I_{\pm\nu}(z)$ и $K_\nu(z)$ (*функция Макдональда*).

Связь с функциями Бесселя и соотношения между модифицированными функциями Бесселя:

$$I_\nu(z)=\begin{cases} e^{-\frac{i\pi\nu}{2}}J_\nu(ze^{\frac{i\pi}{2}}) & \left(-\pi<\arg z\leqslant\frac{\pi}{2}\right);\\ e^{\frac{3}{2}i\pi\nu}J_\nu(ze^{-\frac{3}{2}i\pi}) & \left(\frac{\pi}{2}<\arg z\leqslant\pi\right);\end{cases}$$

$$K_\nu(z)=\frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\left[I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)\right];$$

если ν — целое, то в правой части равенства стоит ее предельное значение.

$$I_{-n}(z)=I_n(z);\qquad K_{-n}(z)=K_n(z);\qquad I_n(-z)=(-1)^nI_n(z).$$

Разложение в ряд: $$I_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)};$$

$$K_n(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(-\frac{z^2}{4}\right)+(-1)^{n+1}\ln\left(\frac{z}{2}\right)I_n(z)+$$

$$+\frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\left[\psi(k+1)+\psi(n+k+1)\right]\frac{\left(z^2/4\right)^k}{k!(n+k)!}.$$

Интегральные представления:

$$I_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{z\cos\theta}\cos\nu\theta\,d\theta-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{-z\,\mathrm{ch}(t-\nu t)}\,dt\qquad\left(|\arg z|<\frac{\pi}{2}\right);$$

$$K_\nu(z)=\frac{\sqrt{\pi}\,(z/2)^\nu}{\Gamma(1/2+\nu)}\int_1^\infty e^{-zt}\left(t^2-1\right)^{\nu-1/2}dt\qquad\left(\mathrm{Re}\,z>-\frac{1}{2},\ |\arg z|<\frac{\pi}{2}\right);$$

$$I_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{z\cos\theta}\cos n\theta\,d\theta.$$

Рекуррентные соотношения:

$$I_{\nu-1}(z)-I_{\nu+1}(z)=\frac{2\nu}{z}I_\nu(z);\qquad K_{\nu-1}(z)-K_{\nu+1}(z)=-\frac{2\nu}{z}K_\nu(z).$$

Дифференцирование (f — любая из функций I_ν, $e^{i\pi\nu}K_\nu$):

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m\left[z^\nu f_\nu(z)\right]=z^{\nu-m}f_{\nu-m}(z);\qquad\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m\left[z^{-\nu}f_\nu(z)\right]=z^{-\nu-m}f_{\nu+m}(z).$$

Связь модифицированных функций Бесселя с элементарными функциями:

$$I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\mathrm{sh}\,z;$$

$$I_\nu(z)\,I_{-\nu+1}(z) - I_{-\nu}(z)\,I_{\nu-1}(z) = -\frac{2\sin(\nu\pi)}{\pi z};$$

$$K_{\nu+1}(z)\,I_\nu(z) + K_\nu(z)\,I_{\nu+1}(z) = \frac{1}{z}.$$

6. Вырожденные гипергеометрические функции

Уравнение Куммера: $z\dfrac{d^2w}{dz^2}+(c+z)\dfrac{dw}{dz}-aw=0$;

общее решение: $w = A\Phi(a,\ c;\ z) + B\Psi(a,\ c;\ z)$ (A и B — произвольные постоянные).

Функция Куммера $\Phi(a,\ c;\ z)$ (иногда обозначают $M(a,\ c;\ z)$):

$$\Phi(a,c;z)=1+\frac{a}{c}\frac{z}{1!}+\frac{a\left(a+1\right)}{c\left(c+1\right)}\frac{z^2}{2!}+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n\prod\limits_{i=0}^{n-1}(a+i)}{n!\prod\limits_{i=0}^{n-1}(c+i)}.$$

Функция $\Psi(a,\ c;\ z)$ (иногда обозначают $U(a,\ c;\ z)$):

$$\Psi(a,c;z)=\frac{\pi}{\sin\pi c}\left\{\frac{\Phi(a,c;z)}{\Gamma(1+a-c)\,\Gamma(c)}-z^{1-c}\,\frac{\Phi(1+a-c,2-c;z)}{\Gamma(a)\,\Gamma(2-c)}\right\}.$$

Интегральные представления:

$$\Phi(a,c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(a)}\int\limits_0^1 e^{zt}t^{a-1}\left(1-t\right)^{c-a-1}dt;$$

$$\Psi(a,c;z)=\frac{e^z}{\Gamma(a)}\int\limits_1^{\infty}e^{-zt}\left(t-1\right)^{a-1}t^{c-a-1}dt.$$

Дифференцирование:

$$\frac{d^n\Phi}{dz^n}=\frac{\Gamma(a+n)\,\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)\,\Gamma(a)}\Phi(a+n,c+n;z);$$

$$\frac{d^n\Psi}{dz^n}=(-1)^n\,\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}\Psi(a+n,c+n;z).$$

Рекуррентные формулы:

Формула Куммера: $\Phi(a,c;z)=e^z\Phi(c-a,c;-z)$;

$$c\left(c-1\right)\Phi(a,c-1;z)-c\left(c-1+z\right)\Phi(a,c;z)+\left(c-a\right)z\,\Phi(a,c+1;z)=0;$$

$$c\,\Phi(a,c;z)-c\,\Phi(a-1,c;z)-z\,\Phi(a,c+1;z)=0;$$

$$\left(a-1+z\right)\Phi(a,c;z)+(c-a)\,\Phi(a-1,c;z)-(c-1)\,\Phi(a,c-1;z)=0;$$

$$\left(??\,c+z\right)\Phi(a,c;z)-\left(c-a\right)z\,\Phi(a+1,c;z)+\left(c+1\right)\Phi(a,c-1;z)=0;$$

$$\left(a-c+1\right)\Phi(a,c;z)-a\,\Phi(a+1,c;z)+\left(c-1\right)\Phi(a,c-1;z)=0;$$

$$\left(c-a\right)\Phi(a-1,c;z)+(2a-c+z)\,\Phi(a,c;z)-a\,\Phi(a+1,c;z)=0;$$

$$\left(c-a-1\right)\Psi(a,c-1;z)-\left(c-1+z\right)\Psi(a,c;z)+z\,\Psi(a,c+1;z)=0;$$

$$\Psi(a,c;z)-a\,\Psi(a+1,c;z)-\Psi(a,c-1;z)=0;$$

$$\left(c-a\right)\Psi(a,c;z)-z\,\Psi(a,c+1;z)+\Psi(a-1,c;z)=0;$$

$$\left(a-1+z\right)\Psi(a,c;z)-\Psi(a-1,c;z)+\left(a-c+1\right)\Psi(a,c-1;z)=0;$$

$$\left(a+z\right)\Psi(a,c;z)+a\left(c-a-1\right)\Psi(a+1,c;z)-z\,\Psi(a,c+1;z)=0;$$

$$\Psi(a-1,c;z)-\left(2a-c+z\right)\Psi(a,c;z)+a\left(a-c+1\right)\Psi(a+1,c;z)=0.$$

Некоторые частные случаи:

$$\Phi(a,a;z) = e^z; \qquad \Phi(1,2;2z) = \frac{e^z}{z}\operatorname{sh} z;$$

$$\Phi(1,2;-2iz) = \frac{e^{-iz}}{z}\sin z; \qquad \Phi\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2};-z^2\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2z}\operatorname{erf} z;$$

$$\Phi\left(a,a+1;-z\right) = a\,z^{-a}\gamma(a,z); \qquad \Phi\left(\nu+\frac{1}{2},2\nu+1;2z\right) = \Gamma(1+\nu)\,e^z\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} I_\nu(z);$$

$$\Psi\left(1-a,1-a;z\right) = e^z\Gamma(a,z); \qquad \Psi\left(\nu+\frac{1}{2},2\nu+1;2z\right) = \frac{e^z}{\sqrt{\pi}}(2z)^{-\nu} K_\nu(z);$$

$$\Psi\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};z^2\right) = \sqrt{\pi}\,e^{z^2}\operatorname{erfc} z.$$

Уравнение Уиттекера: $\dfrac{d^2w}{dz^2} + \left[-\dfrac{1}{4} + \dfrac{\varkappa}{2} + \dfrac{\left(1/4-\mu^2\right)}{z^2}\right]w = 0$;

решения: функции Уиттекера $M_{\varkappa,\mu}(z)$ и $W_{\varkappa,\mu}(z)$.

Связь между функциями Уиттекера:

$$W_{\varkappa,\mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\varkappa\right)} M_{\varkappa,\mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\varkappa\right)} M_{\varkappa,-\mu}(z).$$

Связь с вырожденными гипергеометрическими функциями:

$$M_{\varkappa,\mu}(z) = e^{-\frac{z}{2}}\, z^{\frac{1}{2}+\mu}\,\Phi\left(\mu-\varkappa+\frac{1}{2},2\mu+1;z\right);$$

$$W_{\varkappa,\mu}(z) = e^{-\frac{z}{2}}\, z^{\frac{1}{2}+\mu}\,\Psi\left(\mu-\varkappa+\frac{1}{2},2\mu+1;z\right).$$

7. Некоторые интегральные функции

Интеграл вероятностей: $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-t^2} dt; \quad \operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z)$.

Разложение в ряд:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}.$$

Дифференцирование: $\operatorname{erf}'(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}$.

Интегралы Френеля:

$$C(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^z \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(4n+1)(2n)!};$$

$$S(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^z \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(4n+3)(2n+1)!}.$$

Связь с интегралом вероятностей:

$$C(z) + iS(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \operatorname{erf}(e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{z}); \qquad C(z) - iS(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \operatorname{erf}(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{z}).$$

Дзета-функция Римана: $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad (\operatorname{Re} z > 1)$.

Разложение в бесконечное произведение: $\zeta(z) = \prod_p \left(1 - p^{-z}\right)^{-1} \quad (\operatorname{Re} z > 1)$,

где бесконечное произведение вычисляется по всем простым числам p.

Интегральное представление:

$$\left(1 - 2^{1-z}\right)\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int\limits_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t + 1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0);$$

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int\limits_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 1).$$

Рекуррентные соотношения:

$$\zeta(1-z) = \frac{2}{(2\pi)^z} \cos\frac{\pi z}{2} \Gamma(z) \zeta(z); \qquad z(z+1) \frac{\zeta(z+2)\zeta(1-z)}{\zeta(z)\zeta(-1-z)} = -4\pi^2.$$

Частные значения:

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}; \qquad \zeta(-2n) = 0; \qquad \zeta(2n) = (-1)^{n-1} 2^{2n-1} \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} B_{2n};$$

$$\zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n} \quad (B_k \text{ – числа Бернулли});$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}; \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}; \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}; \qquad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}.$$

Интегральная показательная функция:

$$\mathrm{Ei}(z) = -\Gamma(0, ze^{-i\pi}) = -\int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt\,.$$

Разложение в ряд:

$$\mathrm{Ei}(z) = \gamma - i\pi + \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n \cdot n!}; \qquad \mathrm{Ei}(-x) = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n \cdot n!}\,.$$

Интегральный логарифм: $\mathrm{li}(z) = \int_0^z \frac{dt}{\ln t}$.

Связь с интегральной показательной функцией: $\mathrm{li}(z) = \mathrm{Ei}(\ln z)$; $\mathrm{Ei}(z) = \mathrm{li}(e^z)$.

Интегральный синус и интегральный косинус:

$$\mathrm{si}(z) = \int_\infty^z \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{1}{2i}\left[\mathrm{Ei}(iz) - \mathrm{Ei}(-iz)\right];$$

$$\mathrm{ci}(z) = \int_\infty^z \frac{\cos t}{t}\,dt = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Ei}(iz) + \mathrm{Ei}(-iz)\right].$$

Другие обозначения: $\mathrm{Si}(z) = \mathrm{si}(z) + \frac{\pi}{2} = \int_0^z \frac{\sin t}{t}\,dt$; $\mathrm{Ci}(x) = \mathrm{ci}(z)$.

Разложение в ряд:

$$\mathrm{si}(z) = -\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!};$$

$$\mathrm{ci}(z) = \gamma + \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n(2n)!}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Справочники

1. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции, т. 1, 2, 3. — М.: Наука, 1969, 1973, 1974.
2. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.
3. **Двайт Г. Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1978.
4. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1984.
5. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1981, 1983.
6. **Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.** Специальные функции.— М.: Наука, 1977.

Учебники и монографии

1. **Александров П. С.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1979.
2. **Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.** Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
3. **Ефимов Н. В.** Высшая геометрия. — М.: Наука, 1978.
4. **Ильин В. А., Позняк Э. Г.** Аналитическая геометрия.— М.: Наука, 1969, 1971.
5. **Ильин В. А., Позняк Э. Г.** Основы математического анализа, т. 1, 2. — М.: Наука, 1971, 1980.
6. **Кочин Н. Е.** Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. — М.: Изд. АН СССР, 1961.
7. **Кудрявцев Л. Д.** Математический анализ, т. 1, 2. — М.: Высшая школа, 1980.
8. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973.
9. **Маркушевич А. И.** Краткий курс теории аналитических функций. — М.: Наука, 1978.
10. **Никольский С. М.** Курс математического анализа, т. 1, 2. — М.: Наука, 1975.
11. **Привалов И. И.** Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1984.
12. **Погорелов А. В.** Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1978.
13. **Погорелов А. В.** Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1974.
14. **Постников М. М.** Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1973.
15. **Свешников А. Г., Тихонов А. Н.** Теория функций комплексной переменной. — М.: Наука, 1979.
16. **Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.** Курс современного анализа, т. I, II. — М.: Физматгиз, 1962, 1963.