Сборник олимпиадных задач по математике за 2013-2016 уч. год

11 класс

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике 2013-2014 учебный год

11 класс

1. Постройте график функции :

$y=\sqrt{4\sin^4 x-2cos2x+3}$ + $\sqrt{4\cos^4 x+2cos2x+3}$.

2. В последовательности квадратных трехчленов $x^2 + ax + b$, $x^2 + (a + 1)x + (b + 1)$,

$x^2 + (a + 2)x + (b + 2)$, . . ., где a – целое число, некоторые два имеют общий корень.

Докажите, что все эти трёхчлены имеют корни, и все эти корни - целые числа.

3. Докажите, что $2a + 1/a^2 > 3$ при $0<a< 1$.

4. На стороне треугольника взяты четыре точки К, Р, Н и М, являющиеся соответственно серединой этой стороны, концом биссектрисы противоположного угла треугольника, точкой касания с этой стороной вписанной в треугольник окружности и основанием соответствующей высоты. Найти КН, если КР = a , КМ = b.

5. На доске написаны три различных числа от 1 до 9. Одним ходом разрешается

либо прибавить к двум из чисел 1, либо вычесть из всех чисел по 1. Верно ли,

что сделав не более 30 таких ходов, всегда можно добиться того, чтобы на

доске остались только нули?

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике 2013-2014 учебный год

Ответы:

11 класс

1. Постройте график функции :

y=$\sqrt{4\sin^4 x-2cos2x+3}$ + $\sqrt{4\cos^4 x+2cos2x+3}$.

Решение.

y=$\sqrt{4\sin^4 x-2cos2x+3}$ + $\sqrt{4\cos^4 x+2cos2x+3}$;

y=$\sqrt{4\sin^4 x-2+4\sin^2 x+3}$ + $\sqrt{4\cos^4 x+4\sin^2 x+1}$;

y=$\sqrt{4\sin^4 x+4\sin^2 x+1}$ + $\sqrt{4\cos^4 x+4\sin^2 x+1}$;

y=$2\sin^2 x+1+2\cos^2 x+1$, y = 4.

Поэтому графиком функции будет прямая, заданная уравнением y = 4.

2. В последовательности квадратных трехчленов $x^2 + ax + b$, $x^2 + (a + 1)x + (b + 1)$, $x^2 + (a + 2)x + (b + 2)$, . . ., где a – целое число, некоторые два имеют общий корень. Докажите, что все эти трёхчлены имеют корни, и все эти корни - целые числа.

Решение.

Пусть трехчлены $x^2+(a+m)x+(b+m)$ и $x^2+(a+n)x+(b+n)$ имеют общий корень x_0.

Тогда $x^2_0+(a+m)x_0+(b+m) = x^2_0+(a+n)x_0+(b+n) = 0$, откуда $(m-n)x_0+(m-n) = 0$.

Но $m - n \neq 0$, поэтому $x_0 + 1 = 0$, то есть $x_0 = -1$. Подставляя корень в квадратное уравнение, получаем: $1-(a+m)+(b+m) = 0$, откуда $b = a-1$ (целое число). Значит, данные квадратные уравнения имеют вид:

$x^2 + (a + k)x + (a - 1 + k) = 0$. Все такие уравнения имеют целые корни:

$x_1 = -1$, $x_2 = 1 - a - k$.

Комментарий. Доказано, что -1 является общим корнем -2 балла.

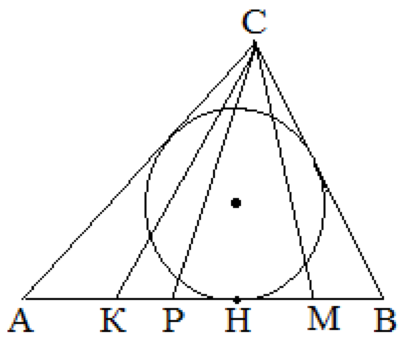
3. Докажите, что $2a + 1/a^2 > 3$ при $0<a<1$.

Решение.

Найдем производную функции $f(a) = 2a + 1/a^2$: $f'(a) = 2 - 2/a^3 < 0$ при $a \in (0;1)$. Значит, f(a) убывает на (0;1), а поэтому $f(0) > f(1)$, где $f(1) = 3$ т.е. $2a + 1/a^2 > 3$ при $a \in (0;1)$.

4. На стороне треугольника взяты четыре точки К, Р, Н и М, являющиеся соответственно серединой этой стороны, концом биссектрисы противоположного угла треугольника, точкой касания с этой стороной вписанной в треугольник окружности и основанием соответствующей высоты. Найти КН, если КР = *a* , КМ = *b*.

Решение.



Пусть дан Δ АСВ, в котором АВ = x,

ВС = y, СА = z.

СК – медиана,

СР – биссектриса,

СМ – высота.

Имеем : $BK = \frac{x}{2}$; по свойству биссектрисы $\frac{BP}{CB} = \frac{AP}{AC}$, $BP \cdot AC = AP \cdot CB$, $BP \cdot AC = CB \cdot (AB - BP)$,

$\mathrm{BP} \cdot \mathrm{AC} + \mathrm{CB} \cdot \mathrm{BP} = \mathrm{CB} \cdot \mathrm{AB}$,

$\mathrm{BP} =\cdot \frac{\mathrm{CB} \cdot \mathrm{AB}}{\mathrm{AC}+\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{xy}}{\mathrm{y}+z}$;

$\mathrm{BH} = \frac{\mathrm{x}+\mathrm{y}-\mathrm{z}}{2}$ (вывод этой формулы основан на равенстве касательных, выходящих из одной точки) ;

из прямоугольного треугольника МСВ ВМ = СВ $\cdot \cos\angle \mathrm{B} = \mathrm{y} \cdot \cos\angle \mathrm{B} = \frac{2\mathrm{xy}\cos\angle \mathrm{B}}{2\mathrm{x}} = \frac{x^2+y^2-z^2}{2x}$.

Далее находим :

КР = ВР – ВК = $\frac{x(y-z)}{2(\mathrm{y}+\mathrm{z})}$,

КН = ВН – ВК = $\frac{y-z}{2}$,

КМ = ВМ – ВК = $\frac{y^2-z^2}{2\mathrm{x}}$.

Легко проверить, что выполняется равенство $\mathrm{KH}^2 = \mathrm{KP} \cdot \mathrm{KM}$.

Таким образом, КН = $\sqrt{ab}$.

Ответ: $\sqrt{ab}$.

5. На доске написаны три различных числа от 1 до 9. Одним ходом разрешается либо прибавить к двум из чисел 1, либо вычесть из всех чисел по 1. Верно ли, что сделав не более 30 таких ходов, всегда можно добиться того, чтобы на доске остались только нули?

Ответ. Неверно.

Решение. Пусть вначале на доске были написаны числа 1,8 и 9, и через несколько ходов из них получились нули. Изучим, как меняются разности между вторым и первым числом, а также между третьим и первым числом. Изначально они равны 7 и

8. При вычитании трёх единиц разности не меняются. Если единицы прибавляются к первым двум числам, то первая разность не меняется, а вторая уменьшается на 1. Аналогично, если единицы прибавляются к первому и третьему числам, то первая разность уменьшается на 1, а вторая не меняется. Наконец, при прибавлении к последним числам разности увеличиваются. Итак, поскольку первая разность уменьшилась на 7, а вторая - на 8, то к первому числу единица прибавлялась

не меньше, чем 7 + 8 = 15 раз. Значит, из него должны были хотя бы 16 раз вычитать единицу, ибо в конце оно стало нулём. Поэтому итоговое количество операций не меньше, чем 15 + 16 = 31.

Комментарий. Верный ответ без обоснования - 0 баллов. Приведен пример тройки чисел 1, 8, 9, но не приведено верное доказательство того, что в этом случае потребуется больше 30 ходов - 2 балла.

Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап)
2014-2015 учебный год
11 класс

Задание 1 (7 баллов)

Решите уравнение:

$$2x^2 - 3x = 2x\sqrt{x^2 - 3x} + 1$$

Задание 2 (7 баллов)

Десять машин выпускают одинаковые резиновые мячи массой по 10г каждый. Одна из машин испортилась и стала выпускать мячи массой 5г. Как найти испортившуюся машину с помощью одного взвешивания мячей.

Задание 3 (7 баллов)

Докажите, что $\sin^6 x + \cos^6 x \geq 0{,}25$.

Задание 4 (7 баллов)

В равнобедренной трапеции основания 21см, 9см и высота 8см. Найдите радиус описанной окружности около трапеции.

Задание 5 (7 баллов)

В десятизначной записи числа 73 цифры и все они единицы. Делится ли нацело это число на 18.

Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап)
2014-2015 учебный год
11 класс

1. Решите уравнение:

$$2x^2-3x=2x\sqrt{x^2-3x}+1$$

Решение:

$$2x^2-3x=2x\sqrt{x^2-3x}+1,$$
$$x^2-2x\cdot\sqrt{x^2-3x}+x^2-3x=1,$$
$$(x-\sqrt{x^2-3x})^2=1,$$
$$x-\sqrt{x^2-3x}=1, \quad \textit{или} \quad \mathrm{x}-\sqrt{x^2-3x}=-1,$$
$$\sqrt{x^2-3x}=x-1, \qquad \sqrt{x^2-3x}=x+1,$$
$$\begin{cases} x-1\ge 0, \\ x^2-2x+1=x^2-3x; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+1\ge 0, \\ x^2+2x+1=x^2-3x; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x\ge 1, \\ x=-1, \end{cases} \textit{корней нет} \qquad \begin{cases} x\ge -1, \\ x=-0{,}2 \end{cases} \quad x=-0{,}2$$
$$\textit{Ответ}: x=-0{,}2$$

2. Десять машин выпускают одинаковые резиновые мячи массой по 10г каждый. Одна из машин испортилась и стала выпускать мячи массой 5г. Как найти испортившуюся машину с помощью одного взвешивания мячей.

Решение:

Возьмём от первой машины один мяч, от второй – два, от третей – три и т.д., от десятой – десять. Найдём их общую массу. Это взвешивание будет единственным. Если бы все мячи были массой по 10г, то весы показали бы

10(1+2+3+ …+10) = 550г.

Если первая машина допускает брак, то общая масса станет меньше на 5г, если вторая, то на 10г., и т.д., если десятая, то на 50г.

Таким образом, по массе 55 мячей можно узнать, какая машина испортилась.

3. Докажите, что $\sin^6 x + \cos^6 x \geq 0{,}25$.

Решение:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) =$$

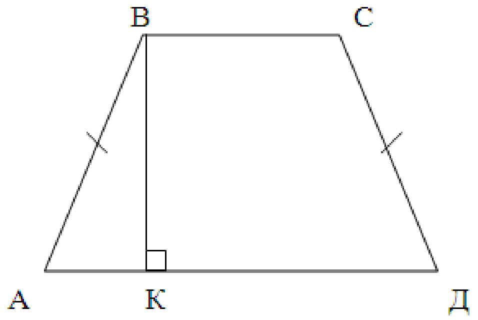
$$= (\sin^2 x + \cos^2 x) - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x.$$

т.к. $\sin^2 2x \leq 1$, *то* $-\frac{3}{4}\sin^2 2x \geq -\frac{3}{4}$, *тогда* $1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x \geq 1 - \frac{3}{4}$,

тоесть $\sin^6 x + \cos^6 x \geq 0{,}25$ *ч.т.д.*

4. В равнобедренной трапеции основания 21см, 9см и высота 8см. Найдите радиус описанной окружности около трапеции.

Решение:



Дано:

АВСД – трапеция,

АВ = СД, ВС = 9см,

АД = 21см, ВК = 8см.

Найти: R

Решение:

1) АК = $\frac{21-9}{2} = 6$(см),
2) ΔАВК ($\angle$К = 90º), АВ = $\sqrt{36+64} = 10$(см),
3) ΔВКД ($\angle$К = 90º), ВД = $\sqrt{64+225} = \sqrt{289} = 17$(см),
4) Окружность, описанная около трапеции, имеет также радиус, что и окружность, описанная около ΔАВД,
5) $S_{АВД} = \frac{АВ \cdot ВД \cdot АД}{4R}$, $S_{АВД} = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 8 = 84$ (см^2)

   $R = \frac{10 \cdot 17 \cdot 21}{4 \cdot 84} = \frac{85}{8} = 10{,}625$(см).

Ответ: 10,625см

5. В десятизначной записи числа 73 цифры и все они единицы. Делится ли нацело это число на 18.

Решение:

т.к. в данном числе все цифры единицы, то оно нечётно, а нечётное число, не может делиться нацело на чётное число 18.

Ответ: не делится.

Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап)
2015-2016 учебный год
11 класс

Задание 1

Решите уравнение

$$\sqrt{x^2-4}+\sqrt{12-3x^2}=x^2-2x$$

Задание 2

При сложении двух целых чисел Коля поставил лишний ноль на конце одного из слагаемых и получил в сумме 777777 вместо 111111. Какие числа он складывал?

Задание 3

Определить, при каких значениях параметра а уравнение $\cos^2 x+(2a+6)\cos x+(2a-7)(1-4a)=0$ имеет решения.

Задание 4

Постройте график функции $y=\frac{|x|-4}{x^2-4|x|}$ и определите, при каких значениях *к* прямая у = *к* х не будет иметь с графиком ни одной общей точки

Задание 5

Высоты остроугольного треугольника АВС, проведенные из вершин В и С, продолжили до пересечения с описанной окружностью в точках B_1 и C_1. Оказалось, что отрезок B_1C_1 проходит через центр описанной окружности. Найдите угол ВАС.

Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап)
2015-2016 учебный год
11 класс

Ответы и решение

1. Решите уравнение $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{12-3x^2} = x^2$-2x.

Ответ: 2

Решение: Прежде всего заметим, что все корни уравнения если они существуют, удовлетворяют неравенствам $x^2-4 \geq 0$ и $12-3x^2 \geq 0$. Так как второе неравенство равносильно неравенству $x^2-4 \leq 0$, то оба неравенства выполняются лишь при условии $x^2-4 = 0$. Это последнее уравнение имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$. Итак, если исходное уравнение имеет корни, то их следует искать среди чисел 2 и -2. Проверка показывает, что 2 является корнем исходного уравнения, а число -2 – нет. Следовательно, уравнение имеет единственный корень.

2. При сложении двух целых чисел Коля поставил лишний ноль на конце одного из слагаемых и получил в сумме 777777 вместо 111111. Какие числа он складывал?

Ответ: 37037 и 74074.

Решение: Из условия $x + y = 111111$, $x + 10y = 777777$. Откуда $9y = 666666$, $y=74074$.

Тогда $x = 37037$.

3. Определить, при каких значениях параметра а уравнение

$\cos^2 x$ + (2a+6)$\cos x$ + (2a-7) (1-4a) =0 имеет решения.

Ответ: $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$, $2 \leq a \leq 4$.

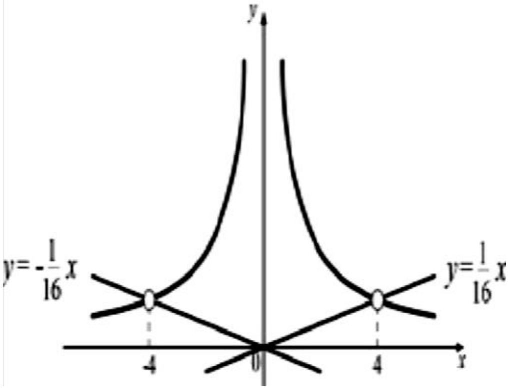
Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно cosx. $\frac{D}{4}$ =(3a-4)^2. $D \geq 0$ для любого а. Отсюда $\left[\begin{array}{l}\cos x = 2a-7\\ \cos x = 1-4a\end{array}\right.$. Тогда искомые значения параметра

а – это решения совокупности $\left[\begin{array}{l}|2a-7| \leq 1\\ |1-4a| \leq 1\end{array}\right.$. Отсюда $\left[\begin{array}{l}2 \leq a \leq 4,\\ 0 \leq a \leq \frac{1}{2}\end{array}\right.$.

4. Постройте график функции $y=\frac{|x|-4}{x^2-4|x|}$ и определите, при каких значениях *к* прямая у = *к* х не будет иметь с графиком ни одной общей точки.

Решение. Преобразуем выражение к виду $\frac{|x|-4}{x^2-4|x|}=\frac{|x|-4}{|x|(|x|-4)}=\frac{1}{|x|}$ при $|x|\neq 4$

Значит, $y=\frac{1}{|x|}$, при условии, что $x\neq 4, x\neq -4$.

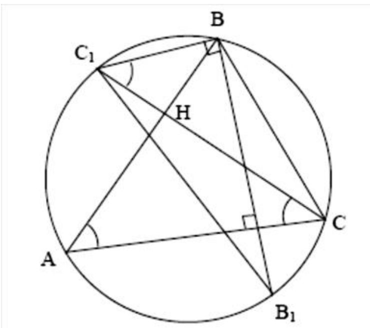


На рисунке видно, что прямая $y = kx$ не имеет с построенным графиком общих точек, если она горизонтальна, либо если она проходит через одну из удаленных точек $\left(4;\frac{1}{4}\right)$ или $\left(-4;\frac{1}{4}\right)$.

Этим случаям соответствуют значения к = 0; $-\frac{1}{16}$; $\frac{1}{16}$

5. Высоты остроугольного треугольника ABC, проведенные из вершин B и C, продолжили до пересечения с описанной окружностью в точках B_1 и C_1. Оказалось, что отрезок B_1C_1 проходит через центр описанной окружности. Найдите угол BAC.

Ответ: 45^0.



Решение:

Так как C_1B_1 - диаметр, то $\angle C_1BB_1=90^0$. Так как $BB_1\perp AC$, то $C_1B \,||\, AC$.

Поэтому $\angle BC_1C=\angle C_1CA.$ Углы BC_1C и BAC равны как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Следовательно, $\angle C_1CA=\angle BAC.$ Пусть H- основание высоты. Опущенной из вершины C. Прямоугольный треугольник AHC – равнобедренный, т.е. $\angle A=45^0$.

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2012-2013 учебный год

11 класс

1. Какое наибольшее значение может принимать сумма косинусов всех углов равнобедренного треугольника?
2. Квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ такова, что если заменить в правой части любой из коэффициентов a, b или c на 1, то получим квадратичную функцию, имеющую хотя бы один действительный корень. Докажите, что исходная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает хотя бы в одной точке отрицательное значение.
3. У натурального числа нашли все его натуральные делители, кроме самого числа, и сложили два наибольших из них. Получилось число 61. Найдите все такие натуральные числа.
4. В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* точки *K, L, M, N* - середины ребер *AD, AS, BS* и *CD* соответственно. Найти объем тетраэдра *KLMN*, если объем пирамиды *SABCD* равняется 32.
5. Рассматриваются все возможные шестизначные натуральные числа, в записи которых встречаются только цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6. Определите, сколько среди них таких чисел, которые делятся на 6.

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2012-2013 учебный год

11 класс

1. Какое наибольшее значение может принимать сумма косинусов всех углов равнобедренного треугольника?

Ответ: 3/2.

Решение. Пусть углы при основании треугольника равны α, тогда угол при вершине равен $180^0 - 2\alpha$. Найдем сумму косинусов этих углов: $2\cos\alpha + \cos(180^0 - 2\alpha) = 2\cos\alpha - \cos 2\alpha = 2\cos\alpha - 2cos^2\alpha + 1$. Выполнив замену $\cos\alpha = t$, получим квадратичную функцию $y = -2t^2 + 2t + 1$, которая достигает своего наибольшего значения при $t = 1/2$. Заметим, что $\cos\alpha$ принимает значение $1/2$ при $\alpha = 60^0$. Таким образом, максимальное значение суммы косинусов углов достигается в равностороннем треугольнике и равно $3/2$.

Примечание. Верный ответ без обоснования – 1 балл.

2. Квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ такова, что если заменить в правой части любой из коэффициентов a, b или с на 1, то получим квадратичную функцию, имеющую хотя бы один действительный корень. Докажите, что исходная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает хотя бы в одной точке отрицательное значение.

Решение. Из условия следует, что $a \neq 0$, иначе функция $f(x)$ не является квадратичной. Если $a < 0$, то, очевидно, найдутся значения x, в которых $f(x) < 0$. Пусть $a > 0$. Для доказательства утверждения, в этом случае, нам достаточно показать, что дискриминант $D = b^2 - 4ac$ квадратичного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ положителен, или, что $b^2 > 4ac$. По условию, каждое из уравнений $x^2 + bx + c = 0$, $ax^2 + x + c = 0$ и $ax^2 + b + 1 = 0$ имеет хоты бы один корень. Следовательно, в каждом из них дискриминант не отрицателен, то есть $b^2 \geq 4c$, $1 \geq 4ac$, $b^2 \geq 4a > 0$. Из последнего неравенства следует, что $b \neq 0$. Если $c \leq 0$, а значит $ac \leq 0$, то $b^2 > 0 \geq 4ac$. Пусть $c > 0$.

Первый способ. Перемножая все три неравенства, получим $b^4 \geq 16ac$. Заметим, что равенство здесь возможно только в случае, когда во всех трех неравенствах имеет место равенство. Но тогда $a = c = \frac{1}{2}$, $b = \sqrt{2}$ и неравенство $b^2 > 4ac$ выполняется. Если хотя бы в одном из неравенств имеет место строгое неравенство, то $b^4 > 16ac$, и, учитывая, что $ac > 0$, извлекая корень квадратный из обеих частей, получим $b^2 > 4ac$.

Второй способ. Если $|b| > 1$, то из второго неравенства имеем $b^2 > 1 \geq 4ac$. Если $0 < |b| \leq 1$, то, перемножая первое и третье неравенства, имеем $b^4 \geq$

$16ac$, откуда, учитывая, что при $|b| \leq 1$, $b^2 \geq b^4$, получаем $b^2 \geq b^4 > 16ac > 4ac$.

Примечание. За каждый не рассмотренный случай – минус 1 балл.

3. У натурального числа нашли все его натуральные делители, кроме самого числа, и сложили два наибольших из них. Получилось число 61. Найдите все такие натуральные числа.

Ответ: 118.

Решение. Пусть a и b, $a > b$, наибольшие делители числа *n*. По условию, $a + b = 61$. Так как число 61 нечетное, то один из делителей четен, а значит и само число *n* четно. Поскольку число 61 простое, то числа a и b – взаимно простые. Если $a > 2$, и $b > 2$, то они не могут быть двумя наибольшими делителями числа *n*, поскольку $n \vdots (^{ab}/_2)$ и при этом $^{ab}/_2 > a > b$. Значит b = 2 (случай a = 2, очевидно, не возможен). Таким образом, a = 59 и $n \vdots (2 \cdot 59)$. Других делителей у числа *n* быть не может, поскольку все они должны быть меньше 2. Следовательно, $n = 2 \cdot 59 = 118$.

Примечание. За верный не обоснованный ответ – 2 балла.

4. В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* точки *K, L, M, N* - середины ребер *AD, AS, BS* и *CD* соответственно. Найти объем тетраэдра *KLMN*, если объем пирамиды *SABCD* равняется 32.

Ответ: 2.

Решение. Можно воспользоваться координатным методом. В качестве линейных параметров удобно взять длину ребра основания и высоту пирамиды, а начало прямоугольной системы координат поместить в центре основания пирамиды с естественным направлением осей, найти координаты точек и т. д.. Имеется другой путь. Будем «двигать» вершины тетраэдра вдоль ребер пирамиды и следить за изменениями объема. Первой сдвигаем вершину *N* в вершину *D*. Так как прямые *CD* и *LM* параллельны (каждая из них параллельна прямой *AB*), то прямая *CD* параллельна плоскости *KLM*, а значит, расстояние от точки *N* до плоскости *KLM* равно расстоянию от точки *D* до этой же плоскости. Следовательно, $V_{KLMN} = V_{KLMD}$. Далее сдвигаем вершину *K* в точку *A*. Так как точка *K* – середина отрезка *AD*, то площадь треугольника *ALD* в два раза больше площади треугольника *KLD*. Следовательно $V_{KLMD} = \frac{1}{2} V_{ALDM}$. Аналогично, если теперь вершину *L* мы передвинем в точку *S*, то объем пирамиды *ALDM* будет равен половине объема пирамиды *ASDM*, то есть $V_{ALDM} = \frac{1}{2} V_{ASDM}$. Наконец, сдвигая вершину *M* в точку *B*, мы еще раз увеличим в два раза объем предыдущей пирамиды, так как расстояние от точки *B* до плоскости *ASD* в два раза больше расстояния от точки *M* до этой плоскости. Таким образом, имеем $V_{KLMN} = V_{KLMD} = \frac{1}{2} V_{ALDM} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} V_{ASDM}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} V_{ASDB}\right) = \frac{1}{8} V_{SABD}$. Но объем пирамиды *SABD*, очевидно равен половине объема данной пирамиды *SABCD*. Таким образом, $V_{KLMN} = \frac{1}{8} 16 = 2$.

Примечание. При решении координатным методом: если верно определены координаты точек, и верно найдено уравнение одной из плоскостей тетраэдра KLMN – 3 балла, найдена площадь грани тетраэдра – плюс 2 балла. При решении методом «движения» вершин: за каждый не верно обоснованный переход – минус 1 балл.

5. Рассматриваются все возможные шестизначные натуральные числа, в записи которых встречаются только цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6. Определите, сколько среди них таких чисел, которые делятся на 6.

Ответ: $6^5 = 7776$.

Решение. Натуральное число делится на шесть тогда и только тогда, когда оно делится и на два и на три. Отсюда следует, что все искомые числа должны оканчиваться четной цифрой, и иметь сумму цифр кратную трем. Первому условию удовлетворяют три цифры: 2, 4 и 6. Покажем, что для выполнения второго условия последней цифрой может быть только одна из них. Действительно, пусть *S* – сумма первых пяти цифр, записанных с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и кратного 6. Если *S* кратна трем, то в качестве последней цифры можем выбрать только одну цифру, а именно цифру 6, чтобы сумма всех цифр делилась на три. Другие цифры – 2 и 4 – не подходят, так как сумма цифр числа не будет кратна 3. Если *S* при делении на 3 дает остаток 1, то в качестве последней цифры можно взять только 2. Наконец, если *S* при делении на 3 дает остаток 2, то последней цифрой может быть только цифра 4. Следовательно, число шестизначных натуральных чисел, записанных с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и кратных шести ровно столько же, сколько имеется пятизначных натуральных чисел, записанных теми же цифрами, то есть 6^5.

Примечание. Получен верный, но не обоснованный ответ – 2 балла.

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
2013-2014 учебный год
11 класс
Максимальный балл – 35

1. Решите задачу (7 баллов)

Рациональным или иррациональным является число

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}?$$

2. Решите задачу (7 баллов)

Найдите все такие натуральные *n*, для которых число *1!+2!+…+n!* – является квадратом целого числа. (По определению, *k!=1·2·3· …· k*, например: *1!=1*, *4!=1·2·3·4=24*).

3. Решите задачу (7 баллов)

Вася захотел узнать, чему равна высота радиомачты. Для этого он измерял углы, под которыми видна радиомачта с поверхности земли на расстояниях *30 м, 60 м* и *90 м* от её основания. Оказалось, что сумма этих трёх углов равна 90°. Помогите Васе найти высоту радиомачты.

4. Решите задачу (7 баллов)

Решите неравенство

$$\sqrt{4-x}-2 \leqslant x|x-3|+\operatorname{arctg} x.$$

5. Решите задачу (7 баллов)

Найдите все *a,* для каждого из которых существует убывающая функция *f(x)*, такая, что для любого числа *x* выполняется равенство

$$f(f(x))=x+a.$$

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
2013-2014 учебный год
11 класс
Максимальный балл – 35
Ответы к заданиям

1. Решите задачу (7 баллов)

Рациональным или иррациональным является число

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}?$$

Решение. Положим $a=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$, $b=\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$, $x=a-b$. Вычислим *x*. *Поскольку* $ab=1$, имеем $x^3=(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)=2+\sqrt{5}-(\sqrt{5}-2)-3(a-b)=4-3x.$

Значит искомое число является корнем уравнения $x^3=4-3x$. Корень уравнения $x=1$. Других корней нет, так как левая часть уравнения возрастающая функция, а правая часть – убывающая функция.

Другое решение. Несложно проверить (возведением в куб), что $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. разность равна 1

Ответ: это число 1, оно рационально.

Оценивание. Верное решение – 7 баллов. Если получено кубическое уравнение, но не доказана единственность его корня, – 5 баллов.

2. Решите задачу (7 баллов)

Найдите все такие натуральные *n*, для которых число $1!+2!+\ldots+n!$ – является квадратом целого числа. (По определению, $k!=1\cdot2\cdot3\cdot\ \ldots\cdot\ k$, например: $1!=1$, $4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$).

Решение. Если $k\geq5$, $k!$ делится на *10*. поскольку $1!+2!+3!+4!=33$, при $n\geq4$ сумма $1!+2!+\ldots+n!$ Оканчивается на цифру *3* и поэтому не может быть квадратом целого числа. Перебирая значения $n=1,\ 2,\ 3,$ находим, что подходят числа *1* и *3* $1!=1^2$, $1!+2!+3!=3^2$.

Ответ: *1* и *3*.

Оценивание. Верное решение – 7 баллов. Если найдены оба решения, но не показано, что других нет – 1 балл.

3. Решите задачу (7 баллов)

Вася захотел узнать, чему равна высота радиомачты. Для этого он измерял углы, под которыми видна радиомачта с поверхности земли на расстояниях *30 м, 60 м* и *90 м* от её основания. Оказалось, что сумма этих трёх углов равна 90°. Помогите Васе найти высоту радиомачты.

Решение. Пусть *DE* – радиомачта, отрезки *DA, DB, DC* перпендикулярны *DE*,

угол $DAE=\alpha$, угол.$DBE=\beta$, угол $DCE=\gamma$. $DA=30$, $DB=60$, $DC=90$. *Нужно найти* $x=DE$ *при условии, что* $\alpha+\beta+\gamma=90^{o}$.

$tg\alpha=\frac{x}{30},\ tg\beta=\frac{x}{60},\ tg\gamma=\frac{x}{90}.$ *åñëè* $k=tg\alpha,$ *òî* $tg\beta=\frac{k}{2},\ tg\gamma=\frac{k}{3}$. С другой стороны

$$k=tg\alpha=tg(90-\beta-\gamma)=\frac{1}{tg(\beta+\gamma)}=\frac{1-tg\beta tg\gamma}{tg\beta+tg\gamma}=\frac{1-\frac{k}{2}\cdot\frac{k}{3}}{\frac{k}{2}+\frac{k}{3}}=\frac{6-k^2}{5k}.$$

Получилось уравнение $k=\frac{6-k^2}{5k}$. Отсюда $k=1$ и $x=30\cdot tg\alpha=30k=30$.

Ответ: высота радиомачты 30 м.

Оценивание. Верное решение – 7 баллов.

4. Решите задачу (7 баллов)

Решите неравенство

$$\sqrt{4-x}-2\leqslant x|x-3|+\operatorname{arctg} x.$$

Решение. Область определения неравенства задаётся условием $x\leqslant 4$. Обозначим $f(x)=\sqrt{4-x}-2$, $g(x)=x|x-3|+\operatorname{arctg} x$. Заметим, что при $x<0$ выполняются неравенства $f(x)>0$ и $g(x)<0$ (поскольку $\operatorname{arctg} x<0$ при $x<0$). Значит, при отрицательных x неравенство не выполняется.

Если же $0\leqslant x\leqslant 4$, то части неравенства меняют знак: $f(x)\leqslant 0$ и $g(x)\geqslant 0$, откуда $f(x)\leqslant g(x)$.

Ответ: $[0;4]$.

Оценивание. За верное решение — 7 б. Если потеряно решение $x=0$, — 6 б.

5. Решите задачу (7 баллов)

Найдите все *a,* для каждого из которых существует убывающая функция *f(x)*, такая, что для любого числа *x* выполняется равенство

$$f(f(x))=x+a.$$

Решение. При $a = 0$ такую функцию подобрать легко: $f(x) = -x$. Действительно, $f(f(x)) = -(-x) = x$.

Оказывается, при других значениях a такой функции нет. Отметим, что $f(f(f(x))) = f(x+a)$, в то же время $f(f(f(x))) = f(x) + a$. Значит, при всех x выполняется равенство

$$f(x+a) = f(x) + a.$$

Отсюда видно, что если $a > 0$, то $f(x+a) > f(x)$; если же $a < 0$, то $f(x+a) < f(x)$. И то, и другое не выполняется для убывающей функции.

Ответ: $a = 0$.

Оценивание. За верное решение — 7 б. Если показано только, что значение $a = 0$ подходит, — 2 б.

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2014-2015 учебный год

11 класс

Время работы – 4 часа

Заданий 5.

1. Натуральное число n делится на 2, но не делится на 4. Докажите, что число четных делителей числа n равно числу нечетных делителей числа n.

2. Буратино нашел клад из 2014 золотых монет и, не ознакомившись с условиями вклада, положил все монеты в банк «Дуремар». Оказалось, что в дальнейшем он может совершать со своим вкладом только две операции: забрать 370 монет, или положить 111 монет. Кроме вложенных в банк, у Буратино больше не было ни одной золотой монеты. Какое наибольшее число монет он может извлечь из банка?

3. Пусть $a \geq 0,\ b \geq 0$ и $a + b \leq 2$. Докажите, что $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq 1$.

4. Решите систему уравнений $x_1 + \sqrt{x_2} = x_2 + \sqrt{x_3} = \ldots = x_8 + \sqrt{x_9} = x_9 + \sqrt{x_1} = 2$.

5. M – середина стороны BC четырехугольника $ABCD$. Угол AMD равен 120^0. Докажите, что $AB + BM + CD \geq AD$.

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2014-2015 учебный год
11 класс
Ответы и решения

1. Так как n делится на 2 и не делится на 4, то n не является точным квадратом. Тогда все делители числа n разбиваются на пары, произведения которых равно n. В каждой паре один делитель четный, а другой нечетный. Действительно, оба делителя не могут быть четными, тогда n делилось бы на 4, и не могут быть оба нечетными – тогда и n было бы нечетным.

Критерии. Не отмечено, что n не является точным квадратом – 4 балла.

2. Ответ: 1998 монет.
Решение. Оценка. Заметим, что НОД чисел 370 и 111 равен 37. Следовательно, в результате разрешенных операций Буратино может забрать число монет кратное 37. Набольшее число кратное 37 и не превосходящее 2014 является $1998 = 37 \cdot 54$. Следовательно, больше 1998 монет он забрать не может.
Пример. Буратино забирает 5 раз подряд по 370 монет. На счету останется 164 монеты. После этого он дважды вносит по 111 монет и снимает 370 монет. В результате на счету останется $164 + 111 + 111 - 370 = 386 - 370 = 16$ монет, а у Буратино будет $2014 - 16 - 1998$ монет.

Критерии. Оценка без примера – 5 баллов, пример без оценки – 2 балла.

3. Решение. Преобразуем разность $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} - 1 = \frac{1+b+1+a-1-a-b-ab}{(1+a)(1+b)} = \frac{1-ab}{(1+a)(1+b)}$. Поскольку a и b неотрицательны, то знак разности зависит от знака числителя $1 - ab$. Покажем, что это выражение не отрицательно. Действительно, из условий $a \geq 0,\ b \geq 0$ и неравенства $a + b \leq 2$ следует $a^2 + 2ab +\ b^2 \leq 4$. А из того, что $(a - b)^2 \geq 0$ имеем $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Подставляя в предыдущее неравенство, получим $4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \leq 4$. Откуда $ab \leq 1$. Следовательно, $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} - 1 = \frac{1-ab}{(1+a)(1+b)} \geq 0$.

Критерии. Доказательство неравенства $ab \leq 1$ подстановкой конкретных значений переменных – 1 балл.

4. Ответ: $x_1 = x_2 = . . . =\ x_9 = 1$.

Решение. Значения переменных $x_1 = x_2 = . . . = x_9 = 1$ является решением данной системы уравнений. Предположим, что есть решение, при котором $0 \leq x_1 < 1$. Тогда из равенства $x_1 + \sqrt{x_2} = 2$ вытекает, что $x_2 > 1$, а из равенства $x_2 + \sqrt{x_3} = 2$ следует, что $0 \leq x_3 < 1$ и так далее, $0 \leq x_9 < 1$, и из последнего равенства $x_1 > 1$. Противоречие.

Критерии. Ответ без обоснования отсутствия других решений – 1 балл.

5. Решение. Пусть B_1 и C_1 точки симметричные *B* и *C* относительно прямых *AM* и DM соответственно. В результате имеем $AB_1 = AB$, $B_1M = BM = MC_1$, $C_1D = CD$. Далее, из условия $\angle AMB + \angle DMC = 180 - \angle AMD = 180^0 - 120^0 = 60^0$. Следовательно, в силу симметричного отражения, $\angle AMB_1 + \angle DMC_1 = 60^0$. Откуда $\angle B_1MC_1 = 60^0$. Так как $B_1M = MC_1$, то треугольник B_1MC_1 равносторонний, и $B_1M = B_1C_1$. Таким образом, $AB + BM + CD = AB_1 + B_1C_1 + C_1D \geq AD.$

Критерии. Доказательство для частных случаев – 0 баллов, отражение вершин *B* и *C* относительно прямых *AM* и *DM* – 2 балла.

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2015-2016 учебный год

ЗАДАНИЯ

11 класс

1. При каких значениях c числа $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ могут являться корнями квадратного уравнения $5x^2 - 3x + c = 0$ (α – некоторый угол)?

2. Набор из 2015 чисел обладает свойством: если каждое число в наборе заменить на сумму остальных чисел, то получится тот же набор (быть может в другом порядке). Найдите произведение всех чисел набора.

3. Существуют ли нечетные целые числа x, y и z, удовлетворяющие равенству
$$(x+y)^2 + (x+z)^2 = (y+z)^2.$$

4. Пусть $x, y \in [2,3]$. Доказать неравенство $(3-x)^2 + (3-y)^2 + (x-y)^2 \le 2$. Решение. Пусть $x > y$. Тогда $(3-x)^2 + (3-y)^2 + (x-y)^2 \le 3 - x + 3 - y + x - y = 6 - 2y \le 6 - 4 = 2$.

5. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через вершину A_1 и середины ребер AC и BB_1 проведена плоскость α. Найти расстояние от середины ребра B_1C_1 до плоскости α, если известно, что расстояние от вершины A до этой плоскости равно 8.

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2015-2016 учебный год
11 класс

1. **Ответ**: $c = -\frac{8}{5}$.

Решение. Если числа $sin\alpha$ и $cos\alpha$ являются корнями уравнения $5x^2 - 3x + c = 0$, то по теореме Виета выполняются равенства $\begin{cases} sin\alpha + cos\alpha = \frac{3}{5} \\ sin\alpha \cdot cos\alpha = \frac{c}{5} \end{cases}$. Возводя первое уравнение в квадрат, получим $sin^2\alpha + 2sin\alpha cos\alpha + cos^2\alpha = \frac{9}{25} \Leftrightarrow 1 + 2sin\alpha cos\alpha = \frac{9}{25} \Leftrightarrow sin\alpha cos\alpha = -\frac{8}{25}$. Учитывая второе равенство, получим $\frac{c}{5} = -\frac{8}{25}$, откуда $c = -\frac{8}{5}$. Полученное уравнение $5x^2 - 3x - \frac{8}{5} = 0$ имеет корни $\frac{3 \pm \sqrt{41}}{10}$, которые удовлетворяют основному тригонометрическому тождеству. Следовательно, они являются значениями функций $sin\alpha$ и $cos\alpha$ для некоторого значения α. Это следует также из того, что тригонометрическое уравнение $sin\alpha + cos\alpha = \frac{3}{5} \Leftrightarrow sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{10}$ имеет решение.

Критерии. Верный ответ и обоснованное решение – 7 баллов. Получен верный ответ, но не показано, что полученное уравнение имеет решение – 5 баллов. Приведен только верный ответ – 1 балл.

2. **Ответ**: 0.

Решение. Пусть $a_1, a_2, \ . \ . \ . \ , a_{2015}$ – данный набор чисел, а S – их сумма. По условию, для каждого числа a_i из набора число $S - a_i$ также принадлежит этому набору. Следовательно, $(S - a_1) + (S - a_2) + . . . + (S - a_{2015}) = S$, откуда $2015S - S = S \Rightarrow S = 0$. Последнее означает, что для каждого числа из набора противоположное ему число тоже принадлежит этому набору. Но так как в наборе нечетное число чисел, то одно из них является противоположным самому себе, то есть число 0 принадлежит набору. Следовательно, произведение всех чисел данного набора равно 0.

Критерии. Доказано, что сумма всех чисел набора равна нулю – 3 балла. Приведен только ответ или рассмотрен частный случай – 0 баллов.

3. **Ответ**: нет, не существует.

Решение. Раскроем скобки в данном равенстве:$(x + y)^2 + (y + z)^2 = (x + z)^2 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 + y^2 + 2yz + z^2 = x^2 + 2xz + z^2 \Rightarrow y^2 + xy + yz = xz$. Прибавляя к обеим частям по xz и разлагая правую часть на множители, получим $(x + y)(y +$

$z) = 2xz$. Если числа x, y, z – нечетные, то левая часть полученного равенства делится на 4, а правая часть не делится на 4. Противоречие.
Второе решение. Пусть $x = 2a + 1,\ y = 2b + 1,\ z = 2c + 1$, где $a,\ b,\ c$ - целые числа. Подставляя в равенство $(x + y)^2 + (y + z)^2 = (x + z)^2$ правые части и раскрывая скобки, после сокращения на 4 получим $2b^2 + 2ab + 2bc + 2b + 1 = 2ac$. При любых целых числах $a,\ b,\ c$ левая часть нечетное число, а правая часть – четное число. Противоречие.

Критерии. Получен верный и обоснованный ответ – 7 баллов; приведен только ответ без обоснования – 0 баллов.

4. *Доказательство*. Пусть $x \geq y$, тогда $(3 - x)^2 + (3 - y)^2 + (x - y)^2 \leq 3 - x + 3 - y + x - y = 6 - 2y \leq 6 - 4 = 2$. Аналогично доказывается в случае $x \leq y$.

Критерии. Рассмотрение частных случаев – 0 баллов.

5. Ответ: 10.
Решение. Пусть M – середина стороны AC, N – середина стороны BB_1, P – середина стороны B_1C_1. Обозначим через K точку пересечения прямых A_1M и C_1C, а через L – точку пересечения прямых A_1N и AB. Точка K есть точка пересечения прямой C_1C и плоскости $\alpha = A_1MN$. Так как M – середина стороны AC, то $C_1C = CK$.
Аналогично, L – точка пересечения прямой AB и плоскости α, и так как N – середина стороны BB_1, то $AB = BL$. Таким образом, расстояние от точки C до плоскости α $\rho(C,\alpha) = \rho(A,\alpha) = 8$. Так как C середина отрезка C_1K, то $\rho(C_1,\alpha) = 2 \cdot \rho(C,\alpha) = 16$. Аналогично получаем $\rho(B,\alpha) = \frac{1}{2}\rho(A,\alpha) = 4 \Longrightarrow \rho(B_1,\alpha) = \rho(B,\alpha) = 4$. Наконец, так как P – середина отрезка B_1C_1, то $\rho(P,\alpha) = \frac{1}{2}(\rho(B_1,\alpha) + \rho(C_1,\alpha)) = \frac{1}{2}(4 + 16) = 10$.
При вычислении расстояний от точек до плоскости α, использовались легко проверяемые утверждения: 1) Если плоскость проходит через середину отрезка, то расстояния от концов отрезка до плоскости равны; 2) Если точка O лежит в плоскости и M середина отрезка OP, то расстояние от точки P до плоскости ровно в два раза больше расстояния от точки M до этой плоскости.

Критерии. Верный и обоснованный ответ – 7 баллов; верно определено расстояние от точки C до плоскости α – 1 балл, от точки C_1 или от точки B – 3 балла; верный ответ без обоснования – 0 баллов.