ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ (задание 13 ЕГЭ)

Курбанов Магомед Ахмедович,
МБОУ гимназия № 2

г.Сургут
2019 г.

Теория:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, основное тригонометрическое тождество

Основные тригонометрические формулы:

$\mathrm{tg}\,\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \cos\alpha / \sin\alpha$,

$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$,

Основное тригонометрическое тождество почленно разделим на $\sin^2\alpha$, или на $\cos^2\alpha$ и получим следующие формулы:

$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = 1 / \sin^2\alpha$, $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = 1 / \cos^2\alpha$

Синус, косинус суммы и разности аргументов:

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$, (1)

$\sin(\alpha - \beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$, (2)

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$, (3)

$\cos(\alpha - \beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$, (4)

Используя эти формулы выведем остальные формулы необходимые при решении тригонометрических уравнений

Вывод формулы тангенс суммы аргументов:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=$$

числитель и знаменатель дроби почленно разделим на $\cos\alpha\cdot\cos\beta$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}.$$

Аналогично можно вывести формулу тангенса разности аргументов:

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}.$$

Вывод формул двойного аргумента:

$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$

$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\sin\alpha =$
$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ основная

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) =$
$= 2\cos^2\alpha - 1$

$\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$ через косинус

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha =$
$= 1 - 2\sin^2\alpha$

$\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$ через синус

Вывод формул двойного аргумента:

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} =$$

числитель и знаменатель дроби почленно разделим на $\cos^2\alpha$

$$= \frac{\dfrac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}\ .$$

$$\boxed{\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}}$$

Формулы понижения степени:

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ выразим $\cos^2\alpha$

$$\boxed{\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$$

Формула понижения степени для $\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ выразим $\sin^2\alpha$

$$\boxed{\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

Формула понижения степени для $\sin\alpha$

Формулы тройного аргумента:

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha \cdot \cos\alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha =$$
$$= (2\cos^2\alpha - 1)\cdot\cos\alpha - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha =$$
$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha -$$
$$-2\cos\alpha\cdot(1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha +$$
$$+ 2\cos^3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

$$\boxed{\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.}$$

Формула тройного аргумента $\cos\alpha$

Аналогично можно вывести формулу тройного аргумента $\sin\alpha$

$$\boxed{\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.}$$

Формулы преобразования произведения в сумму:

1) $$\begin{array}{l} \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta, \\ + \\ \sin(\alpha - \beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta, \\ \hline \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha - \beta) =2\sin\alpha\cdot\cos\beta \end{array}$$

$$\boxed{\sin\alpha\cdot\cos\beta=0,5\cdot[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha - \beta)]}$$

2) $$\begin{array}{l} \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta, \\ + \\ \cos(\alpha - \beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta, \\ \hline \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha - \beta) =2\cos\alpha\cdot\cos\beta \end{array}$$

$$\boxed{\cos\alpha\cdot\cos\beta=0,5\cdot[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha+\beta)]}$$

3) $$\boxed{\sin\alpha\cdot\sin\beta=0,5\cdot[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha+\beta)]}$$

Формулы преобразования сумм в произведения

$$\sin(x+y) + \sin(x - y) = 2\sin x \cdot \cos y, \quad (1)$$

Введем обозначения $\alpha = x+y$ и $\beta = x - y$. Тогда $\alpha + \beta = 2x$, $\alpha - \beta = 2y$. Из этих равенств выразим x и y.

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} \qquad y = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Подставим все равенства:

$$\alpha = x+y, \quad \beta = x - y, \quad x = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad y = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

в формулу (1):

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

Формулы преобразования сумм в произведения

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cdot \cos y,$$

$$\boxed{\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\alpha = x+y, \quad \beta = x-y, \quad x = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad y = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

Аналогично получим остальные формулы

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Формулы приведения

Формулы приведения применяются для углов:

$(\pi \pm \alpha)$, $(2\pi \pm \alpha)$, $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$

Правила:

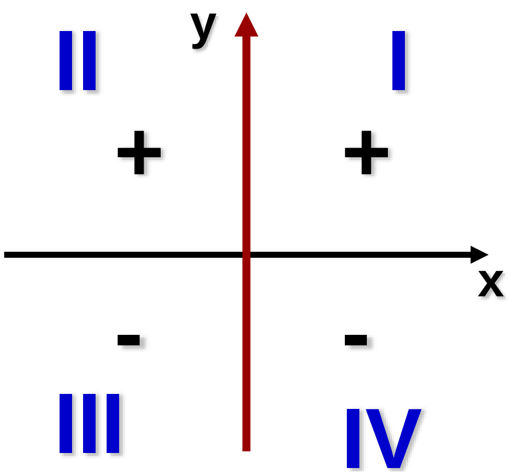
1) определяем знак текущей функции в данной координатной четверти;

2) если есть деление на 2 у числа π, то sin заменяем на cos и на оборот (tg заменяем на ctg и на оборот).

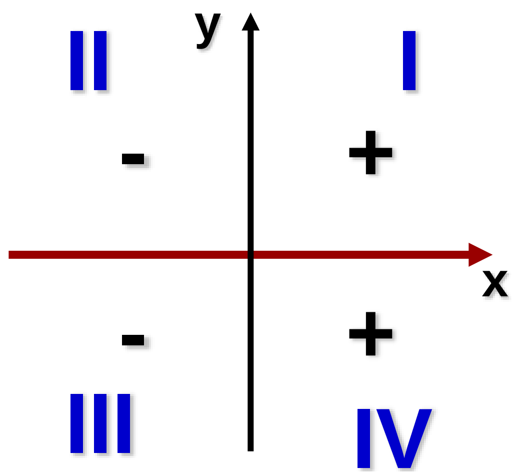
Формулы приведения (необходимо знать)

Знаки тригонометрических функций в координатных четвертях:

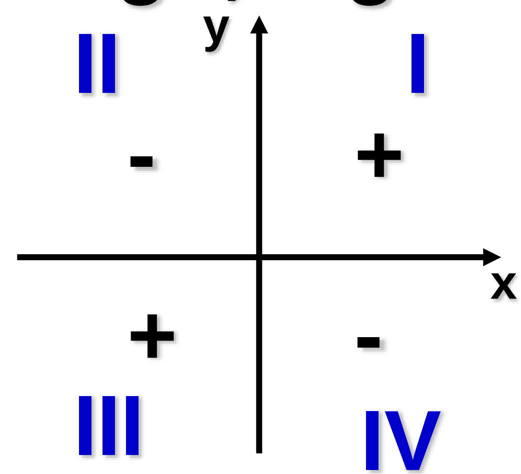
$\sin\alpha$



$\cos\alpha$



$tg\alpha$, $ctg\alpha$

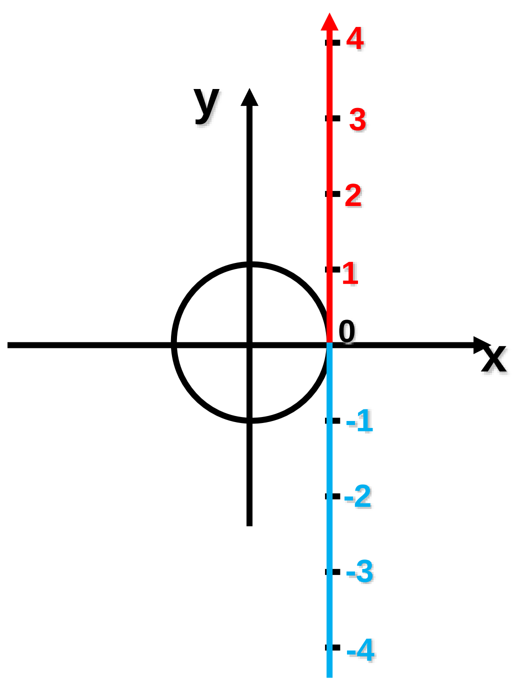


$\sin\alpha = y$

$\cos\alpha = x$

Формулы приведения (необходимо знать)

Положительные числа откладываются против часовой стрелки, отрицательные числа – по часовой стрелке



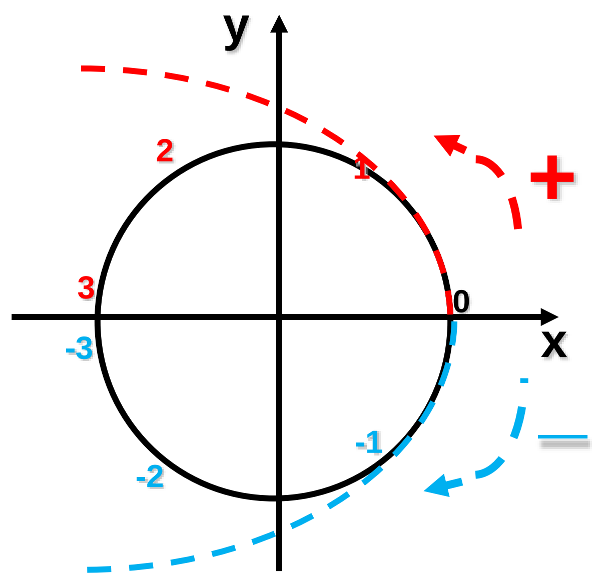
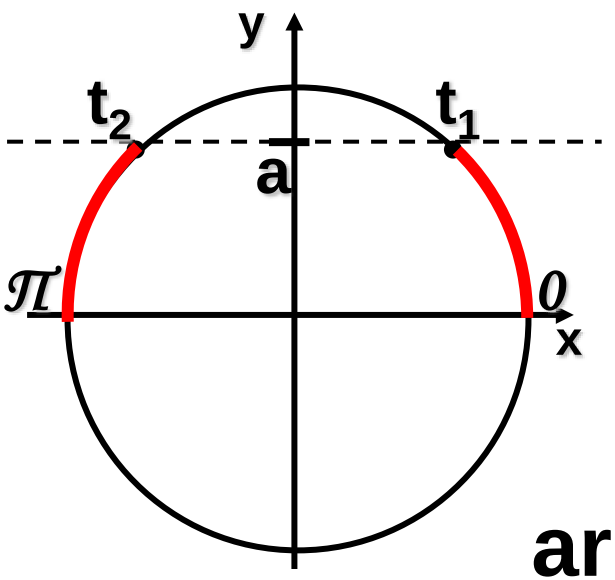


Таблица значений от 0° до 90°

α, градусы и радианы	$0° = 0$	$30° = \frac{\pi}{6}$	$45° = \frac{\pi}{4}$	$60° = \frac{\pi}{3}$	$90° = \frac{\pi}{2}$
sinα	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tgα	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
ctgα	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Тригонометрическое уравнение:



$\sin t = a$, где $-1 \le a \le 1$

$t_1 = \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z$

$t_2 = \pi - t_2 =$

$= \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z$

$\arcsin a = \alpha$, где $\sin\alpha = a$, $a \in [-1;1]$,

$$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

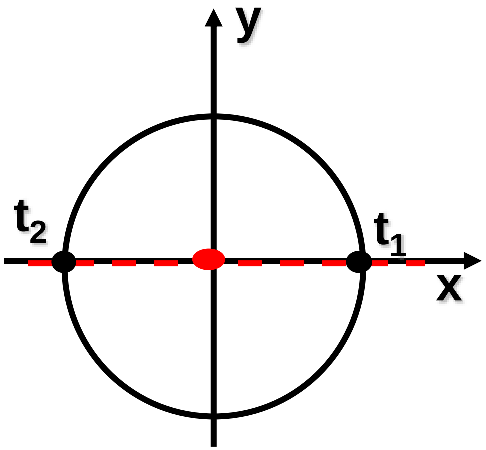
$$\boxed{\arcsin(-a) = -\arcsin a}$$

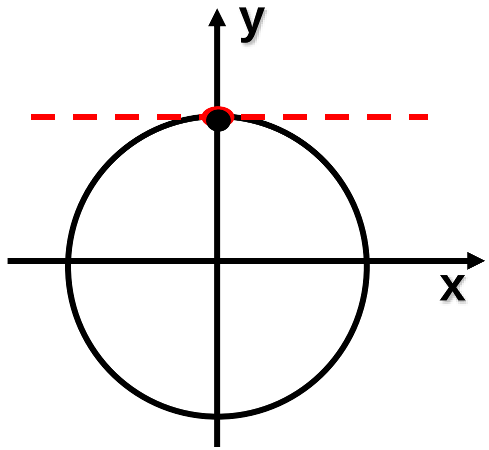
Например: $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$;

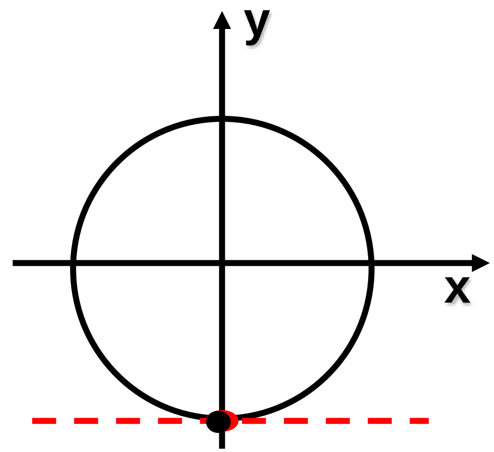
$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arcsin\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Частные случаи уравнения sint=a:

1) sint=0 2) sint=1 3) sint= –1







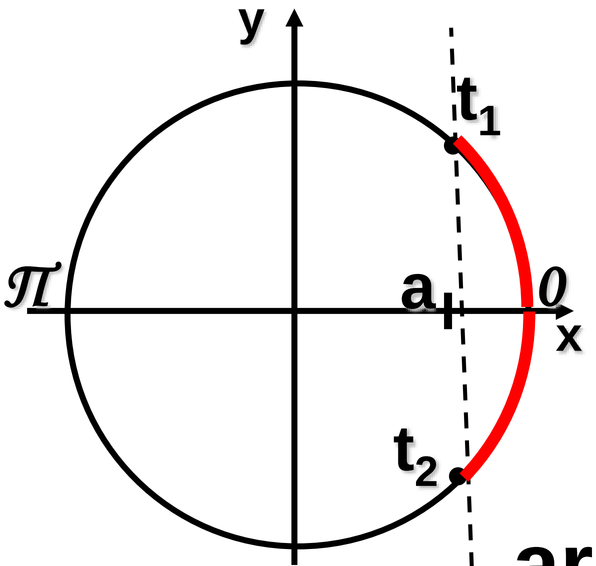
$t=0+\pi n,\ n\in Z$

$t=\pi n,\ n\in Z$

$t=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$

$t=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$

Тригонометрическое уравнение:



$\cos t = a$, где $-1 \le a \le 1$

$t_1 = \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$

$t_2 = -\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$

$t = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$

$\arccos a = \alpha$, где $\cos\alpha = a$, $a \in [-1;1]$,

$\alpha \in [0; \pi]$

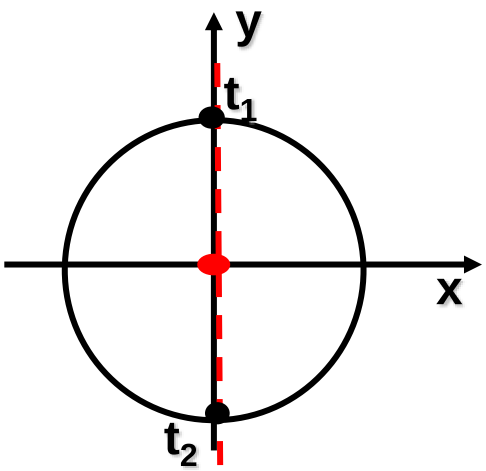
$\boxed{\arccos(-a) = \pi - \arccos a}$

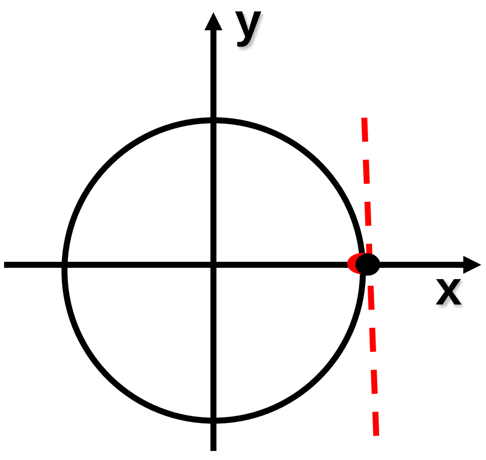
Например: $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$; $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$;

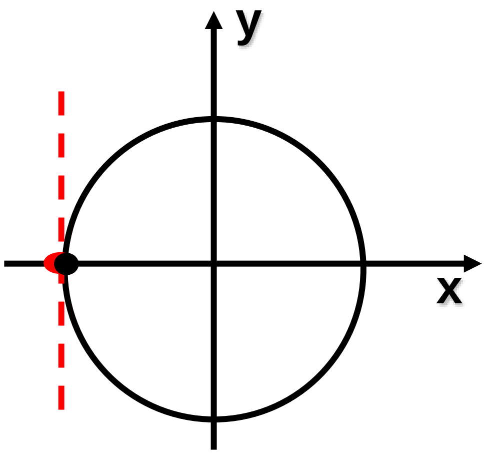
$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Частные случаи уравнения cost=a:

1) cost=0 2) cost=1 3) cost= –1







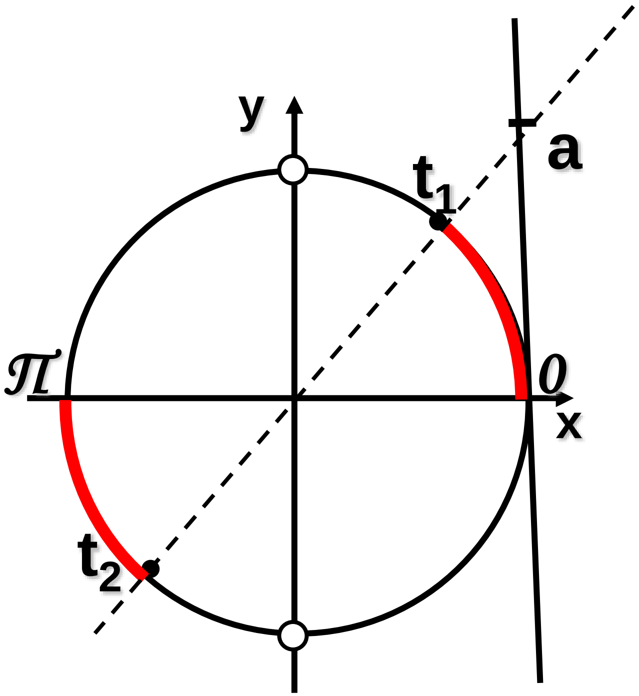
$t=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

$t=0+2\pi n,\ n\in Z$

$t=2\pi n,\ n\in Z$

$t=\pi+2\pi n,\ n\in Z$

Тригонометрическое уравнение:



$tgt=a$, где $a \in R$

$t_1 = \text{arctg } a + 2\pi n,\ n \in Z$

$t_2 = \pi + t_1 + 2\pi n,\ n \in Z$

$t_2 = \pi + \text{arctg } a + 2\pi n,\ n \in Z$

$\boxed{t = \text{arctg } a + \pi n,\ n \in Z}$

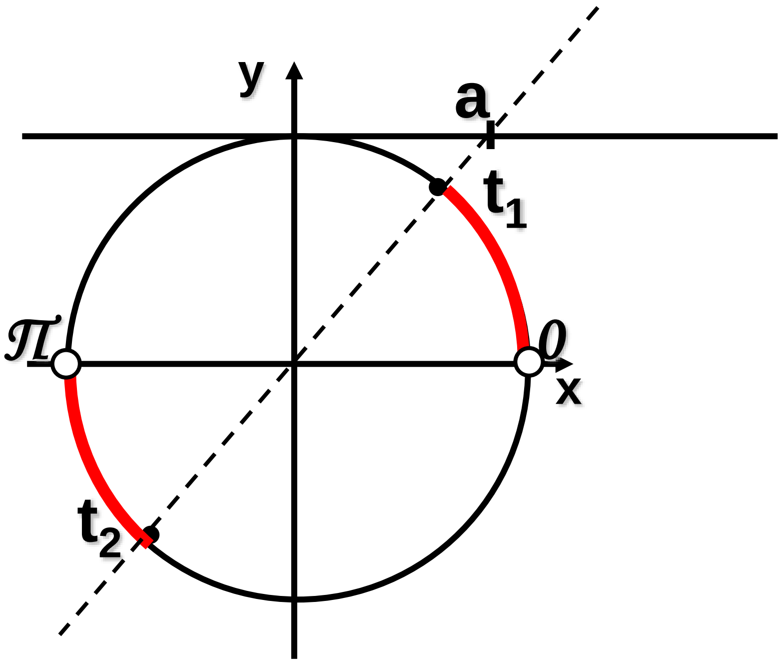
$\text{arctg } a = \alpha$, где $tg\alpha = a$, $a \in R$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$\boxed{\text{arctg}(-a) = -\text{arctg } a}$

Например: $\text{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$; $\text{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$;

$\text{arctg}(-1) = -\text{arctg}1 = -\frac{\pi}{4}$

Тригонометрическое уравнение:



ctgt=a, где $a \in R$

t_1= arcctg a +2πn, $n \in Z$

t_2=π+ t_1+2πn, $n \in Z$

t_2=π+ arcctg a+2πn, $n \in Z$

$\boxed{t = \text{arcctg } a + \pi n,\ n \in Z}$

arcctg a=α, где ctgα=a, $a \in R$, $\alpha \in (0; \pi)$

$\boxed{\text{arcctg}(-a) = \pi - \text{arcctg } a}$

Например: $\text{arcctg}1 = \frac{\pi}{4}$; $\text{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$;

$\text{arcctg}(-1) = \pi - \text{arcctg}1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Тригонометрические уравнения, сводящиеся к квадратным

а) $2\sin^2 x+3\cos x=0$

$2(1-\cos^2 x)+3\cos x=0$

$2-2\cos^2 x+3\cos x=0$

$-2\cos^2 x+3\cos x+2=0$

Пусть $\cos x=t$, тогда

$-2t^2+3t+2=0$

$D=b^2-4ac=9+16=25$

$t_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-3-5}{-4}=2$

$t_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-3+5}{-4}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$

При $t=2$, $\cos x=2$

Нет корней

При $t=-\frac{1}{2}$,

$\cos x=-\frac{1}{2}$

$x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n,\ n\in Z$

$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$

Тригонометрические уравнения, сводящиеся к квадратным

б) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + 1 = 0$

Умножим обе части на $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2 = 0$$

Пусть $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, тогда

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$t_1 = 1$; $t_2 = -2$.

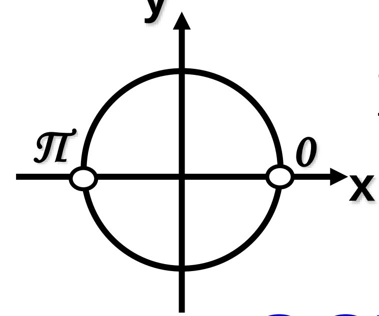
При $t = 1$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$$

ООУ: $\frac{x}{2} \neq \pi n$; $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$

$x \neq 2\pi n$; $x \neq \pi + 2\pi n$

Объединяя получим:



$x \neq \pi n,\ n \in Z$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \in$ ООУ

При $t = -2$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -2$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg}(-2) + \pi n,\ n \in Z$$

$$\frac{x}{2} = -\operatorname{arctg}2 + \pi n,\ n \in Z$$

$x = -2\operatorname{arctg}2 + 2\pi n$, □ООУ

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $-2\operatorname{arctg}2 + 2\pi n,\ n \in Z$

Однородные тригонометрические уравнения

в) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$

$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0 \mid : \cos x \neq 0$

$\mathrm{tg} x + \sqrt{3} = 0$

$\mathrm{tg} x = -\sqrt{3}$

$x = \mathrm{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n,\ n \in Z$

$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$

Однородные тригонометрические уравнения

в) $\sin^2x + 2\sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0$

$\sin^2x + 2\sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0 \mid : \cos^2 x \neq 0$

$\mathrm{tg}^2x + 2\mathrm{tg}x - 3 = 0$

Пусть tgx=t, тогда

$t^2 + 2t - 3=0$

$t_1=1; \quad t_2=-3.$

При t=1, tgx =1

$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

При t=−3, tgx =−3

$x = -\mathrm{arctg}3 + \pi n, n \in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n;$

$-\mathrm{arctg}3 + \pi n, n \in Z$

Однородные тригонометрические уравнения

г) $3\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x = 2$

$3\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$

$3\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$

$\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0 \,|\, : \cos^2 x \neq 0$

$\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x - 2 = 0$ Пусть $\mathrm{tg}\, x = t$, тогда

$t^2 - t - 2 = 0$

$t_1 = -1; \quad t_2 = 2$

При $t = -1$, $\mathrm{tg}\, x = -1$

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

При $t = 2$, $\mathrm{tg}\, x = 2$

$x = \mathrm{arctg}\, 2 + \pi n,\ n \in Z$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n;$

$\mathrm{arctg}\, 2 + \pi n,\ n \in Z$

Тригонометрические уравнения, решаемые разложением на множители

д) $\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x = 0$

$\sin x\,(\sin x - \cos x) = 0$

$\sin x = 0$ или $\sin x - \cos x = 0$

$x = \pi n,\ n \in Z$

$\sin x - \cos x = 0 \,|\, : \cos x \neq 0$

$\mathrm{tg}\, x - 1 = 0$

$\mathrm{tg}\, x = 1$

$x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \pi n;\quad \pi n,\ n \in Z$

Тригонометрические уравнения, решаемые разложением на множители

е) $\sin^2 x - 5\cos x = \sin x \cdot \cos x - 5\sin x$

$$\sin^2 x - 5\cos x - \sin x \cdot \cos x + 5\sin x = 0$$

$$\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x + 5\sin x - 5\cos x = 0$$

$$\sin x\,(\sin x - \cos x) + 5(\sin x - \cos x) = 0$$

$$(\sin x - \cos x)(\sin x + 5) = 0$$

$\sin x - \cos x = 0$ или $\sin x + 5 = 0$

$\sin x - \cos x = 0 \,|: \cos x \neq 0$

$\operatorname{tg} x - 1 = 0$

$\operatorname{tg} x = 1$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

$\sin x = -5$

Нет корней

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

Тригонометрические уравнения, решаемые с использованием формул

ж) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_1 + \frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

$x_2 + \frac{\pi}{6} = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

$x_1 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$ $\quad$ $x_2 + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$ $\quad$ $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\quad \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

Метод вспомогательного аргумента

Методом вспомогательного аргумента решаются уравнения вида **A**sinx+**B**cosx=**C**.
Чтобы решить данное уравнение нужно обе части разделить на $\sqrt{A^2+B^2}$.
Получиться уравнение вида

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Одно из чисел $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ заменяем на косинус некоторого угла, а второй на синус этого же угла.
К выражению полученному в левой части применяем формулу синус, косинус суммы или разности аргументов, решаем как предыдущее уравнение.

Метод вспомогательного аргумента

3) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2$

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. Получим уравнение:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 1$$

$$\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x = 1$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$x + \frac{\pi}{6} = 2\pi n,\ n \in Z$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$$

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$

Задание 13, ЕГЭ

1) а) Решить уравнение $\frac{2}{tg^2x}+\frac{7}{tgx}+5=0$;

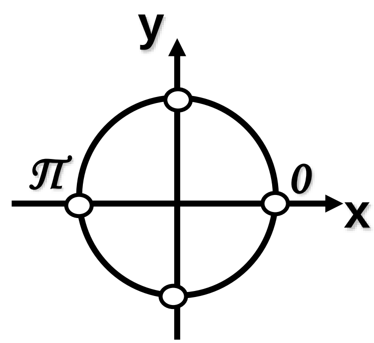
б) Укажите корни уравнения, принадлежащие $[3\pi; 4\pi]$.

Решение.

ООУ: $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

$tgx \neq 0;\quad x \neq \pi n,\ n\in Z$

Объединяя получим:



$x \neq \frac{\pi n}{2},\ n\in Z$

а) $\frac{2}{tg^2x}+\frac{7}{tgx}+5=0$;

$\frac{2}{tg^2x}+\frac{7}{tgx}+5=0 \,|\cdot tg^2x$

$2+7tgx+5tg^2x=0$

$5tg^2x+7tgx+2=0$

Пусть $tgx=t$, тогда

$5t^2+7t+2=0$

$t_1=-1;\quad t_2=-\frac{2}{5}$

При $t=-1$, $tgx=-1$

$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$

$-\frac{\pi}{4}+\pi n \in$ ООУ

При $t=-\frac{2}{5}$, $tgx=-\frac{2}{5}$

$x=-\operatorname{arctg}\frac{2}{5}+\pi n,\ n\in Z$

$-\operatorname{arctg}\frac{2}{5}+\pi n \in$ ООУ

Задание 13, ЕГЭ

б) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;\ \ x \in [3\pi; 4\pi]$

$3\pi \le -\frac{\pi}{4} + \pi n \le 4\pi \ \ |: \pi\ ; n \in Z$

$3 \le -\frac{1}{4} + n \le 4 \ \ | \cdot 4\ \ ; n \in Z$

$12 \le -1 + 4n \le 16\ \ ; n \in Z$

$13 \le 4n \le 17 |: 4\ \ ; n \in Z$

$3\frac{1}{4} \le n \le 4\frac{1}{4}\ \ ; n \in Z$

$n = \{4\}$

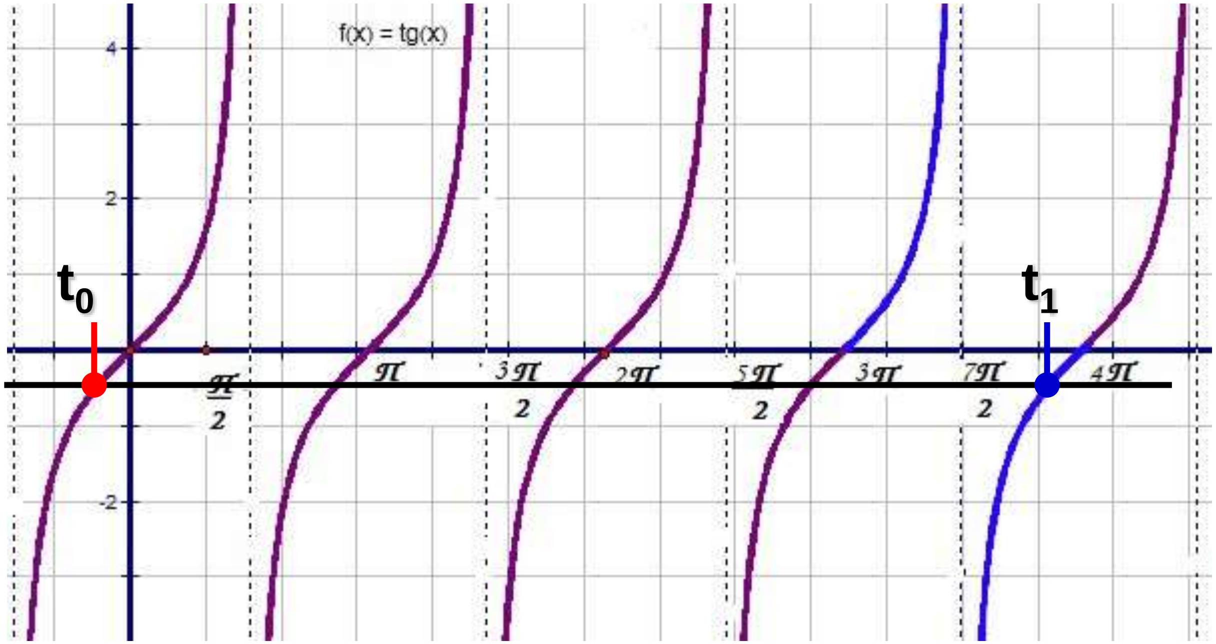
При n=4, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi \cdot 4 = 4\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{15\pi}{4}$

Задание 13, ЕГЭ

$$x = -\operatorname{arctg}\frac{2}{5} + \pi n,\ n \in Z;\quad x \in [3\pi;\ 4\pi]$$

$$\operatorname{tg}x = -\frac{2}{5};\quad x \in [3\pi;\ 4\pi]$$

Решим уравнение графически, построив в одной системе координат графики функций $f(x)=\operatorname{tg}x$, $y=-\frac{2}{5}$ и найдем корни на промежутке $x \in [3\pi;\ 4\pi]$



$$t_0 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{5}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{2}{5}$$

$$t_1 = t_0 + 4\pi = -\operatorname{arctg}\frac{2}{5} + 4\pi$$

Задание 13, ЕГЭ

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \ -\mathrm{arctg}\frac{2}{5}+\pi n,\ n\in Z;$

б) $\frac{15\pi}{4};\ \ -\mathrm{arctg}\frac{2}{5}+4\pi.$

Задание 13, ЕГЭ

2) а) Решить уравнение $6cos^2x + 5sinx - 2 = 0$;

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$.

Решение.

а) $6cos^2x + 5sinx - 2 = 0$;

$6(1 - \sin^2 x) + 5sinx - 2 = 0$;

$-6\sin^2 x + 5sinx + 4 = 0$;

Пусть $sinx$=t, тогда

$-6t^2 + 5t + 4 = 0$;

$D = 121$

$t_1 = \frac{4}{3}$ $t_2 = -\frac{1}{2}$

При t=-1, $sinx = \frac{4}{3}$

Нет корней

При t=$-\frac{1}{2}$, $sinx = -\frac{1}{2}$

$x_1 = \arcsin(-\frac{1}{2}) + 2\pi n, n \in Z$

$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

$x_2 = \pi - \arcsin(-\frac{1}{2}) + 2\pi n, n \in Z$

$x_2 = \pi - (-\frac{\pi}{6}) + 2\pi n, n \in Z$

$x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

Задание 13, ЕГЭ

б) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$; $x \in [-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$

$$-\frac{5\pi}{2} \le -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le -\pi \;|: \pi \;; n \in Z$$

$$-\frac{5}{2} \le -\frac{1}{6} + 2n \le -1 \;| \cdot 6 \;; n \in Z$$

$$-15 \le -1 + 12n \le -6 \;; n \in Z$$

$$-14 \le 12n \le -5 \;|: 12 \;; n \in Z$$

$$-1\frac{1}{6} \le n \le -\frac{5}{6} \;; n \in Z$$

$$n = \{-1\}$$

При n= -1, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot (-1) = -\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{13\pi}{6}$

Задание 13, ЕГЭ

$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$; $x \in [-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$

$$-\frac{5\pi}{2} \le \frac{7\pi}{6} + 2\pi n \le -\pi \ |: \pi \ ; n \in Z$$

$$-\frac{5}{2} \le \frac{7}{6} + 2n \le -1 \ | \cdot 6 \ ; n \in Z$$

$$-15 \le 7 + 12n \le -6 \ ; n \in Z$$

$$-22 \le 12n \le -13 \ |: 12 \ ; n \in Z$$

$$-1\frac{5}{6} \le n \le -1\frac{1}{6} \ ; n \in Z$$

Нет решений

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n;$ $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n,$ $n \in Z$;

б) $-\frac{13\pi}{6}$.

Задание 13, ЕГЭ

3) а) Решить уравнение $4^x - 2^{x+3} + 12 = 0$;
б) Укажите корни уравнения, принадлежащие $[2;3]$.

Решение.

а) $4^x - 2^{x+3} + 12 = 0$;

$2^{2x} - 2^3 \cdot 2^x + 12 = 0$;

$2^{2x} - 8 \cdot 2^x + 12 = 0$;

Пусть 2^x=t, тогда

$t^2 - 8t + 12 = 0$;

$D = 16$

$t_1=6$ $t_2=2$

При t=6, $2^x=6$

$x = log_2 6$

При t=2, $2^x=2$

$x=1$

Задание 13, ЕГЭ

б) $x = 1$; $x \in [2;3]$

$1 \notin [2;3]$

$x = \log_2 6$; $x \in [2;3]$

$\log_2 4 < \log_2 6 < \log_2 8$

$2 < \log_2 6 < 3$

$\log_2 6 \in [2;3]$

Ответ: а) 1; $\log_2 6$; б) $\log_2 6$.

Задание 13, ЕГЭ

4) а) Решить уравнение $\left(\frac{1}{81}\right)^{cosx} = 92^{sin2x}$;

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$.

Решение.

а) $\left(\frac{1}{81}\right)^{cosx} = 92^{sin2x}$

$9^{-2cosx} = 92^{sin2x}$

$-2cosx = 2sin2x$

$sin2x + cosx = 0$

$2sinx\,cosx + cosx = 0$

$cosx\,(2sinx + 1) = 0$

$cosx = 0$ или $2sinx + 1 = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$

$2sinx + 1 = 0$

$sinx = -\frac{1}{2}$

$x_1 = \arcsin(-\frac{1}{2}) + 2\pi n,\ n \in Z$

$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$

$x_2 = \pi - \arcsin(-\frac{1}{2}) + 2\pi n,\ n \in Z$

$x_2 = \pi - (-\frac{\pi}{6}) + 2\pi n,\ n \in Z$

$x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$

Задание 13, ЕГЭ

б) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; $x \in [-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}]$

$$-2\pi \le -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le -\frac{\pi}{2} \ \ |:\pi \ ;n \in Z$$

$$-2 \le -\frac{1}{6} + 2n \le -\frac{1}{2} \ \ | \cdot 6 \ ;n \in Z$$

$$-12 \le -1 + 12n \le -3 \ ;n \in Z$$

$$-11 \le 12n \le -2 \ |:12 \ ;n \in Z$$

$$-\frac{11}{12} \le n \le -\frac{1}{6} \ ;n \in Z$$

Нет решений

Задание 13, ЕГЭ

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z\ ;\quad x \in \left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$$

$$-2\pi \le \frac{7\pi}{6} + 2\pi n \le -\frac{\pi}{2} \quad |:\pi\ ;n \in Z$$

$$-2 \le \frac{7}{6} + 2n \le -\frac{1}{2} \quad |\cdot 6\ ;n \in Z$$

$$-12 \le 7 + 12n \le -3\ ;n \in Z$$

$$-19 \le 12n \le -10 \quad |:12\ ;n \in Z$$

$$-1\frac{7}{12} \le n \le -\frac{5}{6}\ ;n \in Z$$

$$n = \{-1\}$$

При n= −1, $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi \cdot (-1) = \frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$

Задание 13, ЕГЭ

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z\ ;\quad x \in \left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$$

$$-2\pi \le \frac{\pi}{2} + \pi n \le -\frac{\pi}{2}\ \ |:\pi\ ;n \in Z$$

$$-2 \le \frac{1}{2} + n \le -\frac{1}{2}\ \ |\cdot 6\ \ ;n \in Z$$

$$-12 \le 3 + 6n \le -3\ \ ;n \in Z$$

$$-15 \le 6n \le -6\ |:6\ ;n \in Z$$

$$-2\frac{1}{2} \le n \le -1\ \ ;n \in Z$$

$$n = \{-2;\ \ -1\}$$

При n= -2, $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot (-2) = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$

При n= -1, $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot (-1) = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$

Задание 13, ЕГЭ

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $n \in Z$;

б) $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{6}$.