

ЕГЭ_2016 г. Информатика и ИКТ_22 зад.

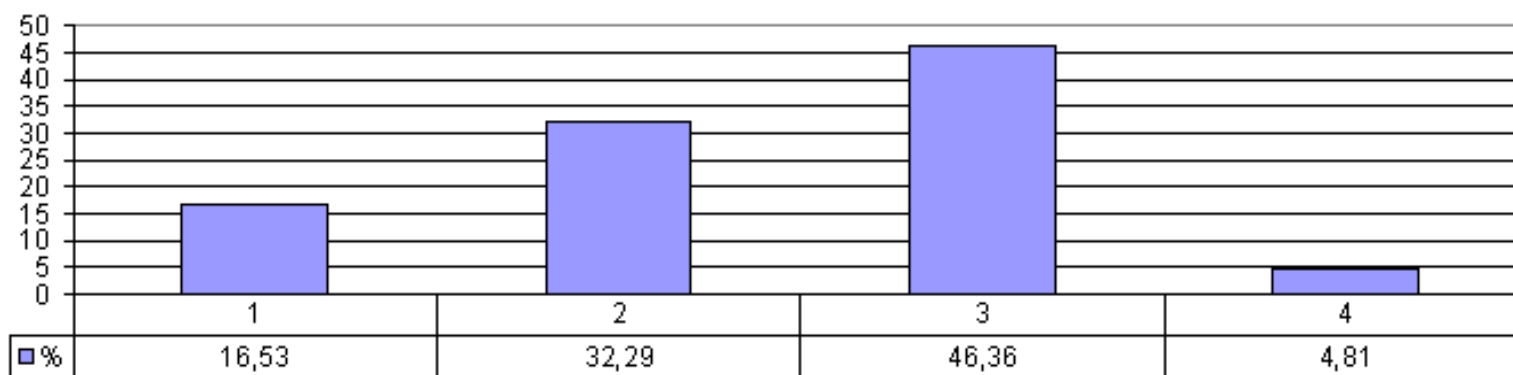
Динамическое программирование.

Исламов Ришат Габитович, учитель информатики
МБОУ Сургутский естественно-научный лицей
2015 г.



По итогам ЕГЭ 2015 г. участников по результатам экзамена можно разделить на 4 группы. В 1 группу вошли участники экзамена, получившие балл ниже минимального, в 4 группу – участники, получившие максимальные баллы. Группу 2 составили участники, набравшие больше минимального, но менее половины первичных баллов, группу 3, самую многочисленную – участники, набравшие более половины первичных баллов, но не входящие в группу 4.

Распределение групп баллов



Группа 3 является наиболее многочисленной. Это участники, готовившиеся к экзамену, изучавшие информатику на профильном или углубленном уровне, имеющие опыт решения задач в формате ЕГЭ. От группы 2 их отличает уверенное выполнение заданий 1, 6, 9, 10, 12, 13, 20, 21 первой части и заданий 24, 25 и 26 с развернутым ответом. Вызывают затруднения задания **11 и 22**, а также задания повышенного уровня **14** (анализ результата исполнения алгоритма) и **16** (запись чисел в позиционных системах счисления) – с каждым из них справилось около 40% членов группы. Задания **18, 23 и 27** выполняются неудовлетворительно (процент выполнения ниже 15%).



**Динамическое
программирование— способ
решения сложных задач путём
разбиения их на более простые
подзадачи.**



**Методом динамического программирования
решаются задачи, которые требуют перебор
вариантов:**

- 1.Подсчитать количество вариантов**
- 2.Как найти оптимальное решение**
- 3.Найти оптимальный маршрут**

**Динамическое программирование позволяет
ускорить выполнение программы так как полный
перебор не требуется, поскольку запоминаются
решения всех задач с меньшими значениями
параметров**



Чíсла Фибона́ччи — элементы последовательности
**0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597,
2584, 4181**

в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел. Названы в честь средневекового математика Леонардо Пизанского (известного как Фибоначчи). Иногда число 0 не рассматривается как член последовательности.

Более формально, последовательность чисел Фибоначчи задаётся линейным рекуррентным соотношением:

$$F(0)=0, F(1) =1, F(n) = F(n-1)+ F(n-2)$$

При этом члены с отрицательными индексами легко получить с помощью эквивалентной формулы «назад»:

$$F(n)=F(n+2)-F(n+1):$$

n	...	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
F(n)	...	-55	34	-21	13	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

Рекуррентная формула — формула вида

$$a_n = f(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-p})$$

выражающая каждый член последовательности через p предыдущих членов.

Функция факториала натурального числа удовлетворяет рекуррентной формуле:
удовлетворяет рекуррентной формуле:

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ (n - 1)! \cdot n, & n \geq 1. \end{cases}$$



1.Исполнитель преобразует число, записанное на экране. У исполнителя

три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1

2. прибавь 2

3. прибавь 4

Первая из них увеличивает число на экране на 1, вторая увеличивает это число на 2, а третья – на 4. Программа для исполнителя – это последовательность команд.

Сколько есть программ, которые число 21 преобразуют в число 30?

1.при выполнении любой из команд число увеличивается

2. все числа, меньшие 21 получить нельзя, для них количество программ будет равно 0

3.Количество разных программ для получения числа $K_{21}=1$.





Запишем рекуррентную формулу, связывающую K_N с предыдущими элементами последовательности $K_1, K_2, K_3 \dots K_{N-1}$ то есть с решениями таких же задач для меньших N

$$K_N = K_{N-1} + K_{N-2} + K_{N-4}$$

$$K(3) = K(3-1) + K(3-2) + K((3-4)) = 1 + 1$$

$$K(5) = K(5-1) + K(5-2) + K((5-4)) = 3 + 2 + 1 = 6$$

$$K(6) = K(6-1) + K(6-2) + K((6-4)) = 6 + 3 + 1 = 10$$

N	21(1)	22(2)	23(3)	24(4)	25(5)	26(6)	27	28	29	30
K(N)	1	1	2	3	6	10	18	31	55	96

У исполнителя две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1

2. умножь на 3

Первая из них увеличивает число на экране на 1, вторая – утраивает его. Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 20?

$$K_N = K_{N-1} + K_{N/3}$$

Для получения ответа нужно сложить

для чисел 1 и 2, меньших, чем $K_1 = K_2 = 3 = 1$, существует только одна программа, состоящая только из команд сложения

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
K_N	1	1	2	2	2	3	3	3	5	5	5	7	7	7	9	9	9	12	12	12

Исполнитель преобразует число, записанное на экране. У исполнителя три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. прибавь 2
3. прибавь следующее

Первая из них увеличивает число на экране на 1, вторая увеличивает это число на 2, а третья прибавляет к числу на экране число, большее на 1 (к числу 3 прибавляется 4, к числу 9 прибавляется 10 и т. д.). Программа для исполнителя – это последовательность команд. Сколько есть программ, которые число 2 преобразуют в число 10?

число N могло быть получено одной из трёх операций:

увеличением на 1 числа $N-1$;

увеличением на 2 числа $N-2$;

числа X увеличением на $X+1$ (следующее число), $N = X + X + 1$,

откуда $X = (N - 1) / 2$; так могут быть получены только нечетные



$$K_N = K_{N-1} + K_{N-2} + K_{(N-1)/2}$$

для чётных чисел

$$K_N = K_{N-1} + K_{N-2}$$

для нечётных чисел

$$K_N = K_{N-1} + K_{N-2} + K_{(N-1)/2}$$

$$K_2 = 1$$

$$K(3) = K(3-1) + K(3-2) + K((3-1)/2)$$

$$K(4) = K(4-1) + K(4-2) + K((4-1)/2)$$

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K_N	1	1	2	4	6	11	17	30	47

Исполнитель преобразует число на экране. У исполнителя есть две команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Умножить на 2

Первая команда увеличивает число на экране на 1, вторая умножает его на 2. Программа для исполнителя Июнь15 – это последовательность команд. Сколько существует программ, для которых при исходном числе 1 результатом является число 21 и при этом траектория **вычислений содержит число 10**?

Траектория вычислений программы – это последовательность результатов выполнения всех команд программы. Например, для программы 121 при исходном числе 7 траектория будет состоять из чисел 8, 16, 17.

$$K_N = K_{N-1} + K_{N/2}$$

1. Заполняем таблицу от 1 до 10 по формуле:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K_N	1	2	2	4	4	6	6	10	10	14

2. Определяем сколько есть способов получить конечное число 21 из 10, только левую часть таблицы (от 1 до 10) мы уже не рассматриваем.

N	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
K_N	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	28	28

Ответ: **28.**



У исполнителя Удвоитель две команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1

2. Умножить на 2

Первая команда увеличивает число на экране на 1, вторая умножает его на 2. Программа для исполнителя Удвоитель – это последовательность команд. Сколько существует программ, преобразующих число 4 в число 24, предпоследней командой которых является команда «1»?

1. Мы знаем предпоследнюю команду 1, при этом последняя команда **1 или 2**

2. Нужно получить количество всех программ вида ***11 и *12**, где звёздочка обозначает любые команды

если программа заканчивается на «11», то до выполнения цепочки «11» у нас было число **$24 - 1 - 1 = 22$** ; поэтому нужно



$$K_N = K_{N-1} + K_{N/2}$$

N	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
K_N	1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	7	7	9	9	12	12	15

3. рассматриваем случай, когда программа заканчивается на «12», это значит, что до выполнения цепочки «12» у нас было число $(24/2) - 1 = 11$; поэтому нужно найти число программ для преобразования 4 в 11, берём его из таблицы: **3**

ответ к задаче – сумма двух значений, выделенных жёлтым маркером: $15 + 3 = 18$, поскольку мы рассмотрели все варианты программ, в которых предпоследняя команда 1

Ответ: 18.

