

Задача 21 на ЕГЭ по математике

Здесь приведены задачи №21 (в прошлом С6), которые предлагались на ЕГЭ по математике, а также на диагностических работах МИОО начиная с 2010 года.

Многие задачи снабжены решениями. При этом не ставилась цель сделать решения максимально лаконичными и технически совершенными. Цель совсем другая: как можно яснее и отчётливее излагать идеи, лежащие в основе решения каждой задачи.

Решая задачу на экзамене или олимпиаде, мы во многих случаях не обязаны объяснять, из каких соображений построен нужный пример, найдено нужное число и т. д. Здесь, тем не менее, мы всегда стараемся давать соответствующие объяснения. Наводящие соображения (не нужные, повторяем, при записи решения) набраны более мелким шрифтом внутри значков ► и ◀.

1. (ЕГЭ, 2015) На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 2970. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 16 заменили на число 61).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в три раза меньше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в пять раз меньше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел.

→ [Ответ и решение](#)

2. (МИОО, 2015) Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из натуральных чисел, причём $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ при всех натуральных n .

а) Может ли выполняться равенство $4a_5 = 7a_4$?

б) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 7a_4$?

в) При каком наибольшем натуральном n может выполняться равенство

$$6na_{n+1} = (n^2 + 24)a_n ?$$

→ [Ответ](#)

3. (МИОО, 2015) Известно, что a, b, c и d — попарно различные двузначные натуральные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d} = \frac{7}{19}$?

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 3b$ и $c > 6d$?

→ [Ответ и решение](#)

4. (МИОО, 2015) В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 50, а вместе солдат меньше чем 120. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 7, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

- а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.
- б) Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат в одном ряду?
- в) Сколько в роте может быть солдат?

→ [Ответ и решение](#)

5. (МИОО, 2015) Красный карандаш стоит 17 рублей, синий — 13 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 495 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на пять.

- а) Можно ли купить при таких условиях 32 карандаша?
- б) Можно ли купить при таких условиях 35 карандашей?
- в) Какое наибольшее число карандашей можно купить при таких условиях?

→ [Ответ и решение](#)

6. (ЕГЭ, 2014) Даны последовательные нечётные числа $1, 3, 5, \dots, 77, 79$. Из них выбирают произвольно семь чисел, располагают их в порядке возрастания и четвёртое по величине число (медиану ряда) принимают за A , а среднее арифметическое всех семи чисел принимают за B .

- а) Может ли $B - A$ быть равным $2/7$?
- б) Может ли $B - A$ быть равным $3/7$?
- в) Найти наибольшее возможное значение $B - A$.

→ [Ответ и решение](#)

7. (ЕГЭ, 2014) Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку — целое число баллов от 0 до 12 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.

- а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $1/25$?
- б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $1/35$?
- в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

→ [Ответ и решение](#)

8. (ЕГЭ, 2014) На сайте проводится опрос, кого из 134 футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста — доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 17 посетителей сайта, и рейтинг первого футболиста стал равен 41. Увидев это, Вася отдал свой голос за другого футболиста. Чему теперь стал равен рейтинг первого футболиста?

б) Вася проголосовал за некоторого футболиста. Могла ли после этого сумма рейтингов всех футболистов уменьшиться не менее чем на 27?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма рейтингов всех футболистов?

→ [Ответ и решение](#)

9. (ЕГЭ, 2014) а) Можно ли представить число 2014 в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

б) Можно ли представить число 199 в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

в) Найдите наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы пяти различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр.

→ [Ответ и решение](#)

10. (ЕГЭ, 2014) В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 4 письма, или 21 письмо, причём и тех и других юношей было не менее двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.

а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?

б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?

в) Пусть все девушки получили различное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Какое наибольшее количество девушек в такой группе?

→ [Ответ и решение](#)

11. (ЕГЭ, 2014) Из первых 22 натуральных чисел 1, 2, ..., 22 выбрали $2k$ различных чисел. Выбранные числа разбили на пары и посчитали суммы чисел в каждой паре. Оказалось, что все полученные суммы различны и не превосходят 27.

а) Может ли получиться так, что сумма всех $2k$ выбранных чисел равняется 170 и в каждой паре одно из чисел ровно в три раза больше другого?

б) Может ли число k быть равным 11?

в) Найдите наибольшее возможное значение числа k .

→ [Ответ и решение](#)

12. (*ЕГЭ, 2014*) На окружности некоторым образом расставили натуральные числа от 1 до 21 (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.

- а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 11?
- б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 10?
- в) Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого наибольшего целого числа k можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше k ?

→ [Ответ и решение](#)

13. (*ЕГЭ, 2014*) Целое число S является суммой не менее трёх последовательных членов непостоянной арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел.

- а) Может ли S равняться 8?
- б) Может ли S равняться 1?
- в) Найдите все значения, которые может принимать S .

→ [Ответ и решение](#)

14. (*МИОО, 2014*) По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.

- а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?
- б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?
- в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

→ [Ответ и решение](#)

15. (*МИОО, 2013*) Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

- а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.
- б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?
- в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

→ [Ответ и решение](#)

16. (*ЕГЭ, 2013*) Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a > b > c > d$.

- а) Найдите числа a, b, c и d , если $a + b + c + d = 16$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 32$.
- б) Может ли быть $a + b + c + d = 29$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 29$?
- в) Пусть $a + b + c + d = 1400$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1400$. Найдите количество возможных значений числа a .

→ [Ответ и решение](#)

17. (ЕГЭ, 2013) Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

- а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 82?
- б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 83?
- в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

→ [Ответ и решение](#)

18. (ЕГЭ, 2013) Каждое из чисел a_1, a_2, \dots, a_{350} равно 1, 2, 3 или 4. Обозначим

$$S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{350}, \quad S_2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{350}^2,$$
$$S_3 = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{350}^3, \quad S_4 = a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_{350}^4.$$

Известно, что $S_1 = 569$.

- а) Найдите S_4 , если ещё известно, что $S_2 = 1307$, $S_3 = 3953$.
- б) Может ли $S_4 = 4857$?
- в) Пусть $S_4 = 4785$. Найдите все значения, которые может принимать S_2 .

→ [Ответ и решение](#)

19. (ЕГЭ, 2013) Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет записан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

- а) На доске выписан набор $-8, -5, -4, -3, -1, 1, 4$. Какие числа были задуманы?
- б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 2 раза. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?
- в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

→ [Ответ и решение](#)

20. (ЕГЭ, 2013) Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n , выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n , а остальные числа, равные n , стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

- а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8, 10.
- б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22?
- в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41.

→ [Ответ и решение](#)

21. (ЕГЭ, 2013) Имеются каменные глыбы: 50 штук по 800 кг, 60 штук по 1000 кг и 60 штук по 1500 кг (раскалывать глыбы нельзя).

а) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 60 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

б) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 38 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

в) Какое наименьшее количество грузовиков, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, понадобится, чтобы вывезти все эти глыбы одновременно, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

→ [Ответ и решение](#)

22. (ЕГЭ, 2013) Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 14?

б) Каково наибольшее значение n , если сумма всех данных чисел меньше 900?

в) Найдите все возможные значения n , если сумма всех данных чисел равна 123.

→ [Ответ и решение](#)

23. (МИОО, 2012) Данна арифметическая прогрессия (с разностью, отличной от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 9.

а) Может ли в такой прогрессии быть 10 членов?

б) Докажите, что число её членов меньше 100.

в) Докажите, что число членов такой прогрессии не больше 72.

г) Приведите пример такой прогрессии с 72 членами.

→ [Ответ и решение](#)

24. (ЕГЭ, 2012) Рассматриваются конечные непостоянные арифметические прогрессии, состоящие из натуральных чисел, которые не имеют простых делителей, отличных от 2 и 3.

а) Может ли в этой прогрессии быть три числа?

б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

→ [Ответ и решение](#)

25. (ЕГЭ, 2012) В ряд выписаны числа $1^2, 2^2, \dots, (N - 1)^2, N^2$. Между ними произвольным образом расставляют знаки + и - и находят получившуюся сумму. Может ли такая сумма равняться:

а) 4, если $N = 12$?

б) 0, если $N = 69$?

в) 0, если $N = 64$?

г) 5, если $N = 90$?

→ [Ответ и решение](#)

26. (ЕГЭ, 2012) Число S таково, что для любого представления S в виде суммы положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит 1, эти слагаемые можно разделить на две группы так, что каждое слагаемое попадёт только в одну группу и сумма слагаемых в каждой группе не превосходит 20.

- а) Может ли число S быть равным 40?
- б) Может ли число S быть больше $39\frac{1}{21}$?
- в) Найдите максимально возможное значение S .

→ [Ответ и решение](#)

27. (ЕГЭ, 2012) По окружности расставляют 48 ненулевых целых чисел с общей суммой 20. При этом любые два стоящих рядом числа должны отличаться не более чем на 7 и среди любых четырёх подряд идущих чисел должно быть хотя бы одно положительное.

- а) Среди таких 48 чисел найдите наибольшее возможное количество положительных.
- б) Среди таких 48 чисел найдите наименьшее возможное количество положительных.

→ [Ответ и решение](#)

28. (ЕГЭ, 2012) Натуральные числа от 1 до 12 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности полученных сумм и полученные 6 чисел складывают.

- а) Может ли в результате получиться 0?
- б) Может ли в результате получиться 1?
- в) Какое наименьшее возможное значение полученного результата?

→ [Ответ и решение](#)

29. (ЕГЭ, 2012) Учитель в школе ставит отметки от 1 до 5. Средний балл ученика равен 4,625.

- а) Какое наименьшее количество оценок может иметь ученик?
- б) Если у ученика заменить оценки 3, 3, 5, 5 на две четвёрки, то на сколько максимально может увеличиться средний балл?

→ [Ответ и решение](#)

30. (ЕГЭ, 2012) Назовем кусок веревки *стандартным*, если его длина не меньше 168 см, но не больше 175 см.

- а) Некоторый моток веревки разрезали на 24 стандартных куска, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число одинаковых стандартных кусков можно было бы разрезать тот же моток веревки?
- б) Найдите такое наименьшее число l , что любой моток веревки, длина которого больше l см, можно разрезать на стандартные куски.

→ [Ответ и решение](#)

31. (ЕГЭ, 2012) Имеется 33 коробки массой 19 кг каждая и 27 коробок массой 49 кг каждая. Все эти коробки раскладываются по двум контейнерам. Пусть S — модуль разности суммарных масс коробок в контейнерах. Найдите наименьшее значение S :

а) если дополнительно требуется, что в контейнерах должно находиться одинаковое количество коробок;

б) без дополнительного условия пункта а.

→ [Ответ и решение](#)

32. (ЕГЭ, 2012) Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{3}{11}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{3}{7}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

→ [Ответ и решение](#)

33. (ЕГЭ, 2012) Каждое из чисел $1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11$ по одному записывают на 10 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел $1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11$. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные 10 сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

→ [Ответ и решение](#)

34. (Пробный ЕГЭ, 2012, Москва) Дано последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 10, либо в 7 раз. Сумма всех членов последовательности равна 163.

а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?

б) Какое наибольшее число членов может быть в этой последовательности?

→ [Ответ и решение](#)

35. (Пробный ЕГЭ, 2012, СПб) На доске написано число 7. Раз в минуту Вася дописывает на доску одно число: либо вдвое большее какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух чисел, написанных на доске (таким образом, через одну минуту на доске появится второе число, через две — третье и т. д.).

а) Может ли в какой-то момент на доске оказаться число 2012?

б) Может ли в какой-то момент сумма всех чисел на доске равняться 63?

в) Через какое наименьшее время на доске может появиться число 784?

→ [Ответ и решение](#)

36. (*ФЦТ, 2012*) Имеется арифметическая прогрессия, состоящая из пятидесяти чисел.

- а) Может ли эта прогрессия содержать ровно 6 целых чисел?
- б) Может ли эта прогрессия содержать ровно 29 целых чисел?
- в) Найдите наименьшее число n , при котором эта прогрессия **не** может содержать ровно n целых чисел.

→ [Ответ и решение](#)

37. (*МИОО, 2012*) В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний 2046.

- а) Может ли в последовательности быть три члена?
- б) Может ли в последовательности быть четыре члена?
- в) Может ли в последовательности быть меньше 2046 членов?

→ [Ответ и решение](#)

38. (*МИОО, 2011*) Все члены геометрической прогрессии — различные натуральные числа, заключённые между числами 210 и 350.

- а) Может ли такая прогрессия состоять из четырёх членов?
- б) Может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

→ [Ответ и решение](#)

39. (*ЕГЭ, 2011*) Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и

- а) пять;
- б) четыре;
- в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

→ [Ответ и решение](#)

40. (*ЕГЭ, 2011*) Бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из различных натуральных чисел, первый член которой меньше 10, не содержит ни одного числа вида $n(n+1)/2$, $n \in \mathbb{N}$. Какое наименьшее значение может принимать сумма первых 10 членов этой прогрессии?

→ [Ответ и решение](#)

41. (*ЕГЭ, 2011*) Набор состоит из 33 натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 5. Среднее арифметическое любых 27 чисел этого набора меньше 2.

- а) Может ли такой набор содержать ровно 13 единиц?
- б) Может ли такой набор содержать менее 13 единиц?
- в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 28.

→ [Ответ и решение](#)

42. (ЕГЭ, 2011) На доске написано более 42, но менее 54 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -7 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 6, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -12 .

- а) Сколько чисел написано на доске?
- б) Каких чисел больше: положительных или отрицательных?
- в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

→ [Ответ и решение](#)

43. (ЕГЭ, 2010) Каждое из чисел 11, 12, ..., 19 умножают на каждое из чисел 3, 4, ..., 8 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

→ [Ответ и решение](#)

44. (ЕГЭ, 2010) Перед каждым из чисел 6, 7, ..., 11 и 9, 10, ..., 17 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю сумму и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

→ [Ответ и решение](#)

Ответы и решения

1. [Условие]

ОТВЕТ: а) $\underbrace{41, 41, \dots, 41}_{68}, 91, 91$; б) нет; в) 693.

РЕШЕНИЕ. Пусть $\overline{a_1 b_1}, \dots, \overline{a_n b_n}$ — исходные числа, причём ни одна из цифр a_i, b_i не равна нулю. Тогда получившиеся числа суть $\overline{b_1 a_1}, \dots, \overline{b_n a_n}$.

Обозначим $A = a_1 + \dots + a_n$ и $B = b_1 + \dots + b_n$. Тогда сумма исходных чисел равна $10A + B$, а сумма получившихся чисел равна $10B + A$.

а) Годятся, например, числа $\underbrace{41, \dots, 41}_{68}, 91, 91$. В самом деле,

$$68 \cdot 41 + 91 + 91 = 2970, \quad 68 \cdot 14 + 19 + 19 = 990.$$

► Покажем, как найден пример. Просто решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 10A + B = 2970, \\ 10B + A = 990 \end{cases}$$

и находим $A = 290$, $B = 70$. После этого положим $n = 70$, $b_1 = \dots = b_{70} = 1$ и подберём нужные a_i . Разумеется, легко построить и другие примеры. ◀

б) Нет, такого случиться не могло. В самом деле, предположим, что сумма получившихся чисел в пять раз меньше суммы исходных чисел:

$$\begin{cases} 10A + B = 2970, \\ 10B + A = 594, \end{cases}$$

откуда $A = a_1 + \dots + a_n = 294$ и $B = b_1 + \dots + b_n = 30$. Поскольку все цифры $b_i \geq 1$, из последнего равенства имеем $n \leq 30$. Но тогда, с учётом условия $a_i \leq 9$, получаем $a_1 + \dots + a_n \leq 270$ — противоречие.

в) Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 10A + B = 2970, \\ 10B + A = S. \end{cases}$$

Мы ищем минимальное значение S .

Из системы имеем $99B = 10S - 2970$, так что S делится на 99 (поскольку $2970 = 99 \cdot 30$). Значит, $S = 99k$ и $B = 10k - 30$. Из второго уравнения системы получим тогда $A = 300 - k$.

Итак,

$$\begin{cases} a_1 + \dots + a_n = 300 - k, \\ b_1 + \dots + b_n = 10k - 30. \end{cases}$$

С учётом неравенств $a_i \leq 9$ и $b_i \geq 1$ получим

$$\begin{cases} 9n \geq 300 - k, \\ n \leq 10k - 30, \end{cases}$$

откуда $300 - k \leq 9n \leq 90k - 270$, что приводит к неравенству $k \geq 7$.

Рассмотрим минимально возможное $k = 7$. Тогда

$$\begin{cases} a_1 + \dots + a_n = 293, \\ b_1 + \dots + b_n = 40, \end{cases}$$

и подходящий пример легко строится: $n = 40$; $b_1 = \dots = b_{40} = 1$; $a_1 = \dots = a_{30} = 9$, $a_{31} = \dots = a_{39} = 2$, $a_{40} = 5$. Соответствующие исходные числа равны

$$\underbrace{91, \dots, 91}_{30}, \underbrace{21, \dots, 21}_9, 51,$$

а получившиеся из них числа дают минимально возможную сумму $S_{\min} = 99k_{\min} = 99 \cdot 7 = 693$.

2. [Условие]

ОТВЕТ: а) да; б) нет; в) при $n = 5$.

3. [Условие]

ОТВЕТ: а) да; б) нет; в) $79/21$.

РЕШЕНИЕ. а) Записав $7/19$ как $21/57$, легко строим пример: $a = 10$, $b = 11$, $c = 20$, $d = 37$.

б) Предположим, что такое возможно:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 11 \cdot \frac{a+c}{b+d}.$$

После очевидных преобразований имеем:

$$ad(10b - d) + bc(10d - b) = 0.$$

Заметим, что $10b$ и $10d$ — трёхзначные числа, поэтому $10b - d > 0$ и $10d - b > 0$. Пришли к противоречию: сумма двух положительных чисел оказалась равна нулю.

в) По условию $a \geq 3b + 1$, $c \geq 6d + 1$. Отсюда, в частности, $b \leq 32$. С учётом данных неравенств имеем:

$$\begin{aligned} \frac{a+c}{b+d} &\geq \frac{(3b+1)+(6d+1)}{b+d} = 3 + \frac{3d+2}{b+d} \geq 3 + \frac{3d+2}{32+d} = 3 + \frac{3d+96-94}{d+32} = \\ &= 6 - \frac{94}{d+32} \geq 6 - \frac{94}{10+32} = \frac{79}{21}. \end{aligned}$$

Равенство достигается в том случае, когда все неравенства обращаются в равенства, то есть при $d = 10$, $b = 32$, $c = 61$, $a = 97$. Итак, наименьшее значение нашей дроби равно $79/21$.

4. [Условие]

ОТВЕТ: а) 51 и 68; б) нет; в) 117 или 119.

РЕШЕНИЕ. Пусть a — число солдат в первом взводе, b — число солдат во втором взводе. Очевидно, что

$$51 \leq a < b \leq 68. \quad (1)$$

а) Подходящий пример: $a = 51 = 17 \cdot 3$, $b = 68 = 17 \cdot 4$ (при этом число солдат в роте равно $51 + 68 = 119 < 120$). Тогда роту можно построить в 7 рядов по 17 человек; первые три ряда — первый взвод, остальные четыре ряда — второй взвод.

б) Предположим, что рота построена требуемым образом по 11 человек в ряд. Тогда a и b делятся на 11. С учётом неравенств (1) имеем единственную возможность $a = 55$, $b = 66$. Но тогда $a + b = 121 > 120$ — противоречие.

в) Пусть рота построена требуемым образом по k человек в ряд ($k \geq 8$). Тогда a и b делятся на k . Из неравенств (1) следует, что $k \leq 17$. Остаётся перебрать 10 вариантов с $k = 8, 9, \dots, 17$;

в каждом из них на отрезке $[51; 68]$ может быть самое большее два числа a и b . Обозначаем $r = a + b$ число солдат в роте.

- 1) $k = 8 \Rightarrow a = 56, b = 64, r = 120$.
- 2) $k = 9 \Rightarrow a = 54, b = 63, r = 117$.
- 3) $k = 10 \Rightarrow a = 60$, и не существует $b \in [51; 68]$.
- 4) $k = 11$ — невозможно по пункту 6).
- 5) $k = 12 \Rightarrow a = 60$, и не существует $b \in [51; 68]$.
- 6) $k = 13 \Rightarrow a = 52, b = 65, r = 117$.
- 7) $k = 14 \Rightarrow a = 56$, и не существует $b \in [51; 68]$.
- 8) $k = 15 \Rightarrow a = 60$, и не существует $b \in [51; 68]$.
- 9) $k = 16 \Rightarrow a = 64$, и не существует $b \in [51; 68]$.
- 10) $k = 17 \Rightarrow a = 51, b = 68, r = 119$.

С учётом условия $r < 120$ мы видим, что в роте может быть 117 или 119 солдат.

5. [Условие]

ОТВЕТ: а) да; б) нет; в) 33.

РЕШЕНИЕ. Пусть куплено x красных и y синих карандашей. Тогда

$$17x + 13y \leq 495 \quad (2)$$

при дополнительном условии

$$-5 \leq y - x \leq 5. \quad (3)$$

Пусть $k = x + y$ — число купленных карандашей. Выразив отсюда $y = k - x$ и подставив в неравенства (2) и (3), получим систему

$$\begin{cases} 13k + 4x \leq 495, \\ \frac{k-5}{2} \leq x \leq \frac{k+5}{2}. \end{cases} \quad (4)$$

а) Пусть, например, $x = 18$ и $y = 14$. Тогда $17 \cdot 18 + 13 \cdot 14 = 488$, и оба неравенства (2) и (3) выполнены. Значит, 32 карандаша купить можно.

► Пример находим, полагая $k = 32$ в (4):

$$\begin{cases} 416 + 4x \leq 495, \\ \frac{27}{2} \leq x \leq \frac{37}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 19, \\ 14 \leq x \leq 18, \end{cases}$$

и можно взять, например, $x = 18$. ◀

б) Пусть $k = 35$. Система (4) принимает вид:

$$\begin{cases} 455 + 4x \leq 495, \\ \frac{30}{2} \leq x \leq \frac{40}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 10, \\ 15 \leq x \leq 20. \end{cases}$$

Полученная система не имеет решений. Значит, 35 карандашей купить нельзя.

в) Поскольку 32 карандаша купить можно, а 35 — нельзя, то остаётся проверить значения $k = 33$ и $k = 34$.

Если $k = 33$, то система (4) принимает вид:

$$\begin{cases} 429 + 4x \leq 495, \\ \frac{28}{2} \leq x \leq \frac{38}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 16, \\ 14 \leq x \leq 19. \end{cases}$$

Решения есть: например, $x = 14$ (и тогда $y = 19$). Значит, 33 карандаша купить можно.

Если же $k = 34$, то

$$\begin{cases} 442 + 4x \leq 495, \\ \frac{29}{2} \leq x \leq \frac{39}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 13, \\ 14 \leq x \leq 19. \end{cases}$$

Решений нет. Значит, 34 карандаша купить нельзя.

Итак, можно купить самое большее 33 карандаша.

6. [Условие]

ОТВЕТ: а) да; б) нет; в) 198/7.

РЕШЕНИЕ. Обозначим a, b, c, d, e, f и g выбранные семь чисел, расположенные в порядке возрастания. Тогда

$$A = d, \quad B = \frac{a+b+c+d+e+f+g}{7}, \quad B - A = \frac{a+b+c+e+f+g-6d}{7}.$$

а) Пусть выбраны числа 1, 3, 5, 11, 15, 17, 27. Тогда, как нетрудно проверить, $B - A = 2/7$.

► Нам нужно, чтобы $a + b + c + e + f + g = 6d + 2$. Видим, что левая часть даёт при делении на 6 остаток 2. Следя за остатком, и подбираем подходящие числа. ◀

б) Предположим, что $B - A = 3/7$. Тогда $a + b + c + e + f + g = 6d + 3$. Слева стоит чётное число (сумма шести нечётных чисел), а справа — нечётное. Противоречие.

в) Нам нужно найти максимальное значение величины $S = a + b + c + e + f + g - 6d$. Имеем:

$$S = (g - d) + (f - d) + (e - d) - (d - c) - (d - b) - (d - a).$$

Ясно, что $g \leq 79$, $f \leq 77$, $e \leq 75$, $d \geq 7$, $c \geq 5$, $b \geq 3$, $a \geq 1$, поэтому

$$g - d \leq 72, \quad f - d \leq 70, \quad e - d \leq 68, \quad d - c \geq 2, \quad d - b \geq 4, \quad d - a \geq 6,$$

так что

$$S \leq 72 + 70 + 68 - 2 - 4 - 6 = 198.$$

Оценка точна: при $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 7$, $e = 75$, $f = 77$, $g = 79$ имеем $S = 198$. Следовательно, наибольшее значение S равно 198, а наибольшее значение $B - A$ равно 198/7.

7. [Условие]

ОТВЕТ: а) нет; б) да; в) 6/7.

РЕШЕНИЕ. Пусть $a < b < c < d < e < f < g$ — оценки экспертов. Обозначим

$$x = b + c + d + e + f, \quad y = a + g.$$

Тогда старый рейтинг равен $(x + y)/7$, новый рейтинг равен $x/5$, а модуль разности рейтингов

$$\Delta = \left| \frac{x}{5} - \frac{x+y}{7} \right| = \frac{|2x-5y|}{35}.$$

а) Предположим, что $\Delta = \frac{1}{25}$. Тогда $|2x-5y| = \frac{35}{25} = \frac{7}{5}$. Получилось, что целое число $|2x-5y|$ равно нецелому — противоречие

б) Пусть эксперты поставили оценки 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7. Тогда старый рейтинг равен 24/7, новый рейтинг равен 17/5 и $\Delta = 1/35$.

► Пример строится элементарно: нужно подобрать оценки так, чтобы $|2x - 5y| = 1$. ◀

в) Оценим величину $2x - 5y$. Для этого запишем её следующим образом:

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= 2(b + c + d + e + f) - 5(a + g) = \\ &= (b - a) + (c - a) + (d - a) + (e - a) + (f - a) - \\ &\quad - (g - b) - (g - c) - (g - d) - (g - e) - (g - f). \end{aligned}$$

Заметим, что выполнены неравенства:

$$\begin{array}{ll} 1 \leq b - a \leq 7, & 5 \leq g - b \leq 11, \\ 2 \leq c - a \leq 8, & 4 \leq g - c \leq 10, \\ 3 \leq d - a \leq 9, & 3 \leq g - d \leq 9, \\ 4 \leq e - a \leq 10, & 2 \leq g - e \leq 8, \\ 5 \leq f - a \leq 11, & 1 \leq g - f \leq 7. \end{array}$$

В силу этих неравенств имеем оценку сверху

$$2x - 5y \leq 7 + 8 + 9 + 10 + 11 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1 = 30$$

и оценку снизу

$$2x - 5y \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 - 11 - 10 - 9 - 8 - 7 = -30.$$

Следовательно, $|2x - 5y| \leq 30$ и

$$\Delta \leq \frac{30}{35} = \frac{6}{7}.$$

Равенство достигается в том случае, когда в оценке сверху или снизу имеет место равенство, то есть, например, при выставлении экспертами оценок 0, 7, 8, 9, 10, 11, 12 (другой пример — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 12).

Итак, наибольшее возможное значение Δ равно $6/7$.

8. [Условие]

ОТВЕТ: а) 39; б) да; в) 167.

РЕШЕНИЕ. Пусть *первичный рейтинг* футболиста есть доля голосов за него, выраженная в процентах. Тогда по условию рейтинг — это округлённый до целого числа первичный рейтинг.

а) Пусть за первого футболиста проголосовало k человек. Имеем:

$$40,5 \leq \frac{100k}{17} < 41,5 \Leftrightarrow \frac{1377}{200} \leq k < \frac{1411}{200},$$

откуда $k = 7$. После голосования Васи первичный рейтинг первого футболиста станет равен

$$\frac{100 \cdot 7}{18} = 38,88\dots,$$

а рейтинг станет равен 39.

б) ► Чувствуется, что такое возможно: если до голосования Васи у многих футболистов первичный рейтинг полуцелый, то он округляется в большую сторону; после голосования Васи первичный рейтинг у них станет чуть менее полуцелого и округлится в меньшую сторону, и тем самым суммарный рейтинг сильно упадёт.

Мы построим сразу «максимальный» пример, в котором первичный рейтинг *всех* футболистов до голосования Васи полуцелый. Данный пример пригодится нам в пункте в). ◀

Предположим, что до Васи проголосовало 200 человек: 67 из них — за первого футболиста, и по одному — за каждого из остальных 133 футболистов. Тогда первичный рейтинг первого футболиста равен $100 \cdot 67 / 200 = 33,5$, а у остальных — $100 \cdot 1 / 200 = 0,5$. Соответственно, рейтинг первого футболиста равен 34, а у остальных — 1. Суммарный рейтинг равен $34 + 133 \cdot 1 = 167$.

Пусть Вася проголосовал за первого футболиста. Первичный рейтинг первого футболиста стал равен $100 \cdot 68 / 201 \approx 33,8$, так что его рейтинг остался равен 34. Первичный рейтинг остальных футболистов стал равен $100 \cdot 1 / 201 \approx 0,498$, и их рейтинги обратились в нуль. Суммарный рейтинг стал равен 34, то есть уменьшился на $133 > 27$.

в) Сумма первичных рейтингов всех футболистов, очевидно, равна 100. Рейтинг футболиста может превосходить его первичный рейтинг самое большое на 0,5. Поэтому суммарный рейтинг всех 134 футболистов не превосходит

$$100 + 0,5 \cdot 134 = 167.$$

Пример пункта б) показывает, что суммарный рейтинг может быть равен 167. Следовательно, 167 — наибольшее значение суммарного рейтинга.

9. [Условие]

ОТВЕТ: а) да; б) нет; в) 110.

РЕШЕНИЕ. а) Например, $2014 = 2006 + 8$.

б) Предположим, что число 199 является суммой двух натуральных чисел с одинаковой суммой цифр. Тогда одно из этих чисел — трёхзначное (в противном случае их сумма не превосходит $99 + 99 = 198$), а другое — двузначное (в противном случае для некоторых цифр x и y имеем $199 = \overline{19x} + y$ и $y = 1 + 9 + x \geq 10$ — противоречие).

Итак, для некоторых цифр a, b, c, d имеем

$$199 = \overline{1ab} + \overline{cd} \Rightarrow \overline{ab} + \overline{cd} = 99 \Rightarrow (10a + b) + (10c + d) = 99 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10(a + c) + (b + d) = 99 \Rightarrow \begin{cases} a + c = 9, \\ b + d = 9, \end{cases}$$

откуда

$$a + b + c + d = 18. \quad (5)$$

Кроме того, $1 + a + b = c + d$, то есть

$$c + d - a - b = 1. \quad (6)$$

Складывая равенства (5) и (6), получим $2(c + d) = 19$ — противоречие, поскольку слева стоит чётное число, а справа — нечётное. Следовательно, число 199 нельзя представить в виде суммы двух натуральных чисел с одинаковой суммой цифр.

в) Пусть $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ — различные натуральные числа с одинаковой суммой цифр S , и число x является их суммой: $x = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

Заметим, что $a_1 \geq S$. Кроме того, числа a_1, \dots, a_5 дают одинаковые остатки при делении на 9, и поэтому разность любых двух этих чисел не меньше 9. Следовательно,

$$x \geq S + (S + 9) + (S + 18) + (S + 27) + (S + 36) = 5S + 90,$$

и если $S \geq 4$, то $x \geq 5 \cdot 4 + 90 = 110$. Оценка точна: $4 + 13 + 22 + 31 + 40 = 110$.

Остаётся рассмотреть случаи $S \leq 3$.

— Если $S = 1$, то $x \geq 1 + 10 + 100 + 1000 + 10000 = 11111 > 110$.

- Если $S = 2$, то $x \geq 2 + 11 + 20 + 101 + 110 = 244 > 110$.
 - Если $S = 3$, то $x \geq 3 + 12 + 21 + 30 + 102 = 168 > 110$.
- Значит, наименьшее возможное x равно 110.

10. [Условие]

Ответ: а) да; б) 17; в) 41.

РЕШЕНИЕ. Пусть x юношей отправили по 4 письма и y юношам отправили по 21 письму. Тогда $x + y = n$ — количество девушек, $4x + 21y = p$ — количество отправленных писем.

а) Пусть, например, $x = 14$ и $y = 3$. Тогда $n = 17$ и $p = 119 = 17 \cdot 7$. Очевидно, что 119 писем можно распределить между 17 девушками так, чтобы каждая девушка получила 7 писем.

► Пример найден так. Имеем: $4x + 21y = 7(x + y)$ или $3x = 14y$. Теперь можно взять $x = 14$ и $y = 3$. ◀

б) Пусть каждая девушка получила k писем: $4x + 21y = kn$. Подставив сюда $x = n - y$, получим $17y = (k - 4)n$. Заметим, что $k - 4$ меньше 17, поскольку

$$k = \frac{4x + 21y}{n} = \frac{4x + 21y}{x + y} < \frac{21x + 21y}{x + y} = 21$$

(в этой цепочке неравенство строгое, так как по условию $x \geq 2$). Значит, n делится на 17 и потому $n \geq 17$. Пример с $n = 17$ приведён выше. Следовательно, наименьшее возможное количество девушек равно 17.

в) Пусть девушки получили k_1, k_2, \dots, k_n писем (считаем, что $k_1 < k_2 < \dots < k_n$). Тогда $k_1 \geq 0, k_2 \geq 1, \dots, k_n \geq n - 1$, откуда

$$p = k_1 + k_2 + \dots + k_n \geq 1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2}.$$

С другой стороны,

$$p = 4x + 21y = 4x + 21(n - x) = 21n - 17x \leq 21n - 17 \cdot 2 = 21n - 34.$$

Получаем неравенство

$$\frac{n(n - 1)}{2} \leq 21n - 34 \Leftrightarrow n^2 - 43n + 68 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{43 - \sqrt{1577}}{2} \leq n \leq \frac{43 + \sqrt{1577}}{2}.$$

В частности,

$$n < \frac{43 + \sqrt{1600}}{2} = \frac{83}{2},$$

то есть $n \leq 41$.

Покажем, что эта оценка точна. Пусть $n = 41$. Положим $x = 2$. Тогда $y = 39$, и число отправленных писем $p = 4 \cdot 2 + 21 \cdot 39 = 827$. Остаётся положить $k_1 = 0, k_2 = 1, \dots, k_{40} = 39, k_{41} = 47$; действительно,

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = 1 + \dots + 39 + 47 = 827.$$

Иными словами, первая девушка не получила ни одного письма, вторая получила одно письмо, ..., 40-я получила 39 писем и 41-я получила 47 писем.

► Соображения, приводящие к примеру, просты. Если $n = 41$, то число писем

$$p \geq 0 + 1 + \dots + 40 = \frac{41 \cdot 40}{2} = 820.$$

С другой стороны, $p = 21n - 17x = 861 - 17x$, и проходит $x = 2$: тогда $p = 861 - 17 \cdot 2 = 827 > 820$. ◀

Таким образом, в группе может быть самое большое 41 девушки.

11. [Условие]

ОТВЕТ: а) нет; б) нет; в) 10.

РЕШЕНИЕ. а) Выпишем все возможные пары, в которых одно число в три раза больше другого:

$$(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12), (5, 15), (6, 18).$$

Сумма выписанных чисел равна $84 < 170$. Значит, сумма выбранных чисел не может равняться 170.

б) Предположим, что $k = 11$, то есть выбраны все числа от 1 до 22. Их сумма

$$S = 1 + 2 + \dots + 22 = 253.$$

Поскольку все суммы в парах различны и не превосходят 27, для S имеем оценку:

$$S \leq 27 + 26 + \dots + 17 = 242.$$

Полученное противоречие показывает, что k не может равняться 11.

в) Двадцать чисел от 1 до 20 можно разбить на пары так, чтобы суммы во всех парах были различны и не превосходили 27:

$$(20, 7); (19, 6); (18, 8); (17, 5); (16, 4); (15, 9); (14, 3); (13, 10); (12, 2); (11, 1).$$

Следовательно, наибольшее возможное значение k равно 10.

► За кадром остаются рассуждения, показывающие, что искать надо начиная с $k = 10$. Именно, пусть выбрано $2k$ чисел. Тогда их сумма

$$S \geq 1 + 2 + \dots + 2k = \frac{2k(2k+1)}{2} = 2k^2 + k.$$

С другой стороны, поскольку все суммы в парах различны и не превосходят 27, имеем

$$S \leq 27 + 26 + \dots + (27 - k + 1) = \frac{55k - k^2}{2}.$$

Шанс найти пример имеется только в том случае, если

$$2k^2 + k \leq \frac{55k - k^2}{2} \Leftrightarrow k \leq \frac{54}{5},$$

так что $k = 10$ уже может подойти. ◀

12. [Условие]

ОТВЕТ: а) нет; б) да; в) 6.

РЕШЕНИЕ. а) Разность числа 11 и любого из оставшихся чисел по модулю не превосходит 10, поэтому, какова бы ни была расстановка чисел по окружности, все разности не могут оказаться не меньше 11.

б) Расставим числа по окружности в следующем порядке: 1, 12, 2, 13, 3, 14, 4, 15, 5, 16, 6, 17, 7, 18, 8, 19, 9, 20, 10, 21, 11. Легко видеть, что разность любых двух соседних чисел по модулю не меньше 10.

в) Числа 1, 2, ..., 7 назовём *основными*. При любой расстановке чисел 1, 2, ..., 21 по окружности реализуется одна из двух ситуаций.

1. Какие-то два основных числа стоят рядом или через одно. Тогда разность этих основных чисел не превосходит 6.
2. Каждое третье число — основное. Тогда между какими-то двумя основными числами окажется число 8, и тогда одна из соответствующих разностей будет не больше 6.

Таким образом, при любой расстановке найдётся разность, не превосходящая 6, поэтому $k \leq 6$. С другой стороны, для расстановки 1, 8, 15, 2, 9, 16, 3, 10, 17, 4, 11, 18, 5, 12, 19, 6, 13, 20, 7, 14, 21 все разности не меньше 6. Значит, наибольшее значение k равно 6.

13. [Условие]

ОТВЕТ: а) да; б) нет; в) $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$.

РЕШЕНИЕ. Называем число *достижимым*, если оно может быть значением S .

а) Число 8 достижимо:

$$(-7) + (-6) + (-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 8.$$

► Приведённый пример не является самым простым (возможно, скажем, $-1 + 1 + 3 + 5 = 8$), однако он иллюстрирует идею решения пункта в) данной задачи. ◀

б) Предположим, что сумма k членов арифметической прогрессии $a, a+d, \dots, a+(k-1)d$ равна 1:

$$\frac{2a + (k-1)d}{2} \cdot k = 1 \Leftrightarrow k(2a + (k-1)d) = 2.$$

Отсюда следует, что k — делитель двойки; но это противоречит условию $k \geq 3$. Поэтому число 1 не достижимо.

в) Рассуждения, аналогичные пункту б), показывают, что число -1 не достижимо. Число 0 достижимо: $-1 + 0 + 1 = 0$.

Пусть $n \geq 2$. Тогда, по аналогии с примером пункта а), число n является суммой арифметической прогрессии с разностью 1:

$$n = (-n+1) + (-n+2) + \dots + (-1) + 0 + 1 + \dots + (n-2) + (n-1) + n,$$

в которой количество слагаемых равно $2n \geq 4$. Аналогично, для $n \leq -2$ имеем сумму как минимум четырёх слагаемых:

$$n = n + (n+1) + (n+2) + \dots + (-1) + 0 + 1 + \dots + (-n-2) + (-n-1).$$

Следовательно, любое целое n , отличное от ± 1 , является достижимым.

14. [Условие]

ОТВЕТ: а) да; б) нет; в) 7.

РЕШЕНИЕ. а) Да, все НОД могут быть равны единице. Пример:

	11	18	
12		17	
	13		10
	14		9
15		16	
			19

б) Допустим, что все НОД попарно различны. Их десять, поэтому среди них найдётся двузначное число. Если два различных числа имеют двузначный НОД, то хотя бы одно из них больше 20. Но в нашем наборе такого числа нет — противоречие.

в) Из предыдущего пункта следует, что количество попарно различных НОД не превосходит девяти. Далее, НОД двух чисел данного набора не может равняться 7 или 8, так как на 7 делится только 14, а на 8 — только 16. Значит, количество попарно различных НОД не более семи.

Пример расстановки, при которой количество различных НОД равно семи:

	10	15	
14		9	
	11		18
	13		12
17		16	

В самом деле, $\text{НОД}(18, 9) = 9$, $\text{НОД}(9, 15) = 3$, $\text{НОД}(15, 10) = 5$, $\text{НОД}(10, 14) = 2$, $\text{НОД}(16, 12) = 4$, $\text{НОД}(12, 18) = 6$, а остальные НОД равны 1.

15. [Условие]

ОТВЕТ: а) 1, 2, 3; б) нет; в) 8.

РЕШЕНИЕ. Пусть a_1, \dots, a_n — исходная арифметическая прогрессия. Математик сначала вычисляет разность

$$r_n = (a_1 + \dots + a_n)^2 - (a_1^2 + \dots + a_n^2),$$

а потом — разность

$$r_{n+1} = (a_1 + \dots + a_{n+1})^2 - (a_1^2 + \dots + a_{n+1}^2).$$

Преобразуем вторую разность:

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= ((a_1 + \dots + a_n) + a_{n+1})^2 - (a_1^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2) = \\ &= (a_1 + \dots + a_n)^2 + 2(a_1 + \dots + a_n)a_{n+1} + a_{n+1}^2 - (a_1^2 + \dots + a_n^2) - a_{n+1}^2 = \\ &= r_n + 2(a_1 + \dots + a_n)a_{n+1}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$r_{n+1} - r_n = 2(a_1 + \dots + a_n)a_{n+1}. \quad (7)$$

а) Нужный пример: 1, 2, 3. В самом деле,

$$(1 + 2 + 3)^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2) = 22, \quad (1 + 2 + 3 + 4)^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = 70;$$

вторая величина больше первой на 48.

► Этот пример легко находится следующим образом. Согласно (7) имеем:

$$r_{n+1} - r_n = 2(a_1 + \dots + a_n)a_{n+1} = 48 \Rightarrow (a_1 + \dots + a_n)a_{n+1} = 24.$$

Видим, что a_{n+1} есть делитель числа 24. Подобрать нужные числа дальше несложно. ◀

б) Предположим, что $n = 12$. Пусть d — разность прогрессии. Из (7) получим:

$$1440 = r_{13} - r_{12} = 2(a_1 + \dots + a_{12})a_{13} = (2a_1 + 11d) \cdot 12 \cdot (a_1 + 12d),$$

откуда

$$(2a_1 + 11d)(a_1 + 12d) = 120.$$

Вспомним теперь, что по условию прогрессия состоит из неотрицательных целых чисел и является возрастающей; значит, $a_1 \geq 0$ и $d \geq 1$. Но тогда левая часть полученного равенства не меньше $11 \cdot 12 = 132$ — противоречие. Следовательно, n не может равняться 12.

в) Имеем:

$$1440 = r_{n+1} - r_n = 2(a_1 + \dots + a_n)a_{n+1} = (2a_1 + (n-1)d) \cdot n \cdot (a_1 + nd). \quad (8)$$

Из неравенств $a_1 \geq 0$ и $d \geq 1$ следует оценка

$$(2a_1 + (n-1)d) \cdot n \cdot (a_1 + nd) \geq (n-1) \cdot n \cdot n = (n-1)n^2,$$

так что

$$(n-1)n^2 \leq 1440.$$

Отсюда $n \leq 11$ (и это ещё раз доказывает невозможность $n = 12$ в пункте б). Далее, из равенства (8) мы видим, что 1440 делится на n . Значит, $n = 11$ невозможно.

Пусть $n = 10$. Из (8) получаем:

$$(2a_1 + 9d)(a_1 + 10d) = 144.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть последнего равенства не меньше $18 \cdot 20 > 144$. Поэтому $d = 1$:

$$(2a_1 + 9)(a_1 + 10) = 144 \Rightarrow 2a_1^2 + 29a_1 - 54 = 0.$$

Дискриминант данного квадратного уравнения, равный 1273, не является квадратом целого числа. Поэтому квадратное уравнение не имеет целочисленных корней. Значит, $n = 10$ невозможно.

Пусть $n = 9$. Из (8) получаем:

$$(a_1 + 4d)(a_1 + 9d) = 80.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше $8 \cdot 18 > 80$. При $d = 1$ имеем квадратное уравнение

$$a_1^2 + 13a_1 - 44 = 0,$$

у которого нет целых корней. Значит, n не может равняться 9.

Пример нужной прогрессии с $n = 8$ построить можно. Из (8) имеем:

$$(2a_1 + 7d)(a_1 + 8d) = 180.$$

Годятся числа $a_1 = 4$ и $d = 1$. Таким образом, подходящая прогрессия: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

► Пример найден из тех же самых соображений: если $d \geq 2$, то левая часть не меньше $14 \cdot 16 > 180$. Значит, $d = 1$. Тогда $(2a_1 + 7)(a_1 + 8) = 180$, и остаётся решить это квадратное уравнение. ◀

Итак, исходная прогрессия может содержать самое большее 8 членов.

16. [Условие]

ОТВЕТ: а) 7, 5, 3, 1; б) нет; в) 348.

РЕШЕНИЕ. Введём обозначения:

$$x = a + b, \quad y = a - b, \quad z = c + d, \quad t = c - d.$$

Очевидно, что $x > y$ и $x > z > t$. В этих обозначениях имеем:

$$a + b + c + d = x + z, \quad a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = xy + zt.$$

a) Согласно условию имеем систему:

$$\begin{cases} x + z = 16, \\ xy + zt = 32. \end{cases} \quad (9)$$

Заметим, что, поскольку $x - y = 2b$ есть число чётное, числа x и y одной чётности (то есть оба чётные или оба нечётные одновременно). Аналогично, числа z и t одной чётности; отсюда и из неравенства $z > t$ следует, что $z \geq 3$. А из первого уравнения системы (9) и из неравенства $x > z$ следует, что $z \leq 7$. Рассмотрим все возможные случаи для z .

- $z = 3$. Тогда $x = 13$, $t = 1$, и второе уравнение системы (9) принимает вид $13y + 3 = 32$ или $13y = 29$. Это невозможно, так как 29 не делится на 13.
- $z = 4$. Тогда $x = 12$, $t = 2$. Второе уравнение системы (9) принимает вид $12y + 8 = 32$, откуда $y = 2$. Легко находим отсюда: $a = 7$, $b = 5$, $c = 3$, $d = 1$.
- $z = 5$. Тогда $x = 11$, и второе уравнение системы (9) принимает вид $11y + 5t = 32$. Если $t = 1$, то $11y = 27$; если $t = 3$, то $11y = 17$; и то, и другое невозможно.
- $z = 6$. Тогда $x = 10$, и второе уравнение системы (9) принимает вид $10y + 6t = 32$ или $5y + 3t = 16$. Поскольку y чётно (как и x), имеется единственная возможность $y = 2$; тогда и $t = 2$. Находим: $a = 6$, $b = 4$, $c = 4$, $d = 2$. Это невозможно в силу условия $b > c$.
- $z = 7$. Тогда $x = 9$, и второе уравнение системы (9) принимает вид $9y + 7t = 32$. Поскольку t нечётно (как и z), может быть лишь $t = 1$ или $t = 3$. В этих случаях получаем соответственно $9y = 25$ и $9y = 11$; и то, и другое невозможно.

Таким образом, имеем $a = 7$, $b = 5$, $c = 3$, $d = 1$.

б) Предположим, что это возможно. Получаем систему:

$$\begin{cases} x + z = 29, \\ xy + zt = 29. \end{cases} \quad (10)$$

Поскольку $xy \geq x$ и $zt \geq z$, данная система может иметь решение лишь при $y = t = 1$. Имеем, стало быть, $a - b = c - d = 1$, то есть $b = a - 1$ и $c = d + 1$; тогда первое уравнение системы (10) даёт:

$$a + (a - 1) + d + (d + 1) = 29,$$

или $2a + 2d = 29$. Пришли к противоречию: слева стоит чётное число, а справа — нечётное. Следовательно, равенства $a + b + c + d = 29$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 29$ не могут выполняться одновременно.

в) Имеем систему:

$$\begin{cases} x + z = 1400, \\ xy + zt = 1400. \end{cases}$$

Снова $y = t = 1$, то есть $b = a - 1$ и $c = d + 1$. В данном случае получим $2a + 2d = 1400$, откуда $a = 700 - d$ и $b = 699 - d$. Должно быть $b > c$, или $699 - d > d + 1$, откуда $d < 349$. Таким образом, имеется 348 возможных значений $d = 1, 2, \dots, 348$ и, соответственно, 348 возможных значений $a = 699, 698, \dots, 352$.

17. [Условие]

ОТВЕТ: а) да; б) нет; в) 91.

РЕШЕНИЕ. а) Да, может. Например, $410 : (4 + 1 + 0) = 82$.

► Как построен пример? Рассмотрим трёхзначное число $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$. Имеем:

$$100x + 10y + z = 82(x + y + z) \Rightarrow 18x = 72y + 81z \Rightarrow 2x = 8y + 9z.$$

Полученному равенству удовлетворяют цифры $x = 4$, $y = 1$, $z = 0$. ◀

б) Предположим, что для трёхзначного числа \overline{xyz} выполнено равенство

$$100x + 10y + z = 83(x + y + z),$$

то есть

$$17x = 73y + 82z. \quad (11)$$

Самая большая цифра — это 9, поэтому

$$73y + 82z \leq 17 \cdot 9 = 153.$$

Отсюда видно, что возможны лишь два случая: $z = 0$ или $z = 1$.

1. Если $z = 0$, то из (11) получаем $17x = 73y$. Значит, $17x$ делится на простое число 73. Однако ни 17, ни x (будучи цифрой) на 73 не делятся. Противоречие.
2. Если $z = 1$, то из (11) получаем $17x = 73y + 82$, что не превосходит 153. Значит, $y = 0$ или $y = 1$. В этих случаях имеем соответственно $17x = 82$ и $17x = 155$; оба равенства невозможны, так как их правые части не делятся на 17.

Полученные противоречия показывают, что при делении трёхзначного числа на сумму его цифр не может получиться 83.

в) Пусть снова x, y, z — цифры. Ищем наибольшее натуральное n , такое, что

$$100x + 10y + z = n(x + y + z).$$

Перепишем это равенство следующим образом:

$$n(y + z) - 10y - z = (100 - n)x,$$

и так как x не превосходит 9, получим:

$$n(y + z) - 10y - z \leq (100 - n) \cdot 9 = 900 - 9n.$$

Отсюда

$$n \leq \frac{900 + 10y + z}{y + z + 9}. \quad (12)$$

По условию наше трёхзначное число не делится на 100, то есть y и z не равны нулю одновременно; иными словами, выполнено неравенство $y + z \geq 1$. Тогда для правой части неравенства (12) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{900 + 10y + z}{y + z + 9} &= \frac{900 + 10(y + z + 9) - 9z - 90}{y + z + 9} = \\ &= 10 + \frac{810 - 9z}{y + z + 9} \stackrel{(y+z \geq 1)}{\leq} 10 + \frac{810 - 9z}{10} \stackrel{(z \geq 0)}{\leq} 10 + \frac{810}{10} = 91. \end{aligned} \quad (13)$$

Итак, справедлива оценка $n \leq 91$. Равенство имеет место для числа 910:

$$910 : (9 + 1 + 0) = 91.$$

► Этот пример найти нетрудно: при $x = 9, y = 1$ и $z = 0$ все неравенства в (12) и (13) превращаются в равенства. ◀

Итак, максимальное натуральное число, которое может получиться при делении трёхзначного числа на сумму его цифр, равно 91.

18. [Условие]

ОТВЕТ: а) 13835; б) нет; в) 1041 или 1053.

РЕШЕНИЕ. Пусть среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{350} имеется x_1 единиц, x_2 двоек, x_3 троек и x_4 четвёрок. Тогда $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 350$. Кроме того, по условию $S_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 569$. Имеем также:

$$\begin{aligned} S_2 &= x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4, \\ S_3 &= x_1 + 8x_2 + 27x_3 + 64x_4, \\ S_4 &= x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 256x_4. \end{aligned}$$

а) Условие $S_2 = 1307, S_3 = 3953$ приводит к системе четырёх уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 350, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 569, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 1307, \\ x_1 + 8x_2 + 27x_3 + 64x_4 = 3953. \end{array} \right. \quad (14)$$

Будем решать эту систему методом последовательного исключения неизвестных (так называемым методом Гаусса¹). Сначала исключим x_1 из второго, третьего и четвёртого уравнений. Для этого заменим второе уравнение системы (14) на разность второго и первого; третье — на разность третьего и второго; четвёртое — на разность четвёртого и второго:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 350, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 219, \\ 2x_2 + 6x_3 + 12x_4 = 738, \\ 6x_2 + 24x_3 + 60x_4 = 3384. \end{array} \right. \quad (15)$$

Сокращая третье и четвёртое уравнения системы (15) на 2 и 6 соответственно, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 350, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 219, \\ x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 369, \\ x_2 + 4x_3 + 10x_4 = 564. \end{array} \right. \quad (16)$$

Теперь исключим x_2 из третьего и четвёртого уравнений системы (16). Третье уравнение заменим на разность третьего и второго, а четвёртое — на разность четвёртого и третьего:

¹На первом курсе вас научат делать такие вещи с помощью матриц, что гораздо быстрее и компактнее.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 350, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 219, \\ x_3 + 3x_4 = 150, \\ x_3 + 4x_4 = 195. \end{array} \right. \quad (17)$$

Четвёртое уравнение системы (17) заменяем на разность четвёртого и третьего уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 350, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 219, \\ x_3 + 3x_4 = 150, \\ x_4 = 45. \end{array} \right. \quad (18)$$

Теперь начинается так называемый обратный ход метода Гаусса. Зная x_4 , из третьего уравнения системы (18) находим x_3 :

$$x_3 = 150 - 3x_4 = 150 - 3 \cdot 45 = 15.$$

Зная x_3 , из второго уравнения находим x_2 :

$$x_2 = 219 - 2x_3 - 3x_4 = 219 - 30 - 135 = 54,$$

и, наконец,

$$x_1 = 350 - x_2 - x_3 - x_4 = 350 - 54 - 15 - 45 = 236.$$

Остаётся вычислить требуемую величину S_4 :

$$S_4 = x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 256x_4 = 236 + 16 \cdot 54 + 81 \cdot 15 + 256 \cdot 45 = 13835.$$

б) Предположим, что $S_4 = 4857$. Вычитая из уравнения $x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 256x_4 = 4857$ уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 350$, получим

$$15x_2 + 80x_3 + 255x_4 = 4507.$$

Левая часть данного равенства делится на 5, а правая — нет. Следовательно, S_4 не может равняться 4857.

в) Пусть $S_4 = 4785$, $S_2 = a$. Нам надо найти все возможные значения a . Имеем систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 350, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 569, \\ x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 256x_4 = 4785, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = a. \end{array} \right. \quad (19)$$

Снова применяем метод Гаусса. Второе уравнение системы (19) заменяем разностью второго и первого; третье — разностью третьего и первого; четвёртое — разностью четвёртого и первого:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 350, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 219, \\ 15x_2 + 80x_3 + 255x_4 = 4435, \\ 3x_2 + 8x_3 + 15x_4 = a - 350. \end{array} \right. \quad (20)$$

Сократим третье уравнение системы (20) на 5:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 350, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 219, \\ 3x_2 + 16x_3 + 51x_4 = 887, \\ 3x_2 + 8x_3 + 15x_4 = a - 350. \end{array} \right. \quad (21)$$

Третье уравнение системы (21) заменяем разностью третьего и утроенного второго и сокращаем полученное уравнение на 2; четвёртое — разностью третьего и четвёртого:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 350, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 219, \\ 5x_3 + 21x_4 = 115, \\ 8x_3 + 36x_4 = 1237 - a. \end{array} \right. \quad (22)$$

Из третьего уравнения системы (22) мы видим, что x_4 делится на 5, то есть $x_4 = 5k$ для некоторого целого неотрицательного k . Третье уравнение примет вид:

$$5x_3 + 21 \cdot 5k = 115,$$

откуда

$$x_3 = 23 - 21k.$$

С учётом требования $x_3 \geq 0$ заключаем, что $k = 0$ или $k = 1$. Это лишь необходимые условия на k ; остаётся проверить их достаточность, то есть выяснить, имеет ли система (22), и тем самым система (19), целые неотрицательные решения при данных k .

Пусть $k = 0$. Тогда $x_4 = 0$, $x_3 = 23$, и далее из системы (22) находим: $x_2 = 173$, $x_1 = 154$. Значит, $k = 0$ годится. Из четвёртого уравнения системы (22) получаем:

$$a = 1237 - 8 \cdot 23 = 1053.$$

Пусть теперь $k = 1$. Тогда $x_4 = 5$, $x_3 = 2$, и аналогично находим: $x_2 = 200$, $x_1 = 143$. Значение $k = 1$ также годится, и в этом случае получаем

$$a = 1237 - 8 \cdot 2 - 36 \cdot 5 = 1041.$$

Итак, все возможные значения $a = S_2$ равны 1053 и 1041.

19. [Условие]

ОТВЕТ: а) $-5, -3, 4$; б) четыре; в) нет.

РЕШЕНИЕ. а) Непосредственной проверкой легко убедиться, что если задумано одно число, то набор состоит из одного числа; если задумано два числа, то набор состоит из трёх чисел; если задумано три числа, то набор состоит из семи чисел; если задумано четыре числа, то набор состоит из 15 чисел. Ясно также, что с увеличением количества задуманных чисел объём набора возрастает.

► Для знакомых с комбинаторикой: если задумано n чисел, то объём набора равен $2^n - 1$. Ведь, по сути, мы рассматриваем всевозможные подмножества n -элементного множества (а их всего 2^n), за исключением пустого множества. ◀

Наш набор $-8, -5, -4, -3, -1, 1, 4$ содержит семь чисел. Следовательно, задумано три числа. Если бы все задуманные числа были положительными (отрицательными), то набор состоял бы только из положительных (отрицательных) чисел. Значит, среди задуманных имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Допустим, что задуманы одно отрицательное число a и два положительных. Тогда $a = -8$, поскольку все остальные числа набора должны быть больше a . Но тогда задумано число 3 ($-8 + 3 = -5$), а его нет в наборе. Противоречие показывает, что задуманы два отрицательных числа и одно положительное.

Наименьшее число набора -8 должно быть суммой двух задуманных отрицательных чисел. В наборе есть лишь одна такая пара: -5 и -3 . Значит, они и задуманы. Третье задуманное число (единственное положительное) должно быть равно 4 (наибольшему числу набора). Легко убедиться, что числа $-5, -3, 4$ в самом деле порождают данный набор.

б) Одно число задумано быть не могло, поскольку набор содержит как минимум два числа.

Пусть задуманы два числа a и b . Тогда набор состоит из трёх чисел $a, b, a+b$. Предположение о том, что два из них равны нулю, немедленно приводит к выводу, что и третью обращается в нуль — в противоречии с условием.

Пусть задуманы три числа. Двух нулей среди них быть не может, поскольку в наборе тогда появятся три нуля (эти два и их сумма). Возможны следующие четыре варианта.

1. Все три числа ненулевые, и среди них нет противоположных (по знаку). Тогда набор может содержать самое большее один нуль — сумму трёх задуманных чисел.
2. Все три числа ненулевые, и два из них противоположны. Тогда набор содержит ровно один нуль — сумму двух противоположных чисел.
3. Одно из трёх чисел равно нулю, остальные два не противоположны. Тогда в наборе ровно один нуль.
4. Одно из трёх чисел равно нулю, остальные два противоположны. Тогда в наборе будет три нуля (задуманный нуль, сумма двух противоположных, сумма трёх).

Как видим, ни в одном из рассмотренных случаев набор не содержит ровно двух нулей. Значит, три числа задуманы быть не могут, и потому задумано не менее четырёх чисел.

Четыре числа могут быть задуманы, например $-2, -1, 1, 3$. В нуль обращаются ровно две из возможных сумм: $-1 + 1 = 0$ и $-2 - 1 + 3 = 0$.

► Как найден пример? Ясно, что нуль задуман быть не может, так как если в наборе присутствует второй нуль, то в сумме с задуманным получится и третий. Если задуманы две пары противоположных чисел, то в наборе три нуля. Значит, нулю должны быть равны сумма двух и сумма трёх чисел. ◀

Следовательно, наименьшее возможное количество задуманных чисел равно четырём.

в) Задуманные числа не всегда можно однозначно восстановить по набору. Например, задумаем сначала числа $1, 1, -2$, а потом числа $-1, -1, 2$. В обоих случаях получим один и тот же набор $-2, -1, -1, 0, 1, 1, 2$.

► Взяли числа, дающие в сумме нуль, а потом поменяли у них знаки — набор не изменился. ◀

20. [Условие]

ОТВЕТ: а) 2, 2, 6; б) нет; в) 7, 8, 10, 16 или 7, 8, 8, 8, 10.

РЕШЕНИЕ. а) Непосредственной проверкой убеждаемся, что задуманные числа 2, 2, 6 приводят к набору 2, 4, 6, 8, 10.

► Есть и другие примеры: 2, 4, 4 или 2, 2, 2, 2, 2. ◀

б) Предположим, что существует пример задуманных чисел, приводящий к набору 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22. Тогда число 1 задумано (это наименьшее число набора). Две единицы или двойка задуманы быть не могут, так как 2 в набор не входит. Значит, задумано

число 3. Число 4 задумано быть не может, поскольку $3 + 4 = 7$ не входит в набор. Значит, задумано 5. Но тогда число $1+3+5 = 9$ должно присутствовать в наборе, а его нет. Полученное противоречие показывает, что не существует задуманных чисел, дающих указанный набор.

(Можно рассуждать и «с другого конца» набора. Число 22 есть сумма всех задуманных чисел, наименьшее из которых равно 1. Значит, набор должен содержать и сумму всех задуманных чисел кроме 1, то есть $22 - 1 = 21$. Но этого числа в наборе нет — противоречие.)

в) Среди задуманных чисел, дающих набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41, наименьшим является число 7. При этом 8 и 10 также задуманы (в противном случае среди задуманных были бы числа, меньшие 7). Сумма оставшихся задуманных чисел равна $41 - (7 + 8 + 10) = 16$. Возможны два варианта.

1. Число 16 задумано. Таким образом, задуманы числа 7, 8, 10, 16. Непосредственной проверкой убеждаемся, что они дают указанный в условии набор.
2. Число 16 не задумано. Тогда, помимо 7, 8 и 10, задумано ещё два или более чисел, не меньших 7, сумма которых равна 16. Тут возможны лишь два варианта: $7+9 = 8+8 = 16$. Однако 9 задумано быть не может ввиду отсутствия в наборе числа $17 = 8+9$. Ну а вариант 7, 8, 8, 8, 10 годится (это легко проверяется).

Итак, все возможные примеры задуманных чисел — 7, 8, 10, 16 и 7, 8, 8, 8, 10.

21. [Условие]

ОТВЕТ: а) да; б) нет; в) 39 грузовиков.

РЕШЕНИЕ. а) ► Найдём прежде всего суммарную массу глыб:

$$50 \cdot 800 + 60 \cdot 1000 + 60 \cdot 1500 = 190000 \text{ кг} = 190 \text{ т.}$$

Нам же предлагается суммарная грузоподъёмность грузовиков $60 \cdot 5 = 300$ т. Это очень много, и поэтому ясно, что подобрать пример не составит труда. ◀

Все 50 глыб по 800 кг разложим в 10 грузовиков — в каждый по 5 глыб (то есть по 4 тонны). Все 60 глыб по 1000 кг разложим в 20 грузовиков — в каждый по 3 глыбы (то есть по 3 тонны). Все 60 глыб по 1500 кг разложим в 30 грузовиков — в каждый по 2 глыбы (то есть по 3 тонны). Как видим, все глыбы разместились в $10 + 20 + 30 = 60$ грузовиках.

б) Заметим, что $38 \cdot 5 \text{ т} = 190 \text{ т}$ есть как раз суммарная масса глыб.

► Таким образом, обойтись менее чем 38 грузовиками заведомо не получится. Поэтому, если бы оказалось возможным разложить все глыбы в 38 грузовиков, то вряд ли был бы задан третий вопрос задачи ;-) Следовательно, имеет смысл думать в направлении доказательства невозможности данной раскладки. ◀

Предположим, что можно вывезти все глыбы на 38 грузовиках. Тогда в каждом грузовике находится в точности по 5 тонн. Заметим следующее:

- ровно одна 800-килограммовая глыба в грузовике лежать не может, так как оставшаяся массы $5000 - 800 = 4200$ кг нельзя набрать глыбами по 1000 и 1500 кг;
- ровно две 800-килограммовые глыбы в грузовике лежать не могут, так как оставшаяся массы $5000 - 2 \cdot 800 = 3400$ кг нельзя набрать глыбами по 1000 и 1500 кг;
- ровно три 800-килограммовые глыбы в грузовике лежать не могут, так как оставшаяся массы $5000 - 3 \cdot 800 = 2600$ кг нельзя набрать глыбами по 1000 и 1500 кг;

- ровно четыре 800-килограммовые глыбы в грузовике лежать не могут, так как оставшуюся массы $5000 - 4 \cdot 800 = 1800$ кг нельзя набрать глыбами по 1000 и 1500 кг;
- ровно шесть 800-килограммовых глыб в грузовике лежать не могут, так как оставшуюся массы $5000 - 6 \cdot 800 = 200$ кг нельзя набрать глыбами по 1000 и 1500 кг;
- семь и более 800-килограммовых глыб в грузовик не влезут ($7 \cdot 800 > 5000$).

Значит, если в грузовике имеются 800-килограммовые глыбы, то их там ровно 5 штук с общей массой 4000 кг. Недостающие 1000 кг в этом грузовике заполняются единственным способом — глыбой в 1000 кг. Так будут заполнены $50 : 5 = 10$ грузовиков.

Остальные 28 грузовиков должны быть заполнены только глыбами массой 1000 и 1500 кг. Заметим следующее:

- ровно одна 1500-килограммовая глыба в грузовике лежать не может, так как оставшуюся массы $5000 - 1500 = 3500$ кг нельзя набрать глыбами по 1000 кг;
- ровно три 1500-килограммовые глыбы в грузовике лежать не могут, так как оставшуюся массы $5000 - 3 \cdot 1500 = 500$ кг нельзя набрать глыбами по 1000 кг;
- четыре и более 1500-килограммовых глыб в грузовик не влезут ($4 \cdot 1500 > 5000$).

Следовательно, в каждом из оставшихся 28 грузовиков должны лежать ровно две глыбы по 1500 кг (и две глыбы по 1000 кг). Но $28 \cdot 2 = 56$, а 1500-килограммовых глыб у нас 60. Полученное противоречие показывает, что 38 грузовиков не хватит для одновременного вывоза всех глыб.

в) Из предыдущего пункта следует, что грузовиков должно быть не менее 39. Приведём пример раскладки глыб по 39 грузовикам:

- в каждый из 30 грузовиков кладём две 1500-килограммовые глыбы и две 1000-килограммовые глыбы (тем самым глыбы обоих видов разложены полностью);
- в каждый из 8 грузовиков кладём по шесть 800-килограммовых глыб (тем самым разложены 48 таких глыб);
- в один грузовик кладём оставшиеся две 800-килограммовые глыбы.

Следовательно, наименьшее число грузовиков, необходимое для одновременного вывоза всех глыб, равно 39.

22. [Условие]

ОТВЕТ: а) может; б) 41; в) 3 и 6.

РЕШЕНИЕ. а) Предъявляем пример: числа 2, 3, 4, 5 образуют арифметическую прогрессию, и сумма их равна 14.

б) ► Начинаем с наводящих соображений. Мы чувствуем, что «максимальная» прогрессия начинается с единицы и имеет разность единица: 1, 2, ..., n . Сумма такой прогрессии:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Непосредственно убеждаемся, что $S_{41} = 861$ и $S_{42} = 903$. Поэтому возникает предположение, что наибольшее n равно 41. Остаётся грамотно оформить решение. ◀

Пусть a и d — первый член и разность прогрессии. Так как прогрессия состоит из натуральных чисел, имеем неравенства $a \geq 1$ и $d \geq 1$.

Предположим, что $n \geq 42$. Тогда для суммы S первых n членов прогрессии имеем:

$$S = \frac{2a + d(n-1)}{2} \cdot n \geq \frac{2a + 41d}{2} \cdot 42 \geq \frac{2 \cdot 1 + 41 \cdot 1}{2} \cdot 42 = 903 > 900,$$

что противоречит условию. Следовательно, $n \leq 41$ (оценка).

Приведём пример арифметической прогрессии, состоящей из 41 числа и удовлетворяющей условию задачи: 1, 2, 3, ..., 40, 41. Её сумма равна $861 < 900$.

Таким образом, наибольшее n равно 41.

в) Прежде всего заметим, что $n < 41$ (в противном случае сумма прогрессии не меньше $861 > 123$). Разложим 123 на простые множители: $123 = 3 \cdot 41$. Имеем:

$$\frac{2a + d(n-1)}{2} \cdot n = 123 = 3 \cdot 41,$$

то есть

$$(2a + d(n-1))n = 2 \cdot 3 \cdot 41.$$

Мы видим, что число $2 \cdot 3 \cdot 41$ делится на n . С учётом неравенства $3 \leq n < 41$ имеются лишь две возможности $n = 3$ и $n = 2 \cdot 3 = 6$.

► Пока ещё не известно, существуют ли прогрессии с указанными n . Поищем примеры подходящих прогрессий. ◀

Подходящая прогрессия с $n = 3$ существует: 40, 41, 42. Подходящая прогрессия с $n = 6$ также существует: 18, 19, 20, 21, 22, 23. Следовательно, возможными значениями n являются в данном случае 3 и 6.

23. [Условие]

ОТВЕТ: а) да; г) 1, 126, ..., 8876.

РЕШЕНИЕ. а) Да, может: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20.

б) Без ограничения общности считаем прогрессию возрастающей. Предположим, что разность прогрессии d является r -значным числом (то есть десятичная запись числа d состоит ровно из r цифр).

Возьмём некоторый член a_n нашей прогрессии и обозначим через i цифру, расположенную в $(r+1)$ -м разряде его десятичной записи (то есть $(r+1)$ -ю по счёту цифру со стороны единиц; если a_n является r -значным числом, то полагаем $i = 0$). Цифра 9 отсутствует, поэтому i может принимать одно из девяти значений: $i = 0, 1, \dots, 8$.

Множество членов прогрессии, у которых в $(r+1)$ -м разряде стоит цифра i , мы будем называть i -группой. Всего, таким образом, имеется не более девяти групп членов прогрессии: 0-группа, 1-группа, ..., 8-группа.

Поскольку число d является r -значным, при переходе от члена a_n к члену $a_{n+1} = a_n + d$ цифра i либо остаётся неизменной, либо увеличивается на единицу; иными словами, мы либо остаёмся в i -группе, либо переходим в $(i+1)$ -группу. Если мы остались в i -группе, то значение r -го разряда увеличилось. В r -м разряде может стоять одна из девяти цифр 0, 1, ..., 8, поэтому в i -группе не более девяти членов прогрессии.

Итак, i -группы не более девяти, а в каждой группе не более девяти членов; следовательно, всего членов прогрессии не более $9 \cdot 9 = 81 < 100$.

в) Покажем, что на самом деле в i -группе не более восьми членов. Пусть b_1, b_2, \dots, b_m — члены i -группы (они сами по себе образуют арифметическую прогрессию с разностью d).

Обозначим c_1, c_2, \dots, c_m остатки от деления чисел b_1, b_2, \dots, b_m на 10^r . (Попросту говоря, каждое число c_k получается выбрасыванием из десятичной записи соответствующего числа b_k

всех цифр начиная с $(r+1)$ -й; например, если $r = 2$ и $b_k = 123$, то $c_k = 23$.) Ясно, что числа c_1, c_2, \dots, c_m также образуют арифметическую прогрессию с разностью d .

Теперь заметим, что $c_m \leq \underbrace{88\dots8}_r$. Следовательно, $d > \underbrace{11\dots1}_r$. Имеем:

$$\underbrace{88\dots8}_r \geq c_m = c_1 + (m-1)d \geq (m-1)d > (m-1) \cdot \underbrace{11\dots1}_r,$$

откуда $m-1 < 8$, то есть $m \leq 8$.

Итак, в каждой из i -групп не более восьми членов, а самих этих групп не более девяти. Следовательно, прогрессия содержит не более 72 членов.

г) Приведём пример такой прогрессии, состоящей из 72 членов. Её первый член равен 1, а разность равна 125:

1	126	251	376	501	626	751	876
1001	1126	1251	1376	1501	1626	1751	1876
2001	2126	2251	2376	2501	2626	2751	2876
3001	3126	3251	3376	3501	3626	3751	3876
4001	4126	4251	4376	4501	4626	4751	4876
5001	5126	5251	5376	5501	5626	5751	5876
6001	6126	6251	6376	6501	6626	6751	6876
7001	7126	7251	7376	7501	7626	7751	7876
8001	8126	8251	8376	8501	8626	8751	8876

24. [Условие]

ОТВЕТ: а) да; б) четыре.

РЕШЕНИЕ. а) Да, может. Пример: 1, 2, 3.

б) В этой прогрессии может быть четыре члена: 1, 2, 3, 4. Покажем, что пяти членов в ней быть не может.

► Идея такова. Все члены нашей прогрессии не делятся на 5, то есть дают при делении на 5 ненулевые остатки (а именно, 1, 2, 3, 4). Если имеется пять членов прогрессии, то обязательно найдутся два члена с равными остатками. А тогда окажется, что разность прогрессии кратна 5. Но она не может быть кратна 5 — это мы тоже докажем. ◀

Предварительно докажем следующую лемму.

ЛЕММА. Если три различных натуральных числа, не имеющие простых делителей кроме 2 и 3, образуют арифметическую прогрессию, то разность этой прогрессии не делится на 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что числа $a = 2^{k_1} \cdot 3^{l_1}$, $b = 2^{k_2} \cdot 3^{l_2}$ и $c = 2^{k_3} \cdot 3^{l_3}$ образуют арифметическую прогрессию ($k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3$ — целые неотрицательные числа). Разность этой прогрессии обозначим d . Без ограничения общности считаем прогрессию возрастающей.

Пусть k_0 есть наименьшее из чисел k_1, k_2, k_3 и пусть l_0 есть наименьшее из чисел l_1, l_2, l_3 . Ясно, что разложение разности прогрессии на простые множители имеет вид:

$$d = 2^{k_0} \cdot 3^{l_0} \cdot 5^m \dots$$

(В самом деле, разность d обязана делиться на 2^{k_0} , но не может делиться на 2 в большей степени; аналогично дело обстоит с множителем 3^{l_0} .)

Поделим числа a, b, c, d на $2^{k_0} \cdot 3^{l_0}$. Получим новую арифметическую прогрессию, члены которой по-прежнему обозначим a, b, c . Новую разность также обозначим d . Числа a, b, c , как и ранее, кратны лишь степеням двойки и тройки, а разность d теперь не делится ни на 2, ни на 3. Следовательно, в прогрессии теперь не могут идти подряд два чётных числа и два числа, кратные трём; в частности, прогрессия не содержит число, которое делится на 2 и на 3 одновременно. Кроме того, поскольку d нечётно, чётности чисел a, b, c чередуются (чётное–нечётное или нечётное–чётное–нечётное).

С учётом сформулированных ограничений мы получаем для нашей новой прогрессии лишь три возможности ($a = 1$, a кратно двум, a кратно трём). В каждом случае предполагаем, что d кратно 5, и приходим к противоречию. Во всех случаях k, l, m, n, p — натуральные числа.

1. Прогрессия имеет вид: $1, 2^k, 3^l$. Тогда 2^k должно оканчиваться на 6, и потому $k = 4n$. Аналогично, 3^l должно оканчиваться на 1, и потому $l = 4p$.

Таким образом, имеем арифметическую прогрессию: $1, 16^n, 81^p$. Отсюда

$$2 \cdot 16^n = 81^p + 1.$$

Левая часть данного равенства делится на 16. Число 81 при делении на 16 даёт остаток 1; значит, и 81^p при делении на 16 даёт остаток 1. Тогда правая часть имеет остаток 2 при делении на 16. Противоречие.

2. Прогрессия имеет вид: $2^k, 3^l, 2^m$. Напомним, что прогрессию мы считаем возрастающей, поэтому $m > k$. С необходимости имеем $k = 1$; в противном случае второе число 3^l , равное полусумме первого и третьего чисел, окажется чётным. Но, если первое число равно 2, то 2^m оканчивается на 2 (поскольку $2d$ делится на 10), так что $m = 4p + 1$.

Получаем:

$$3^l = \frac{2^{4p+1} + 2}{2} = 16^p + 1.$$

Левая часть этого равенства делится на 3, а правая часть при делении на 3 даёт остаток 2. Противоречие.

3. Прогрессия имеет вид: $3^k, 2^l, 3^m$. Тогда $2 \cdot 2^l = 3^k + 3^m$. Правая часть этого равенства делится на 3, а левая — нет. Противоречие.

Противоречия, полученные во всех случаях, завершают доказательство леммы.

Предположим теперь, что пять различных натуральных чисел образуют арифметическую прогрессию (с разностью d) и кратны лишь степеням двойки и тройки. Все эти числа дают ненулевые остатки при делении на 5. Поскольку ненулевых остатков всего четыре, у двух каких-то чисел эти остатки совпадают.

- Пусть остатки совпадают у двух соседних чисел:

$$a = 5k + r, \quad a + d = 5l + r$$

(k, l — целые; $r = 1, 2, 3, 4$). В таком случае разность прогрессии $d = 5(l - k)$ делится на 5. Однако в силу леммы это невозможно.

- Пусть остатки совпадают у двух чисел, расположенных через одно:

$$a = 5k + r, \quad a + 2d = 5l + r.$$

Тогда $2d = 5(l - k)$ делится на 5, а значит и d делится на 5 вопреки лемме.

- Пусть остатки совпадают у двух чисел, расположенных через два:

$$a = 5k + r, \quad a + 3d = 5l + r.$$

Тогда $3d = 5(l - k)$ делится на 5, а значит и d делится на 5 вопреки лемме.

- Пусть остатки совпадают у двух чисел, расположенных через три, то есть у первого и последнего членов:

$$a = 5k + r, \quad a + 4d = 5l + r.$$

Тогда $4d = 5(l - k)$ делится на 5, а значит и d делится на 5 — снова в противоречии с леммой.

Полученные противоречия показывают, что пяти членов в прогрессии быть не может. Больше пяти членов в прогрессии не может быть и подавно. Значит, в прогрессии может быть самое большое четыре члена.

25. [Условие]

ОТВЕТ: а) да; б) нет; в) да; г) да.

РЕШЕНИЕ. а) ► Давайте выпишем для наглядности все 12 квадратов:

$$1^2 \quad 2^2 \quad 3^2 \quad 4^2 \quad 5^2 \quad 6^2 \quad 7^2 \quad 8^2 \quad 9^2 \quad 10^2 \quad 11^2 \quad 12^2.$$

Нам пригодится знание пифагоровых троек: $3^2 + 4^2 = 5^2$ и $6^2 + 8^2 = 10^2$. Эти шесть квадратов можно выкинуть из списка, поскольку $3^2 + 4^2 - 5^2 + 6^2 + 8^2 - 10^2 = 0$. Выпишем оставшиеся шесть квадратов:

$$1 \quad 4 \quad 49 \quad 81 \quad 121 \quad 144.$$

Замечаем, что $144 - 121 = 23$, $81 - 49 = 32$; результаты отличаются на 9, а $1 + 4 = 5$. Вот и готова четвёрка: $-1 - 4 - 49 + 81 + 121 - 144 = 4$.

При записи решения все эти размышления остаются «за кадром», и мы приводим только пример нужной расстановки знаков. ◀

Да, может. Вот пример:

$$-1^2 - 2^2 + 3^2 + 4^2 - 5^2 + 6^2 - 7^2 + 8^2 + 9^2 - 10^2 + 11^2 - 12^2 = 4.$$

б) В последовательности $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 68^2, 69^2$ содержится 35 нечётных чисел (и 34 чётных). Поскольку количество нечётных чисел нечётно, при любой расстановке знаков сумма этой последовательности окажется нечётной. Значит, эта сумма не может равняться нулю.

в) ► В арифметической прогрессии из четырёх чисел a, b, c, d мы можем расставить знаки так, чтобы получился нуль: $a - b - c + d = 0$.

Пусть имеется восемь последовательных квадратов: $k^2, (k+1)^2, \dots, (k+7)^2$. Имеем:

$$\begin{aligned} (k+1)^2 - k^2 &= 2k + 1, \\ (k+3)^2 - (k+2)^2 &= 2k + 5, \\ (k+5)^2 - (k+4)^2 &= 2k + 9, \\ (k+7)^2 - (k+6)^2 &= 2k + 13. \end{aligned}$$

Четыре числа $2k + 1, 2k + 5, 2k + 9, 2k + 13$ образуют арифметическую прогрессию. Расставляя между ними знаки указанным выше образом, получим в сумме нуль. Таким образом, сумму восьми последовательных квадратов можно сделать равной нулю подходящей расстановкой знаков.

Переходим к записи решения. Прежде всего, как из шляпы фокусника, появляется полученный результат. ◀

Непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$-k^2 + (k+1)^2 + (k+2)^2 - (k+3)^2 + (k+4)^2 - (k+5)^2 - (k+6)^2 + (k+7)^2 = 0. \quad (23)$$

Таким образом, сумму квадратов восьми последовательных целых чисел можно сделать равной нулю подходящей расстановкой знаков.

В нашем случае имеется 64 квадрата: $1^2, 2^2, \dots, 64^2$. Разобьём их на 8 равных последовательных отрезков по 8 квадратов:

$$1^2, 2^2, \dots, 8^2; \quad 9^2, 10^2, \dots, 16^2; \quad \dots; \quad 57^2, 58^2, \dots, 64^2.$$

Сумму чисел каждого отрезка можно сделать равной нулю, расставляя знаки так, как в (23). Тем самым общая сумма окажется равной нулю.

г) Заметим, что $1^2 + 2^2 = 5$. Остальные 88 квадратов $3^2, 4^2, \dots, 90^2$ разобьём на 11 равных последовательных отрезков по 8 квадратов и расставим внутри каждого отрезка знаки так, как в (23). Тем самым сумма этих 88 квадратов обратится в нуль, а общая сумма будет равна 5.

26. [Условие]

ОТВЕТ: а) нет; б) нет; в) $39\frac{1}{21}$.

РЕШЕНИЕ. а) Представим число 40 в виде следующей суммы:

$$40 = \underbrace{\frac{40}{41} + \frac{40}{41} + \dots + \frac{40}{41}}_{41 \text{ слагаемое}}.$$

Каково бы ни было разбиение этих 41 слагаемых на две группы, в одной из этих групп окажется не менее 21 числа. Тогда сумма чисел в этой группе будет больше или равна

$$21 \cdot \frac{40}{41} = \frac{840}{41} > \frac{820}{41} = 20.$$

Следовательно, число S не может равняться 40.

б) Предположим, что

$$S > 39 \frac{1}{21} = \frac{820}{21}.$$

Представим S в виде суммы:

$$S = \underbrace{\frac{S}{41} + \frac{S}{41} + \dots + \frac{S}{41}}_{41 \text{ слагаемое}}.$$

Число S не превосходит 40 (ведь S по условию является суммой двух групп чисел, а в каждой группе сумма не больше 20), поэтому каждое из слагаемых $S/41$ меньше единицы. Теперь повторяются рассуждения предыдущего пункта: каково бы ни было разбиение этих слагаемых на две группы, одна из групп будет содержать не менее 21 числа. Сумма чисел в этой группе окажется больше или равна

$$21 \cdot \frac{S}{41} > 21 \cdot \frac{820}{21 \cdot 41} = 20.$$

Значит, S не может быть больше $39\frac{1}{21}$.

в) Из результата пункта б) следует оценка:

$$S \leq 39 \frac{1}{21}. \quad (24)$$

Покажем, что число $39\frac{1}{21}$ удовлетворяет условию задачи. Возьмём произвольное представление:

$$39\frac{1}{21} = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad (25)$$

в котором числа a_1, a_2, \dots, a_n положительны и не превосходят единицы. Будем считать для определённости, что $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$.

Нужное нам разбиение слагаемых в (25) на две группы мы построим следующим образом. К первой группе относим наибольшее первое слагаемое и все идущие за ним до тех пор, пока их сумма не превосходит 20. Более точно, найдётся слагаемое a_p такое, что

$$a_1 + a_2 + \dots + a_p \leq 20,$$

и в то же время

$$a_1 + a_2 + \dots + a_p + a_{p+1} > 20.$$

Так вот, первую группу составят числа a_1, \dots, a_p , а вторую группу — числа a_{p+1}, \dots, a_n .

Обозначим через A сумму чисел в первой группе:

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_p. \quad (26)$$

Имеем:

$$A \leq 20,$$

$$A + a_{p+1} > 20. \quad (27)$$

Поскольку $a_{p+1} \leq 1$, из неравенства (27) следует, что $A > 19$. Тогда (26) приводит нас к неравенству $p > 19$ (ведь все слагаемые не превосходят 1); а так как p целое, то

$$p \geq 20. \quad (28)$$

Перепишем (27) в виде:

$$a_{p+1} > 20 - A.$$

Вспоминая, что слагаемые в (26) расположены по убыванию, имеем также: $a_p > 20 - A, \dots, a_2 > 20 - A, a_1 > 20 - A$. Тогда из (26) и (28) последовательно получаем:

$$A > \underbrace{(20 - A) + (20 - A) + \dots + (20 - A)}_{p \text{ слагаемых}} = p(20 - A) \geq 20(20 - A).$$

Отсюда

$$A > \frac{400}{21}.$$

Теперь для суммы чисел во второй группе имеем:

$$a_{p+1} + \dots + a_n = 39\frac{1}{21} - A = \frac{820}{21} - A < \frac{820}{21} - \frac{400}{21} = \frac{420}{21} = 20.$$

Итак, во второй группе сумма чисел меньше 20, что и требовалось. Значит, для числа $39\frac{1}{21}$ условия задачи выполнены. Вместе с оценкой (24) это доказывает, что $39\frac{1}{21}$ — максимально возможное значение S .

27. [Условие]

ОТВЕТ: а) 45; б) 12.

РЕШЕНИЕ. Пусть по кругу расположены числа a_1, a_2, \dots, a_{48} . Количество положительных чисел среди них обозначим p .

а) Поскольку сумма всех чисел равна 20, среди них есть как положительные, так и отрицательные. Поэтому $p \neq 48$.

Пусть $p = 47$. В этом случае сумма положительных чисел не менее 47. Но тогда единственное отрицательное число меньше или равно -27 и потому отличается от соседних чисел более чем на 7. Это противоречит условию. Значит, $p \neq 47$.

Пусть $p = 46$. Сумма положительных чисел не менее 46. Отрицательных чисел всего два, и их сумма меньше или равна -26 . Значит, одно из отрицательных чисел меньше или равно -13 . Это число отличается от соседнего положительного числа более чем на 7. Поэтому $p \neq 46$.

Приведём пример, когда $p = 45$. Положим

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{45} = 1, a_{46} = -6, a_{47} = -13, a_{48} = -6.$$

Сумма этих чисел равна:

$$45 - 6 - 13 - 6 = 20.$$

Легко видеть, что и остальные условия задачи выполнены. Следовательно, наибольшее возможное значение p равно 45.

б) Из того, что среди любых четырёх подряд идущих чисел имеется хотя бы одно положительное, следует, что

$$p \geq 12. \quad (29)$$

В самом деле, разобьём наши 48 чисел на 12 четвёрок:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4), (a_5, a_6, a_7, a_8), \dots, (a_{45}, a_{46}, a_{47}, a_{48}).$$

Если $p < 12$, то по крайней мере в одной четвёрке не будет положительного числа — вопреки условию.

Остаётся предъявить пример с $p = 12$. Пусть

$$\underbrace{a_4 = a_8 = a_{12} = \dots = a_{44}}_{11 \text{ чисел}} = 5, a_{48} = 1,$$

а остальные 36 чисел равны -1 . Сумма этих чисел:

$$11 \cdot 5 + 1 - 36 = 20.$$

Остальные условия задачи в данном примере также выполнены. Этот пример и оценка (29) доказывают, что наименьшее возможное значение p равно 12.

28. [Условие]

ОТВЕТ: а) нет; б) нет; в) 4.

РЕШЕНИЕ. Пусть A, B, C и D — суммы чисел в четырёх группах. Согласно условию нас интересует сумма:

$$S = |A - B| + |A - C| + |A - D| + |B - C| + |B - D| + |C - D|. \quad (30)$$

Ясно, что S — целое неотрицательное число.

Отметим сразу же, что

$$A + B + C + D = 1 + 2 + \dots + 12 = 78. \quad (31)$$

а) Предположим, что $S = 0$. Тогда все шесть слагаемых в (30) равны нулю, что немедленно даёт $A = B = C = D$. Но это невозможно ввиду (31), поскольку 78 не делится на 4. Следовательно, 0 в результате получиться не может.

б) Предположим, что $S = 1$. Тогда одно слагаемое в (30) равно единице, а остальные пять слагаемых равны нулю.

Без ограничения общности можно считать, что $|A - B| = 1$. Но тогда из $|A - C| = 0$ и $|B - C| = 0$ получаем соответственно $A = C$ и $B = C$, то есть $A = B$. Возникшее противоречие показывает, что 1 в результате получиться не может.

в) Заметим, что имеется самое большее три слагаемых в (30), которые не содержат фиксированную букву (например, букву D не содержат слагаемые $|A - B|$, $|B - C|$ и $|A - C|$). Поэтому если взять любые четыре слагаемых в (30), то в них непременно будут фигурировать все четыре буквы A, B, C, D .

Таким образом, если четыре каких-то слагаемых в (30) равны нулю, то $A = B = C = D$. Данное равенство, как было отмечено выше, невозможно. Следовательно, *никакие четыре слагаемых в (30) не могут равняться нулю*.

Иными словами, как минимум три слагаемых в (30) должны быть отличны от нуля. Тем самым оказывается невозможным случай $S = 2$.

Предположим, что $S = 3$. Тогда три слагаемых в (30) равны единице, а остальные три — нулю. При этом нулю могут равняться лишь такие три слагаемых, которые не содержат некоторой буквы (в противном случае — когда в трёх нулевых слагаемых фигурируют все четыре буквы A, B, C, D — остальные три слагаемых также обратятся в нуль).

Пусть, например, $|A - B| = |A - C| = |B - C| = 0$, то есть $A = B = C$. Тогда $D = A \pm 1$, и

$$78 = A + B + C + D = 4A \pm 1.$$

Получаем противоречие: слева стоит чётное число, а справа — нечётное. Значит, $S = 3$ невозможно.

Приведём пример с $S = 4$. Группы возьмём такие:

$$(1, 3, 4, 5, 6), \quad (2, 7, 10), \quad (9, 11), \quad (8, 12).$$

Здесь $A = 19$, $B = 19$, $C = 20$, $D = 20$. Подставляем в (30):

$$S = 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 = 4.$$

Тем самым доказано, что наименьшее возможное значение S равно 4.

29. [Условие]

ОТВЕТ: а) 8; б) на 5/56.

РЕШЕНИЕ. а) Пусть ученик имеет n оценок и S — их сумма. Тогда:

$$\frac{S}{n} = 4,625 = 4 \frac{5}{8} = \frac{37}{8}.$$

Отсюда $37n = 8S$, так что n делится на 8. Поэтому $n \geq 8$.

Приведём пример с $n = 8$. Пусть ученик имеет семь пятёрок и двойку. Тогда его средний балл:

$$\frac{7 \cdot 5 + 2}{8} = \frac{37}{8}.$$

Итак, наименьшее возможное количество оценок ученика равно 8.

б) Пусть ученик имел оценки 3, 3, 5, 5, a_1, a_2, \dots, a_k . Обозначим

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_k.$$

Заметим сразу, что

$$A \leq 5k. \tag{32}$$

Посмотрим, какие ограничения на k накладывает тот факт, что средний балл равен 4,675. Сумма оценок ученика равна $16 + A$, количество оценок равно $4 + k$, так что

$$\frac{16 + A}{4 + k} = \frac{37}{8}.$$

Отсюда легко получаем:

$$8A = 37k + 20. \quad (33)$$

Правая часть $37k + 20$ должна делиться на 8. Число 20 при делении на 8 даёт остаток 4. Значит, $37k$ при делении на 8 также должно давать остаток 4. Какой остаток даёт само k ? Поскольку $37k = 32k + 5k$ и $32k$ делится на 8, число $5k$ при делении на 8 даёт остаток 4. Перебирая остатки от 0 до 7, легко видим, что и k даёт остаток 4:

$$k = 8m + 4 \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (34)$$

Подставляем это в (33):

$$8A = 37(8m + 4) + 20 = 37 \cdot 8m + 168,$$

и после сокращения на 8 получим:

$$A = 37m + 21. \quad (35)$$

Теперь подставляем (34) и (35) в неравенство (32):

$$37m + 21 \leq 5(8m + 4),$$

откуда $3m \geq 1$, то есть $m \geq 1$. Вместе с (34) это даёт нам нужное неравенство на k :

$$k \geq 12.$$

Пусть теперь оценки ученика стали $4, 4, a_1, a_2, \dots, a_k$. Сумма оценок равна $8 + A$, количество оценок равно $2 + k$. Находим изменение среднего балла:

$$\Delta = \frac{8 + A}{2 + k} - \frac{37}{8} = \frac{64 + 8A - 37(2 + k)}{8(2 + k)} = \frac{8A - 37k - 10}{8(2 + k)}.$$

С учётом (33) имеем:

$$\Delta = \frac{10}{8(2 + k)} = \frac{5}{4(2 + k)}.$$

Максимальное значение Δ достигается при минимально возможном значении k , равном 12:

$$\Delta_{\max} = \frac{5}{4(2 + 12)} = \frac{5}{56}.$$

Таким образом, максимальное увеличение среднего балла составляет $5/56$.

30. [Условие]

ОТВЕТ: а) 24; б) 4032.

РЕШЕНИЕ. а) Пусть L — длина мотка верёвки. Коль скоро его можно разрезать на 24 стандартных куска, выполнено неравенство $L \geq 168 \cdot 24$. А так как не все куски имеют одинаковую длину, неравенство является строгим: $L > 168 \cdot 24$.

По тем же самим причинам справедливо неравенство $L < 175 \cdot 24$. Итак,

$$168 \cdot 24 < L < 175 \cdot 24.$$

Теперь заметим, что $168 = 7 \cdot 24$ и $175 = 7 \cdot 25$. Поэтому $175 \cdot 24 = 7 \cdot 25 \cdot 24 = 168 \cdot 25$, и мы получаем новое двойное неравенство для L :

$$168 \cdot 24 < L < 168 \cdot 25. \quad (36)$$

Предположим, что моток можно разрезать на $n \geq 25$ стандартных кусков одинаковой длины. Тогда имеем неравенство

$$L \geq 168n \geq 168 \cdot 25,$$

которое противоречит неравенству (36). Следовательно, $n \leq 24$.

Покажем, что наш моток можно разрезать на 24 одинаковых стандартных куска. Из неравенства (36) следует, что $L = 168 \cdot 24 + x$, где $x < 168$. Разрежем моток на 24 куска одинаковой длины; тогда длина d одного куска равна:

$$d = 168 + \frac{x}{24}.$$

С одной стороны, $d > 168$. С другой стороны,

$$d < 168 + \frac{168}{24} = 168 + 7 = 175.$$

Итак, $168 < d < 175$, так что куски являются стандартными. Следовательно, данный моток разрезается самое большее на 24 одинаковых стандартных куска.

б) Сформулируем и решим задачу в общем виде — тем самым яснее проявится идея её решения.

Пусть a и b — натуральные числа ($a < b$). Всякое число, расположенное на отрезке $[a; b]$, называем *стандартным*. Нам надо найти такое наименьшее число l , что любое число $L > l$ можно представить в виде суммы стандартных слагаемых.

Существует наибольшее натуральное n , для которого выполнено неравенство

$$(n - 1)b < na.$$

В самом деле, нетрудно видеть, что это есть наибольшее натуральное n , удовлетворяющее неравенству $n < b/(b - a)$. Обозначим его n_0 :

$$n_0 = \max\{n \in \mathbb{N}: (n - 1)b < na\} = \max\left\{n \in \mathbb{N}: n < \frac{b}{b - a}\right\}. \quad (37)$$

Пусть сначала $l < n_0a$. Покажем, что найдётся $L > l$, не представимое в виде суммы стандартных слагаемых. Возьмём L таким, что $\max\{l, n_0a - 1\} < L < n_0a$. Иными словами, мы выбираем число L , одновременно удовлетворяющее двум условиям:

- 1) $L > l$;
- 2) $n_0a - 1 < L < n_0a$.

Поскольку $(n_0 - 1)b < n_0a$, из второго условия следует неравенство

$$(n_0 - 1)b < L < n_0a. \quad (38)$$

Предположим, что L равно сумме k стандартных слагаемых. Тогда $ka \leq L \leq kb$. Отсюда и из неравенства (38) следует, что одновременно выполнены неравенства $k > n_0 - 1$ и $k < n_0$. Полученное противоречие показывает, что L нельзя представить в виде суммы стандартных слагаемых.

► Чтобы лучше почувствовать эту ситуацию, возьмите $a = 4$, $b = 5$ и подумайте, почему число 15,5 не представляется в виде суммы стандартных слагаемых. ◀

Пусть теперь $l = n_0 a$. Покажем, что любое число $L > l$ можно представить в виде суммы стандартных слагаемых.

Для любого L найдётся натуральное n такое, что $na \leq L < (n+1)a$. Поскольку выполнено $L > n_0 a$, имеем $n+1 > n_0$. Отсюда в соответствии с определением (37) числа n_0 заключаем, что $(n+1)a \leq nb$. Это даёт нам неравенство

$$na \leq L < nb,$$

или

$$a \leq \frac{L}{n} < b.$$

Следовательно, L можно представить в виде суммы n стандартных слагаемых, каждое из которых равно L/n .

Таким образом, мы нашли наименьшее l , такое, что любое число $L > l$ представляется суммой стандартных слагаемых. Это наименьшее l равно $n_0 a$.

Остаётся применить полученные результаты к исходной задаче. Имеем: $a = 168$, $b = 175$, так что

$$\frac{b}{b-a} = \frac{175}{7} = 25.$$

Согласно (37) находим $n_0 = 24$. Тогда $l = n_0 a = 24 \cdot 168 = 4032$.

31. [Условие]

ОТВЕТ: а) 30; б) 2.

РЕШЕНИЕ. а) Всего имеется $33 + 27 = 60$ коробок. Значит, в каждом контейнере должно находиться по 30 коробок.

Пусть x — количество лёгких (по 19 кг) коробок в первом контейнере. Тогда число тяжёлых (по 49 кг) коробок в первом контейнере равно $30 - x$. Во втором контейнере лёгких коробок получается $33 - x$, а тяжёлых коробок: $27 - (30 - x) = x - 3$.

Суммарные массы коробок в первом и втором контейнерах равны соответственно:

$$\begin{aligned} m_1 &= 19x + 49(30 - x) = 1470 - 30x, \\ m_2 &= 19(33 - x) + 49(x - 3) = 480 + 30x. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$S = |m_2 - m_1| = |60x - 990| = 30|2x - 33|.$$

Число $|2x - 33|$ является нечётным и принимает наименьшее возможное значение 1 при $x = 16$ или $x = 17$. Следовательно, наименьшее значение S равно 30.

б) Пусть в первом контейнере находится x лёгких коробок и y тяжёлых коробок. Тогда во втором контейнере будет $33 - x$ и $27 - y$ лёгких и тяжёлых коробок соответственно. Имеем:

$$\begin{aligned} m_1 &= 19x + 49y, \\ m_2 &= 19(33 - x) + 49(27 - y) = 1950 - 19x - 49y. \end{aligned}$$

При этом имеют место неравенства:

$$x \leq 33, \quad y \leq 27. \tag{39}$$

Величина S равна:

$$S = |38x + 98y - 1950| = 2|19x + 49y - 975|.$$

Нам, таким образом, требуется найти минимальное значение S при условии, что выполнены оба неравенства (39).

Заметим, что возможен прямой перебор всех значений x и y ($0 \leq x \leq 33$, $0 \leq y \leq 27$), то есть последовательное рассмотрение всех $34 \cdot 28$ вариантов. Вообще, исчерпывающий перебор конечного числа вариантов — это полноценное решение задачи! Но мы, естественно, таким путём не пойдём и поищем способ избежать прямого перебора.

Прежде всего проверим, не может ли S равняться нулю. Для этого рассмотрим уравнение:

$$19x + 49y = 975. \quad (40)$$

Будем использовать остатки от деления на 7. Перепишем уравнение (40) следующим образом:

$$5x + 14x + 49y = 975.$$

Нетрудно проверить, что 975 даёт остаток 2 ($975 = 139 \cdot 7 + 2$). Значит, и слагаемое $5x$ даёт остаток 2 (ведь остальные слагаемые в левой части делятся на 7). Какой остаток при этом даёт сам x ? Перебор остатков от 0 до 6 показывает, что единственная возможность — это остаток 6, то есть

$$x = 7k + 6. \quad (41)$$

Подставляем (41) в (40)

$$\begin{aligned} 19(7k + 6) + 49y &= 975, \\ 19 \cdot 7k + 49y &= 861, \end{aligned}$$

и после сокращения на 7:

$$19k + 7y = 123. \quad (42)$$

Благодаря этому сокращению уравнение (42) проще уравнения (40). Давайте повторим всю эту процедуру — теперь уже применительно к уравнению (42). Начинаем так же:

$$5k + 14k + 7y = 123.$$

Правая часть 123 даёт остаток 4 ($123 = 17 \cdot 7 + 4$). Значит, и $5k$ даёт остаток 4. Тогда k может давать только остаток 5:

$$k = 7m + 5. \quad (43)$$

Подставляя (43) в (41), получим: $x = 7(7m + 5) + 6 = 49m + 41$. Таким образом, оказывается, что $x \geq 41$ — вопреки первому неравенству (39).

Итак, уравнение (40) не имеет решений, удовлетворяющих условию (39). Поэтому $S \neq 0$.

► А какие решения есть? Давайте всё же доведём до конца решение уравнения (40) — полезно посмотреть, чем дело кончится. Подставим (43) в (42):

$$\begin{aligned} 19(7m + 5) + 7y &= 123, \\ 19 \cdot 7m + 7y &= 28, \\ 19m + y &= 4. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что единственная возможность — это $m = 0$ и $y = 4$. Остаётся найти x . Из (43) и (41) последовательно получаем: $k = 7 \cdot 0 + 5 = 5$, $x = 7 \cdot 5 + 6 = 41$.

Итак, уравнение (40) имеет единственное решение $(41, 4)$ в натуральных числах. Это решение не удовлетворяет условию (39). ◀

Поскольку S является чётным числом, имеем оценку: $S \geq 2$. Равенство достигается, например, в случае $x = 23$ и $y = 11$:

$$S = 2 \cdot |19 \cdot 23 + 49 \cdot 11 - 975| = 2 \cdot |976 - 975| = 2.$$

Следовательно, наименьшее значение S равно 2.

► Как найден пример? Берём уравнение $19x + 49y = 976$ и решаем его тем же способом — через остатки от деления на 7. Упражняйтесь! ◀

32. [Условие]

ОТВЕТ: а) да; б) 10; в) $8/17$.

РЕШЕНИЕ. Пусть m — число мальчиков, d — число девочек в группе. Пусть m_1 мальчиков сходили в театр, m_2 мальчиков сходили в кино, d_1 девочек сходили в театр, d_2 девочек сходили в кино.

Для случая похода в театр имеем:

$$m_1 \leq \frac{3}{11}(m_1 + d_1) \Rightarrow 8m_1 \leq 3d_1.$$

Для случая посещения кино:

$$m_2 \leq \frac{3}{7}(m_2 + d_2) \Rightarrow 4m_2 \leq 3d_2.$$

Сложим первое из полученных неравенств с удвоенным вторым:

$$8(m_1 + m_2) \leq 3d_1 + 6d_2.$$

Поскольку каждый мальчик сходил либо в театр, либо в кино, имеем $m_1 + m_2 \geq m$. Кроме того, очевидно, $d_1 \leq d$ и $d_2 \leq d$. Получаем:

$$8m \leq 8(m_1 + m_2) \leq 3d_1 + 6d_2,$$

то есть

$$8m \leq 9d. \quad (44)$$

а) Да, 10 мальчиков могло быть в группе из 20 учащихся. Например, в театр сходили 3 мальчика и все 10 девочек, в кино — остальные 7 мальчиков и 10 девочек. Нужные неравенства выполнены:

$$3 \leq \frac{3}{11} \cdot (3 + 10), \quad 7 \leq \frac{3}{7} \cdot (7 + 10).$$

► Как построен пример? Прежде всего, значения $m = 10$ и $d = 10$ не противоречат неравенству (44), и это наводит на мысль, что пример тут возможен. Затем берём неравенства $8m_1 \leq 3d_1$ и $4m_2 \leq 3d_2$, задействуем девочек по максимуму ($d_1 = d_2 = 10$) и находим подходящие m_1 и m_2 . ◀

б) Предположим, что в группе из 20 учащихся имеется не менее 11 мальчиков: $m \geq 11$. Тогда $d \leq 9$. Имеем: $8m \geq 88$, $9d \leq 81$, что противоречит неравенству (44). Следовательно, $m \leq 10$, и с учётом пункта а) приходим к выводу, что наибольшее возможное количество мальчиков в группе равно 10.

в) Перепишем неравенство (44) следующим образом:

$$8m \leq 9d \Rightarrow \frac{m}{d} \leq \frac{9}{8} \Rightarrow \frac{m}{d} + 1 \leq \frac{17}{8} \Rightarrow \frac{m+d}{d} \leq \frac{17}{8} \Rightarrow \frac{d}{m+d} \geq \frac{8}{17}.$$

Как видим, доля девочек не меньше $8/17$. Приведём пример, когда равенство достигается. Пусть в группе 9 мальчиков и 8 девочек. В театр сходили 3 мальчика и 8 девочек, в кино сходили 6 мальчиков и 8 девочек. Нужные неравенства выполнены:

$$3 \leq \frac{3}{11} \cdot (3+8), \quad 6 \leq \frac{3}{7} \cdot (6+8).$$

Следовательно, наименьшая возможная доля девочек равна $8/17$.

33. [Условие]

ОТВЕТ: а) нет; б) нет; в) 4.

РЕШЕНИЕ. Присвоим каждой карточке номер от 1 до 10. Пусть a_1, a_2, \dots, a_{10} — числа, данные в условии и записанные на карточках вначале (число a_k записано на карточке с номером k). Аналогично, b_1, b_2, \dots, b_{10} — числа того же набора, но записанные на карточках после их перемешивания. Согласно условию рассматривается число:

$$c = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_{10} + b_{10}). \quad (45)$$

а) Предположим, что $c = 0$. Тогда в произведении (45) найдётся нулевой множитель, то есть $a_k + b_k = 0$ для некоторого k . Но это невозможно, так как в данном наборе ни для какого числа a_k нет ему противоположного по знаку. Значит, 0 получиться не может.

б) Предположим, что c нечётно. Тогда в произведении (45) каждый множитель должен быть нечётным, то есть $a_k + b_k$ нечётно для любого k ($1 \leq k \leq 10$).

Следовательно, для каждого k в паре (a_k, b_k) одно число чётное, а другое нечётное. Поэтому в последовательности $(a_1, \dots, a_{10}, b_1, \dots, b_{10})$ окажется 10 чётных и 10 нечётных чисел. Однако из условия вытекает, что указанная последовательность содержит 8 чётных чисел и 12 нечётных.

Возникшее противоречие показывает, что c обязано быть чётным. В частности, 1 получиться не может.

в) Далее считаем, что $c > 0$. Предположим, что $c = 2$. Тогда в произведении (45) ровно один из множителей по модулю равен 2, а все остальные по модулю равны 1. Иными словами, $a_m + b_m = \pm 2$ для некоторого m и $a_k + b_k = \pm 1$ для всех остальных k .

Числа a_m и b_m оба чётные или оба нечётные. В каждой из остальных девяти пар (a_k, b_k) одно число чётное, а другое нечётное. Стало быть, в последовательности $(a_1, \dots, a_{10}, b_1, \dots, b_{10})$ окажется или 11 чётных и 9 нечётных чисел (если a_m и b_m чётны), или, наоборот, 9 чётных и 11 нечётных чисел (если a_m и b_m нечётны). Но, как было указано выше, чётных и нечётных чисел в этой последовательности имеется 8 и 12 соответственно.

Значит, случай $c = 2$ невозможен. Поскольку c чётно, имеем оценку: $c \geq 4$.

Приведём пример, в котором достигается равенство $c = 4$. Пусть сначала на карточках написаны числа в исходном порядке:

$$1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11.$$

Затем на тех же карточках оказались числа:

$$-2, 1, 4, -3, 7, -5, 9, -8, -11, 10.$$

Получаем:

$$c = (1-2)(-2+1)(-3+4)(4-3)(-5+7)(7-5)(-8+9)(9-8)(10-11)(-11+10) = 4.$$

Следовательно, наименьшее неотрицательное значение c равно 4.

34. [Условие]

Ответ: а) 1; б) 39.

Решение. а) В последовательности не менее одного члена. Но последовательность, состоящая из одного числа 163, удовлетворяет условию задачи. Поэтому наименьшее возможное число членов последовательности равно 1.

б) Заметим прежде всего, что последовательность не может состоять только из чередующихся чисел 1 и 7. В самом деле, если такая последовательность содержит чётное число членов, то её сумма делится на 8. Если же число членов нечётно, то при делении суммы последовательности на 8 могут получиться только остатки 1 или 7 — в случаях $(1, 7, \dots, 1, 7, 1)$ и $(7, 1, \dots, 7, 1, 7)$ соответственно. Однако число 163 при делении на 8 даёт остаток 3.

Стало быть, в последовательности имеется число b , отличное от 1 и 7. Ясно, что $b \geq 11$.

Покажем, что в последовательности не может быть более 39 чисел. Предположим обратное: пусть в последовательности имеется не менее 40 членов. Первые 40 чисел a_1, a_2, \dots, a_{40} этой последовательности разобьём на пары: $(a_1, a_2), (a_3, a_4), \dots, (a_{39}, a_{40})$. Имеются две возможности.

1. Число b не попадает ни в одну из этих первых 20 пар. Поскольку сумма чисел в каждой паре не менее 8, сумма всех членов последовательности будет не менее $8 \cdot 20 + b \geq 171$ вопреки условию.
2. Число b попадает в одну из первых 20 пар. Сумма чисел в этой паре не менее $1 + 11 = 12$, сумма чисел во всех оставшихся 19 парах не менее $19 \cdot 8 = 152$. Тогда сумма последовательности оказывается не менее $12 + 152 = 164$, а это снова противоречит условию.

Таким образом, последовательность содержит менее 40 членов. Предъявим пример последовательности, удовлетворяющей условию и состоящей из 39 членов. Она состоит из 19 пар $(7, 1)$ и заканчивается числом 11:

$$\underbrace{7, 1, 7, 1, \dots, 7, 1}_{19 \text{ пар}} 11.$$

Действительно, сумма такой последовательности равна $19 \cdot 8 + 11 = 163$.

Итак, наибольшее возможное число членов последовательности равно 39.

35. [Условие]

Ответ: а) нет; б) да; в) через 8 минут.

Решение. а) Все числа, которые выписывает Вася, будут делиться на 7. Но число 2012 не делится на 7 и потому никогда не появится на доске.

б) ► Поскольку все числа, появляющиеся на доске, кратны 7, можно убрать множитель 7 и начать с единицы. Таким образом, нам нужно получить в сумме число $63 : 7 = 9$. Пример строится легко:

$$1 \rightarrow 2 (= 1 \cdot 2) \rightarrow 4 (= 2 \cdot 2) \rightarrow 2 (= 1 \cdot 2); \quad 1 + 2 + 4 + 2 = 9.$$

Построив нужный пример для числа 9, мы умножаем все числа на 7 и приводим пример для 63. ◀

Да, может. Пример:

$$7 \rightarrow 14 (= 7 \cdot 2) \rightarrow 28 (= 14 \cdot 2) \rightarrow 14 (= 7 \cdot 2); \quad 7 + 14 + 28 + 14 = 63.$$

в) Поскольку все числа возникающей последовательности имеют общий множитель 7, мы можем все члены последовательности разделить на 7. Таким образом, сначала на доске написано число 1, Вася совершает описанные в условии операции, и вопрос ставится так: через какое наименьшее время на доске может появиться число $112 (= 784 : 7)$?

► Чувствуется, что мы доберёмся до 112 за наименьшее время, если будем умножать последнее число на 2 столько, сколько возможно. Начинаем:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 64.$$

Дальше умножать на 2 уже нельзя, поэтому ограничиваемся сложением: $64 + 32 = 96$, $96 + 16 = 112$. Остаётся доказать «минимальность» найденной последовательности. ◀

Покажем, что семи минут Вася не хватит. Через семь минут на доске будет последовательность $1, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$. Если при переходе к числу a_{k+1} число a_k не умножается на 2, то оно увеличивается максимум в полтора раза (когда к нему прибавляется предыдущее число). Поэтому имеем: $a_1 = 2$, $a_2 \leq 4$, $a_3 \leq 8$, $a_4 \leq 16$, $a_5 \leq 32$, $a_6 \leq 64$ и, наконец, $a_7 \leq 64 + 32 = 96 < 112$.

Вася может уложиться в восемь минут. Пример:

$$1 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{2} 4 \xrightarrow{3} 8 \xrightarrow{4} 16 \xrightarrow{5} 32 \xrightarrow{6} 64 \xrightarrow{7} 96 \xrightarrow{8} 112.$$

Таким образом, число 112 может появиться самое меньшее через восемь минут.

36. [Условие]

ОТВЕТ: а) да; б) нет; в) 11.

РЕШЕНИЕ. а) Приведём пример арифметической прогрессии из 50 членов, содержащей ровно 6 целых чисел. Первый член равен $1/8$, разность прогрессии тоже равна $1/8$:

$$\underbrace{\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \dots, \frac{7}{8}}_{8 \text{ чисел}}, \underbrace{1, 1\frac{1}{8}, 1\frac{2}{8}, \dots, 1\frac{7}{8}}_{8 \text{ чисел}}, \underbrace{2, \dots, 5\frac{1}{8}, 5\frac{2}{8}, \dots, 5\frac{7}{8}}_{8 \text{ чисел}}, 6, 6\frac{1}{8}, 6\frac{2}{8}.$$

б) Предположим, что прогрессия содержит ровно 29 целых чисел. В таком случае у неё нецелая разность (иначе все члены прогрессии были бы или целыми, или нецелыми), и потому вслед за целым числом идёт нецелое. Следовательно, прогрессия содержит также как минимум 28 нецелых чисел. Всего членов прогрессии получается не менее $29 + 28 = 57 > 50$ — противоречие. Значит, прогрессия не может содержать ровно 29 целых чисел.

в) ► Попробуем представить себе, как может быть устроена арифметическая прогрессия, в которой имеется k целых чисел, а остальные — нецелые. Вообще говоря, так:

$$\underbrace{* \dots *}_{p} \boxed{z_1} \underbrace{* \dots *}_{m} \boxed{z_2} \underbrace{* \dots *}_{m} \boxed{z_3} \dots \boxed{z_{k-1}} \underbrace{* \dots *}_{m} \boxed{z_k} \underbrace{* \dots *}_{q}$$

Здесь z_1, z_2, \dots, z_k — целые числа, а звёздочками обозначены нецелые числа. Таким образом, между каждой парой соседних целых чисел расположено одно и то же количество m нецелых; кроме того, прогрессия может начинаться с p нецелых чисел и заканчиваться q нецелыми числами ($p, q \leq m$).

Если всего имеется 50 членов прогрессии, то выполнено соотношение

$$50 = k + (k - 1)m + p + q.$$

Располагая этими наводящими соображениями, можно переходить к строгим доказательствам. ◀

Покажем, что прогрессия может содержать ровно 1, 2, …, 10 целых чисел. Нетрудно было бы привести десять конкретных примеров, но нам поможет сэкономить время и место следующая лемма.

ЛЕММА. Предположим, что выполнено равенство

$$50 = k + (k - 1)m + p + q, \quad (46)$$

где k и m — натуральные числа, а p и q — целые числа, удовлетворяющие условию $0 \leq p, q \leq m$. Тогда существует арифметическая прогрессия из 50 чисел, содержащая ровно k целых чисел. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведём пример нужной прогрессии. Её первый член равен $1 - \frac{p}{m+1}$, а разность равна $\frac{1}{m+1}$:

$$\begin{aligned} & \underbrace{1 - \frac{p}{m+1}, \dots, 1 - \frac{1}{m+1}}_p, \\ & \underbrace{1, 1 + \frac{1}{m+1}, \dots, 1 + \frac{m}{m+1}}_m, \\ & \underbrace{2, 2 + \frac{1}{m+1}, \dots, 2 + \frac{m}{m+1}}_m, \\ & \dots \\ & \underbrace{k-1, k-1 + \frac{1}{m+1}, \dots, k-1 + \frac{m}{m+1}}_m, \\ & \underbrace{k, k + \frac{1}{m+1}, \dots, k + \frac{q}{m+1}}_q. \end{aligned}$$

Эта прогрессия содержит k целых чисел: $1, 2, \dots, k$. Остальные выписанные числа являются нецелыми. Всего выписано чисел: $p + k + (k-1)m + q = 50$. Лемма доказана.

Теперь выпишем десять представлений числа 50 в виде (46):

$$\begin{aligned} 50 &= 1 + 0 \cdot 49 + 49 + 0 \quad (k = 1, m = 49, p = 49, q = 0), \\ 50 &= 2 + 1 \cdot 48 + 0 + 0 \quad (k = 2, m = 48, p = 0, q = 0), \\ 50 &= 3 + 2 \cdot 23 + 1 + 0 \quad (k = 3, m = 23, p = 1, q = 0), \\ 50 &= 4 + 3 \cdot 14 + 4 + 0 \quad (k = 4, m = 14, p = 4, q = 0), \\ 50 &= 5 + 4 \cdot 11 + 1 + 0 \quad (k = 5, m = 11, p = 1, q = 0), \\ 50 &= 6 + 5 \cdot 8 + 4 + 0 \quad (k = 6, m = 8, p = 4, q = 0), \\ 50 &= 7 + 6 \cdot 7 + 1 + 0 \quad (k = 7, m = 7, p = 1, q = 0), \\ 50 &= 8 + 7 \cdot 6 + 0 + 0 \quad (k = 8, m = 6, p = 0, q = 0), \\ 50 &= 9 + 8 \cdot 5 + 1 + 0 \quad (k = 9, m = 5, p = 1, q = 0), \\ 50 &= 10 + 9 \cdot 4 + 4 + 0 \quad (k = 10, m = 4, p = 4, q = 0). \end{aligned}$$

Из леммы следует тогда, что наша прогрессия может содержать ровно 1, 2, …, 10 целых чисел.

► Если $k = 11$, то число 50 не получается представить в виде (46). Это наводит на мысль, что 11 является искомым числом. ◀

Теперь покажем, что в нашей прогрессии не может быть ровно 11 целых чисел. Предположим обратное: прогрессия из 50 чисел содержит ровно 11 целых чисел.

Ясно, что разность прогрессии d является нецелым рациональным числом. В самом деле, если a_s и $a_t > a_s$ — соседние целые члены прогрессии, то $d = (a_t - a_s)/(t - s)$. Запишем d в виде

несократимой дроби: $d = \frac{l}{m+1}$ (l — целое, m — натуральное). Тогда между a_s и a_t находится в точности m нецелых чисел:

$$a_s + \frac{l}{m+1}, a_s + \frac{2l}{m+1}, \dots, a_s + \frac{ml}{m+1}.$$

Итак, в прогрессии имеется: 1) 11 целых чисел; 2) 10 промежутков между ними, содержащих по m нецелых чисел; 3) p нецелых чисел перед первым целым числом и q нецелых чисел после последнего целого числа ($0 \leq p, q \leq m$). Следовательно, должно быть выполнено равенство

$$50 = 11 + 10m + p + q,$$

или

$$10m + p + q = 39.$$

Из этого равенства видно, что $m \leq 3$, и тогда $p + q \geq 9$. Но с другой стороны, оба числа p и q не превосходят m , поэтому $p + q \leq 6$. Полученное противоречие показывает, что в прогрессии не может быть ровно 11 целых чисел.

Таким образом, наименьшее число n , при котором наша прогрессия не может содержать ровно n целых чисел, равно 11.

37. [Условие]

ОТВЕТ: а) нет; б) нет; в) да.

РЕШЕНИЕ. а) Предположим, что в нашей последовательности три члена. Тогда она имеет вид: 1, a , 2046.

Если эти числа образуют арифметическую прогрессию, то $2a = 1 + 2046 = 2047$. Противоречие: левая часть чётна, а правая нечётна.

Если эти числа образуют геометрическую прогрессию, то $a^2 = 1 \cdot 2046 = 2046$. Снова противоречие: 2046 не является квадратом натурального числа ($45^2 = 2025 < 2046 < 46^2 = 2116$).

Поэтому три члена в последовательности быть не может.

б) Предположим, что в последовательности четыре члена: 1, a , b , 2046. Возможны четыре случая.

- Первые три числа образуют арифметическую прогрессию и вторые три числа образуют арифметическую прогрессию (то есть все четыре числа образуют арифметическую прогрессию). Тогда имеем:

$$2a = 1 + b, \quad 2b = a + 2046.$$

Выражаем b из первого равенства и подставляем во второе:

$$b = 2a - 1 \Rightarrow 4a - 2 = a + 2046 \Rightarrow 3a = 2048.$$

Противоречие: левая часть делится на 3, а правая не делится.

- Первые три числа образуют арифметическую прогрессию, а вторые три числа образуют геометрическую прогрессию. Тогда:

$$2a = 1 + b, \quad b^2 = 2046a.$$

После исключения b :

$$(2a - 1)^2 = 2046a.$$

Слева стоит квадрат нечётного числа, который также является нечётным числом. Справа стоит чётное число. Противоречие.

3. Первые три числа образуют геометрическую прогрессию, вторые три числа образуют арифметическую прогрессию. Тогда:

$$a^2 = b, \quad 2b = a + 2046.$$

Приходим к квадратному уравнению: $2a^2 - a - 2046 = 0$. Его дискриминант 16369 не является квадратом натурального числа ($127^2 < 16369 < 128^2$). Значит, это уравнение не имеет натуральных корней.

4. Первые три числа образуют геометрическую прогрессию и вторые три числа образуют геометрическую прогрессию (то есть все четыре числа образуют геометрическую прогрессию). Тогда:

$$a^2 = b, \quad b^2 = 2046a.$$

Отсюда $a^4 = 2046a$, то есть $a^3 = 2046$. Это невозможно, поскольку 2046 не является кубом натурального числа ($12^3 < 2046 < 13^3$).

Итак, в каждом случае получаем противоречие. Следовательно, данная последовательность не может состоять из четырёх членов.

в) В последовательности может быть менее 2046 членов. Вот пример арифметической прогрессии из шести чисел: 1, 410, 819, 1228, 1637, 2046.

► Сконструируем арифметическую прогрессию с первым членом 1 и n -м членом 2046. Пусть разность этой прогрессии равна d . Имеем:

$$2046 = 1 + (n - 1)d \Rightarrow (n - 1)d = 2045.$$

Полагаем $n = 6$, находим $d = 2045 : 5 = 409$ и выписываем прогрессию. ◀

38. [Условие]

ОТВЕТ: а) да; б) нет.

РЕШЕНИЕ. а) Да, может: 216, 252, 294, 343. Это геометрическая прогрессия со знаменателем $7/6$.

► Предположим, что четыре натуральных числа a, b, c, d образуют геометрическую прогрессию. Знаменатель этой прогрессии является несократимой дробью n/m с натуральными m и n :

$$a, \quad b = \frac{an}{m}, \quad c = \frac{an^2}{m^2}, \quad d = \frac{an^3}{m^3}.$$

Отсюда видно, что a делится на m^3 , то есть $a = km^3$ для некоторого натурального k . Прогрессия приобретает вид:

$$km^3, \quad km^2n, \quad kmn^2, \quad kn^3.$$

Остается заметить, что $6^3 = 216 > 210$, $7^3 = 343 < 350$, и положить $k = 1$, $m = 6$, $n = 7$.

Данный пример позволяет почувствовать также, что втиснуть в интервал от 210 до 350 пять чисел, образующих геометрическую прогрессию, уже вряд ли получится. Поэтому в пункте б) надо пытаться доказать, что это невозможно. ◀

б) Предположим, что прогрессия состоит из пяти натуральных чисел a, b, c, d, e . Знаменатель прогрессии является несократимой дробью n/m с натуральными m и n . Запишем нашу прогрессию так:

$$a, \quad b = \frac{an}{m}, \quad c = \frac{an^2}{m^2}, \quad d = \frac{an^3}{m^3}, \quad e = \frac{an^4}{m^4}.$$

Отсюда видно, что a делится на m^4 , то есть $a = km^4$ для некоторого натурального k . Прогрессия, стало быть, имеет вид:

$$km^4, \quad km^3n, \quad km^2n^2, \quad kmn^3, \quad kn^4.$$

Без ограничения общности считаем прогрессию возрастающей, так что $n > m$. Поскольку все члены прогрессии находятся между числами 210 и 350, имеем:

$$km^4 > 210, \tag{47}$$

$$kn^4 < 350. \tag{48}$$

Из неравенства (48) следует, что n может принимать только значения 2, 3 или 4. Рассмотрим эти три случая по отдельности.

- $n = 2$. Тогда $m = 1$. Имеем:

$$(47) \Rightarrow k > 210;$$

$$(48) \Rightarrow k < \frac{350}{2^4} < 21.$$

Противоречие.

- $n = 3$. Тогда $m = 1$ или $m = 2$. Имеем:

$$(47) \Rightarrow k > \frac{210}{2^4} > 13;$$

$$(48) \Rightarrow k < \frac{350}{3^4} < 5.$$

Противоречие.

- $n = 4$. Тогда $m = 1, 2$ или 3 . Имеем:

$$(47) \Rightarrow k > \frac{210}{3^4} > 2;$$

$$(48) \Rightarrow k < \frac{350}{4^4} < 2.$$

Снова противоречие.

Полученные противоречия показывают, что прогрессия не может состоять из пяти членов.

39. [Условие]

ОТВЕТ: а) нет; б) нет; в) да.

РЕШЕНИЕ. Разложим число 1512 на простые множители:

$$1512 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7. \tag{49}$$

Пусть также $1512 = c_1c_2c_3c_4c_5$, где c_1, \dots, c_5 — различные натуральные числа.

а) Предположим, что все пять чисел c_1, \dots, c_5 образуют геометрическую прогрессию. Поскольку все эти числа натуральные, знаменатель прогрессии является несократимой дробью n/m с натуральными n и m . Запишем нашу прогрессию так:

$$c_1, \quad c_2 = c_1 \frac{n}{m}, \quad c_3 = c_1 \frac{n^2}{m^2}, \quad c_4 = c_1 \frac{n^3}{m^3}, \quad c_5 = c_1 \frac{n^4}{m^4}.$$

Отсюда видно, что c_1 делится на m^4 , то есть $c_1 = km^4$ для некоторого натурального k . Тогда наша прогрессия приобретает вид:

$$c_1 = km^4, \quad c_2 = km^3n, \quad c_3 = km^2n^2, \quad c_4 = kmn^3, \quad c_5 = kn^4.$$

Не теряя общности, можно считать, что прогрессия возрастающая. Тогда $n > m$. Перемножая числа c_1, \dots, c_5 , получим:

$$1512 = k^5m^{10}n^{10}.$$

Выходит, что 1512 делится на десятую степень некоторого натурального числа $n > 1$. Но разложение (49) числа 1512 на простые множители не содержит множителей в десятой степени. Полученное противоречие показывает, что числа c_1, \dots, c_5 не могут образовывать геометрическую прогрессию.

б) Предположим, что числа c_1, c_2, c_3, c_4 образуют возрастающую геометрическую прогрессию:

$$c_1, \quad c_2 = c_1 \frac{n}{m}, \quad c_3 = c_1 \frac{n^2}{m^2}, \quad c_4 = c_1 \frac{n^3}{m^3}.$$

Число c_1 делится на m^3 , то есть $c_1 = km^3$ ($k \in \mathbb{N}$). Следовательно, прогрессия имеет вид:

$$c_1 = km^3, \quad c_2 = km^2n, \quad c_3 = kmn^2, \quad c_4 = kn^3.$$

Перемножаем числа c_1, \dots, c_5 :

$$1512 = k^4m^6n^6c_5.$$

Снова получаем противоречие: 1512 не может делиться на шестую степень натурального числа $n > 1$. Поэтому ответ на вопрос пункта б) — отрицательный.

► Заметим, что из пункта б) следует пункт а). В самом деле, если среди сомножителей c_1, \dots, c_5 не найдётся четырёх членов геометрической прогрессии, то пяти членов не найдётся и подавно. Поэтому решение можно было бы начать сразу с пункта б). Мы привели отдельное решение для пункта а) из методических соображений. ◀

в) Предъявляем соответствующий пример: $4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 1 = 1512$. Числа 4, 6, 9 образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $3/2$.

► Пример найден следующим образом. Предположим, что числа c_1, c_2, c_3 образуют геометрическую прогрессию:

$$c_1 = km^2, \quad c_2 = kmn, \quad c_3 = kn^2.$$

Тогда $1512 = k^3m^3n^3c_4c_5$. Глядя на разложение (49) числа 1512 на простые множители, берём $k = 1$, $m = 2$, $n = 3$, $c_4 = 7$, $c_5 = 1$. ◀

40. [Условие]

ОТВЕТ: 155.

РЕШЕНИЕ. Числа вида $n(n + 1)/2$ будем называть запрещёнными. Вот начало последовательности запрещённых чисел: 1, 3, 6, 10, 15, ...

Пусть a и d — первый член и разность арифметической прогрессии. Так как число 1 запрещённое, то $a \geq 2$. Так как члены прогрессии — различные натуральные числа, то $d > 0$.

Если $d = 1$, то прогрессия будет содержать запрещённое число — например, 10. Если $d = 2$, то прогрессия также будет содержать запрещённое число — например, 10 для чётного a и 15 для нечётного a . Стало быть, $d \geq 3$.

Сумма S первых 10 членов прогрессии равна:

$$S = \frac{2a + 9d}{2} \cdot 10 = 10a + 45d.$$

С учётом полученных неравенств имеем оценку:

$$S \geq 10 \cdot 2 + 45 \cdot 3 = 155.$$

Нижнее значение 155 нашей оценки реализуется для прогрессии с $a = 2$ и $d = 3$ (то есть для прогрессии 2, 5, 8, ...). Остаётся показать, что эта прогрессия не содержит запрещённых чисел.

Под номером k в данной прогрессии идёт число $2 + 3(k - 1) = 3k - 1$. Нам нужно доказать, что равенство

$$3k - 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

невозможно ни при каких k и n . Перепишем это равенство в виде:

$$6k = n(n+1) + 2.$$

Число n при делении на 3 может давать остатки 0, 1 или 2. Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

1. $n = 3m \Rightarrow 6k = 3m(3m+1) + 2.$
2. $n = 3m + 1 \Rightarrow 6k = (3m+1)(3m+2) + 2 = 9m^2 + 9m + 4.$
3. $n = 3m + 2 \Rightarrow 6k = (3m+2)(3m+3) + 2 = 3(3m+2)(m+1) + 2.$

Всюду имеем противоречие: левая часть $6k$ делится на 3, а правая часть на 3 не делится (остаток 2 в первом и третьем случаях, остаток 1 во втором случае).

Таким образом, прогрессия 2, 5, 8, ... действительно не содержит запрещённых чисел. Поскольку для неё $S = 155$, то 155 — наименьшее значение величины S .

41. [Условие]

ОТВЕТ: а) да; б) нет.

РЕШЕНИЕ. Если среднее арифметическое любых 27 чисел набора меньше 2, то сумма любых 27 чисел набора меньше $27 \cdot 2 = 54$. Будучи натуральным числом, эта сумма не превосходит 53.

Обозначим S максимальную сумму 27 чисел данного набора. Итак, $S \leq 53$.

а) Да, может. Такой набор содержит 13 единиц, 17 двоек и 3, 4, 5. Для него, очевидно,

$$S = 3 + 4 + 5 + 17 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 53.$$

► Наводящее соображение очень простое. Если есть ровно 13 единиц и 3, 4, 5, то оставшиеся 17 вакансий заполняются как минимум двойками. Вот и возьмём набор с этими 17-ю двойками! Ясно, что максимальная сумма S получится, если в качестве слагаемых взять 3, 4, 5 и все двойки, добавив остаток единицами. ◀

б) Предположим, что набор содержит k единиц ($0 \leq k \leq 12$). Остальные $30 - k$ чисел набора (помимо 3, 4, 5) назовём вакантными. Вакантных чисел, стало быть, не менее 18, и каждое вакантное число не меньше 2.

Таким образом, наш набор содержит 3, 4, 5 и восемнадцать чисел, не меньших 2; остальные числа набора не меньше 1. Для максимальной суммы S тогда получаем:

$$S \geq 3 + 4 + 5 + 18 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 54.$$

Данное неравенство показывает, что набор не может содержать менее 13 единиц.

в) Заметим сразу, что если набор содержит не менее 16 единиц, то $16 \cdot 1 + 3 + 4 + 5 = 28$. Поэтому остаётся разобрать случаи, когда количество k единиц в наборе менее 16.

Остальные $30 - k$ чисел (помимо 3, 4, 5) продолжаем называть вакантными.

- $k = 13$. Легко видеть, что набор, предъявленный в пункте а), оказывается единственным набором с ровно тринадцатью единицами. В самом деле, для любого другого такого набора сумма 17-ти вакантных чисел будет больше $17 \cdot 2 = 34$, и сумма S станет больше 53.

А для предъявленного набора имеем: $3 + 4 + 5 + 8 \cdot 2 = 28$.

- $k = 14$ или $k = 15$. Заметим, что среди вакантных чисел обязательно найдётся двойка. В самом деле, иначе все вакантные числа (которых, соответственно, 16 или 15) будут не меньше 3, и тогда их сумма окажется как минимум $15 \cdot 3 = 45$, что противоречит условию.

Остаётся взять 14 единиц и эту двойку: $14 \cdot 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 28$.

Доказательство закончено.

42. [Условие]

ОТВЕТ: а) 48; б) отрицательных; в) 12.

РЕШЕНИЕ. Напомним, что среднее арифметическое нескольких чисел есть сумма этих чисел, делённая на их количество.

Пусть на доске написано n чисел. Тогда их сумма: $S = -7n$. Обозначим: p — количество положительных чисел, m — количество отрицательных чисел, z — количество нулей. Таким образом, $n = p + m + z$.

Пусть S_+ и S_- — суммы положительных и отрицательных чисел соответственно. Имеем: $S_+ = 6p$, $S_- = -12m$, и так как $S = S_+ + S_-$, то:

$$-7n = 6p - 12m.$$

а) Правая часть данного равенства делится на 6. Поскольку 6 и 7 взаимно просты, число n делится на 6. Между числами 42 и 54 есть только одно такое число: $n = 48$.

б) Из равенства $-7 \cdot 48 = 6p - 12m$ получаем после сокращения на 6:

$$2m - p = 56.$$

Кроме того:

$$p + m + z = 48.$$

Сложим полученные равенства: $3m + z = 104$. Так как 104 при делении на 3 дает остаток 2, число z также даёт остаток 2: $z = 3k + 2$. Отсюда: $3m + 3k + 2 = 104$, или

$$m = 34 - k.$$

Соответственно,

$$p = 2m - 56 = 2(34 - k) - 56 = 12 - 2k.$$

Составляем разность: $p - m = (12 - 2k) - (34 - k) = -22 - k < 0$, так что $p < m$ — отрицательных чисел написано больше.

в) Из равенства $p = 12 - 2k$ видим, что $p \leq 12$.

Приведём пример с $p = 12$ (тогда $k = 0$, $z = 2$, $m = 34$). Пусть написано 12 чисел 6, 34 числа -12 и два нуля. Этот набор удовлетворяет условию задачи: среднее арифметическое положительных чисел равно, очевидно, 6; среднее арифметическое отрицательных чисел равно -12 , а среднее арифметическое всех чисел:

$$\frac{12 \cdot 6 + 34 \cdot (-12)}{48} = -7.$$

Следовательно, наибольшее возможное количество положительных чисел равно 12.

43. [Условие]

ОТВЕТ: 1 и 4455.

РЕШЕНИЕ. В первом наборе девять чисел; обозначим $a_1 = \pm 11, a_2 = \pm 12, \dots, a_9 = \pm 19$. Во втором наборе шесть чисел; обозначим $b_1 = \pm 3, b_2 = \pm 4, \dots, b_6 = \pm 8$. Знак каждого числа можно выбрать любым — тем самым мы и добьёмся произвольности знака каждого из 54 произведений.

Согласно условию задачи имеем сумму:

$$\begin{aligned} S &= a_1b_1 + a_1b_2 + \dots + a_1b_9 + \\ &\quad + a_2b_1 + a_2b_2 + \dots + a_2b_9 + \\ &\quad \dots \\ &\quad + a_6b_1 + a_6b_2 + \dots + a_6b_9. \end{aligned}$$

Преобразуем:

$$\begin{aligned} S &= (a_1 + a_2 + \dots + a_6)b_1 + (a_1 + a_2 + \dots + a_6)b_2 + \dots + (a_1 + a_2 + \dots + a_6)b_9 = \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_6)(b_1 + b_2 + \dots + b_9) = AB, \end{aligned}$$

где

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_6, \quad B = b_1 + b_2 + \dots + b_9.$$

1) Очевидно, что величина S окажется наибольшей, если все числа взять с плюсом:

$$S_{\max} = (11 + 12 + \dots + 19)(3 + 4 + \dots + 8) = 4455.$$

2) Среди чисел a_1, a_2, \dots, a_9 имеется ровно пять нечётных. Среди чисел b_1, b_2, \dots, b_6 имеется ровно три нечётных. Следовательно, при любом выборе знака каждого из этих чисел оба числа A и B окажутся нечётными, так что S не может равняться нулю. Поэтому имеем оценку: $|S| \geq 1$.

Приведём пример расстановки знаков, когда $S = 1$:

$$(11 + 12 - 13 + 14 + 15 + 16 - 17 - 18 - 19)(-3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8) = 1.$$

Значит, $|S|_{\min} = 1$.

► Идея нахождения нужной расстановки очевидна: добиться равенств $A = 1$ и $B = 1$. С величиной B всё просто: группируем числа последовательно в пары и нужным образом чередуем знаки.

Для величины A лучше начать суммировать с конца: $19 + 18 + 17 = 54, 16 + 15 + 14 = 45$. Эти суммы отличаются на 9, и необходимое слагаемое 10 мы построим из оставшихся чисел: $11 + 12 - 13 = 10$. ◀

44. [Условие]

ОТВЕТ: 3 и 1161.

РЕШЕНИЕ. Первый набор содержит шесть чисел; пусть $a_1 = \pm 6, a_2 = \pm 7, \dots, a_6 = \pm 11$. Второй набор содержит девять чисел; пусть $b_1 = \pm 9, b_2 = \pm 10, \dots, b_9 = \pm 17$.

По условию имеем сумму:

$$\begin{aligned} S &= (a_1 + b_1) + (a_1 + b_2) + \dots + (a_1 + b_9) + \\ &\quad + (a_2 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_2 + b_9) + \\ &\quad \dots \\ &\quad + (a_6 + b_1) + (a_6 + b_2) + \dots + (a_6 + b_9). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$S = 9(a_1 + a_2 + \dots + a_6) + 6(b_1 + b_2 + \dots + b_9),$$

или

$$S = 9A + 6B,$$

где $A = a_1 + a_2 + \dots + a_6$ и $B = b_1 + b_2 + \dots + b_9$.

1) Очевидно, что сумма S будет наибольшей, если все числа взять с плюсом:

$$S_{\max} = 9 \cdot (6 + 7 + \dots + 11) + 6 \cdot (9 + 10 + \dots + 17) = 1161.$$

2) Заметим, что среди чисел a_1, \dots, a_6 ровно три нечётных. Сумма нечётного числа нечётных чисел нечётна; значит, A нечётно. Поэтому и $S = 9A + 6B$ нечётно (поскольку $6B$ чётно).

Кроме того, S делится на 3 (поскольку $9A$ и $6B$ делятся на 3).

Наименьшее по модулю нечётное число, делящееся на 3, есть 3. Стало быть, $|S| \geq 3$ (оценка). Приведём пример расстановки знаков, при которой в оценке достигается равенство:

$$9 \cdot (-6 + 7 - 8 + 9 + 10 - 11) + 6 \cdot (-9 + 10 - 11 - 12 - 13 - 14 + 15 + 16 + 17) = 3.$$

Таким образом, $|S|_{\min} = 3$.

► Как мы додумались до этого примера? Сумма $9A + 6B$ равна трём, если, например $A = 1$ и $B = -1$. Получить для A значение 1 очень легко: просто группируем числа друг за другом в пары и чередуем нужным образом знаки.

Для величины B так не выйдет, поэтому начнём суммировать с конца: $17 + 16 + 15 = 48$. Теперь заметим, что $14 + 13 + 12 + 11 = 50$, что отличается от 48 на 2. Недостающую единицу сделаем из оставшихся чисел 9 и 10. ◀