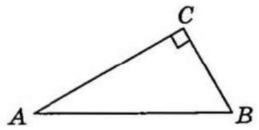
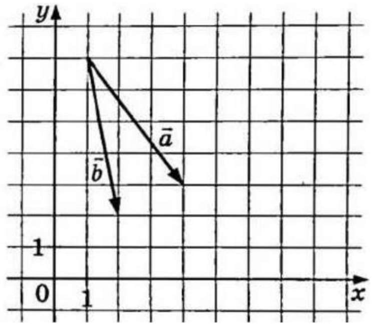
Вариант 1 2024 для С/р

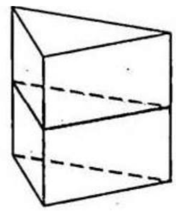
1 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 5$, $\sin A = \frac{7}{25}$. Найдите AC.





2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

3 В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 2300 $см^3$ воды и полностью погрузили в неё деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 25 см до отметки 27 см. Найдите объём детали. Ответ дайте в куб. см.

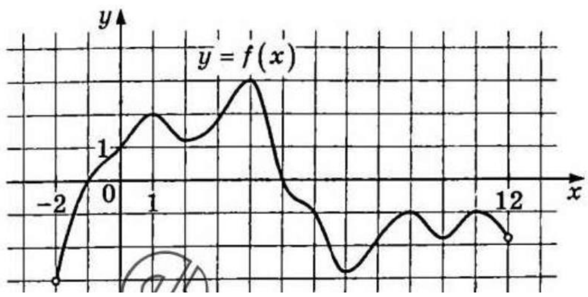


4 Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19 включительно.

5 При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше, чем 810 г, равна 0,96. Вероятность того, что масса окажется больше, чем 790 г, равна 0,93. Найдите вероятность того, что масса буханки больше, чем 790 г, но меньше, чем 810 г.

6 Найдите корень уравнения $\sqrt{57 - 7x} = 6$.

7 Найдите значение выражения $\frac{18 \sin 174° \cdot \cos 174°}{\sin 348°}$.



8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2;\ 12)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

9 Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In, оперативности Op, объективности Tr публикаций, а также качества Q сайта. Каждый отдельный показатель — целое число от -2 до 2.

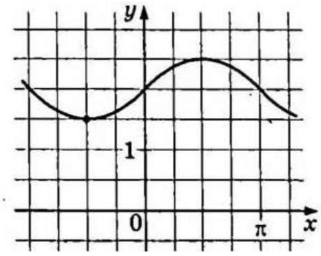
Составители рейтинга считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций — впятеро дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{5In + Op + 3Tr + Q}{A}.$$

Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A, при котором это условие будет выполняться.

10 Часы со стрелками показывают 8 часов 00 минут. Через сколько минут минутная стрелка в четвёртый раз поравняется с часовой?

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = a\sin x + b$. Найдите a.



12 Найдите наименьшее значение функции $y = 2x - \ln(x+4)^2$ на отрезке $[-3{,}5;\ 0]$.

Часть 2

13 а) Решите уравнение $\dfrac{5\sin^2(\pi + x) + 3\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)}{5\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) - 4} = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

14 В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.

а) Докажите, что плоскость SAC перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

15 Решите неравенство $\log_{\sqrt{9+4x^2-12x}}(2x-3)^4 + \log_2 4^{(2x-3)^2} \le 22.$

16 Вклад планируется открыть на три года. Первоначальный вклад составляет **целое** число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 20 % по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале второго и третьего годов вклад ежегодно пополняется на 1 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором через три года вклад будет больше 8 млн рублей.

17 Точка P лежит на стороне AC равностороннего треугольника ABC. Окружность с диаметром BP пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Хорды MF и NE параллельны прямой BP. Отрезки FP и EP пересекают стороны AB и BC в точках T и S соответственно.

а) Докажите, что треугольники APT и CSP подобны.

б) Найдите отношение, в котором точка P делит отрезок AC, если площади треугольников APT и CSP относятся как $4 : 9$.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{2x^3 - (a+20)x^2 + 2a(5+a)x - a^3}{\sqrt{10 - x + a}} = 0$$

имеет ровно одно решение.

19 Из натурального числа вычли сумму его цифр и получили натуральное число A.

а) Может ли A равняться 99?

б) Может ли A равняться 1980?

в) Найдите все натуральные числа, кратные 3, для которых $A = 22\,158$.