Приемы решения заданий высокого уровня сложности (№ 22, ОГЭ)

Подготовила

Ахтямова
Флюза Мавлитбаевна

МБОУ гимназия
“Лаборатория Салахова”

Задание 22 – это задание высокого уровня сложности, оно требует свободного владения материалом и довольно высокого уровня математического развития. Рассчитаны эти задачи на обучающихся, изучавших математику более основательно, например, в рамках углубленного курса математики, элективных курсов в ходе предпрофильной подготовки, математических кружков и пр. Хотя эти задания не выходят за рамки содержания, предусмотренного стандартом основной школы, но при их выполнении ученик должен продемонстрировать владение некоторыми специальными приемами преобразования выражений, проявить умения исследовательского характера, которые помогут успешно продолжать образование в 10-11 классах углубленного или профильного изучения математики, информатики, физики.

Общая характеристика заданий 22

В заданиях 22 рассматривается графический способ решения уравнений, имеющих один из двух видов:

$$1)\ f(x) = m;\ \ 2)\ f(x) = kx,$$

где $f(x)$ — произвольная функция, k и m — произвольные числа.

Уравнение $y = m$ $(m \in R)$ задаёт множество всех прямых параллельных оси абсцисс.

Уравнение $y = kx$ $(k \in R)$ задаёт множество всех прямых, проходящих через начало координат, кроме оси ординат.

Как правило, требуется:

либо найти все такие значения m или k, при которых

а) прямые $y = m$ или $y = kx$ не имеют общих точек с графиком функции $y = f(x)$;

б) прямые $y = m$ или $y = kx$ имеют с графиком функции $y = f(x)$ заданное число общих точек,

либо найти наибольшее возможное число общих точек у прямых $y = m$ или $y = kx$ с графиком функции $y = f(x)$.

Задание 6. Постройте график функции $y = x^2 + |2x + 7|$.

Определите при каких значениях m

прямая $y = m$ имеет с этим графиком одну общую точку.

Решение. **Рассмотрим два случая: 1)** $2x + 7 < 0 (x < -3{,}5)$;

2)$2x + 7 \geqslant 0 (x \geqslant -3{,}5)$;

В случае 1) получаем уравнение

$$y = x^2 + |2x + 7| = x^2 + (-(2x + 7)) = x^2 - 2x - 7.$$

В случае 2) получаем уравнение

$$y = x^2 + |2x + 7| = x^2 + (2x + 7) = x^2 + 2x + 7.$$

Значит,

$$y=\begin{cases} x^2-2x-7, \text{если } x<-3{,}5, \\ x^2+2x+7, \text{если } x\geqslant -3{,}5. \end{cases}$$

У параболы $y=x^2-2x-7$ абсцисса вершины равна $-\dfrac{-2}{2}=1$

и её ветви направлены вверх. Значит, при $x<-3{,}5$ она убывает

от $+\infty$ до $y(-3{,}5)=(-3{,}5)^2-2(-3{,}5)-7=12{,}25.$

У параболы $y=x^2+2x+7$ абсцисса вершины равна $-\dfrac{2}{2}=-1$

и её ветви направлены вверх. Поэтому, при $-3{,}5\leqslant x\leqslant -1$ она

убывает от $y(-3{,}5)=(-3{,}5)^2+2(-3{,}5)+7=12{,}25$ до

$y(-1)=(-1)^2+2(-1)+7=6$. На промежутке от -1 до $+\infty$ она

возрастает от 6 до $+\infty$. Получаем следующий рисунок 11.

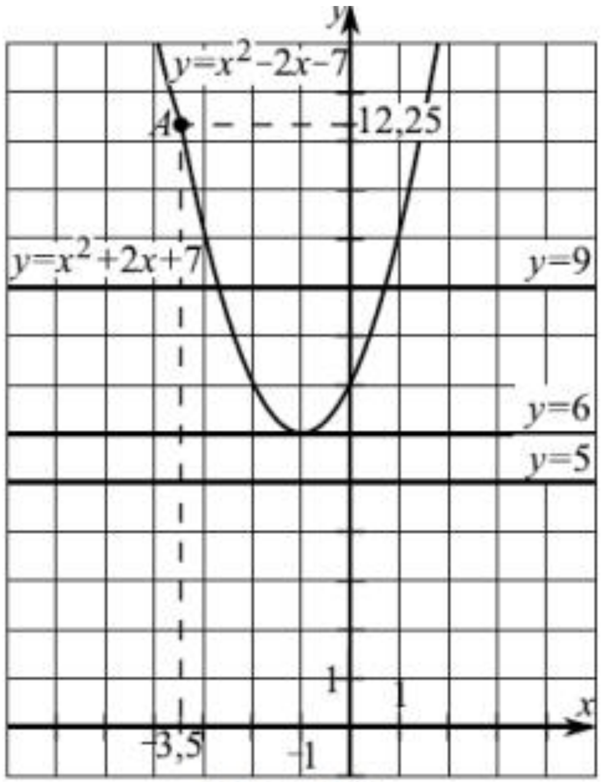


Рис. 11:

Для понимания того, какие из прямых, параллельных оси абсцисс

пересекают график функции $y = x^2 + |2x + 7|$, на этом рисунке

изображены также прямые $y = 5$, $y = 6$ и $y = 9$.

По рисунку определяем, что единственная прямая $y = 6$ имеет

с графиком одну общую точку. **Ответ.** 6.

Задание 7. Постройте график функции $y = \dfrac{3|x| - 1}{|x| - 3x^2}$.

Определите при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с этим графиком общих точек.

Решение. **Заметим, что функция $y = \dfrac{3|x| - 1}{|x| - 3x^2}$ — чётная.**

Значит, построим её график при $x \geqslant 0$, а затем отобразим его симметрично оси ординат и возьмём объединение этих графиков.

При $x \geqslant 0$ получаем $y = \dfrac{3x - 1}{x - 3x^2} = \dfrac{3x - 1}{-x(3x - 1)}$. Эта функция определена при таких x, что $3x - 1 \neq 0$, то есть при $x \neq \dfrac{1}{3}$.

При эти значениях x она принимает вид $y = \dfrac{-1}{x}$. Графиком этой функции является гипербола $y = \dfrac{-1}{x}$ с выколотой точкой $\left(\dfrac{1}{3}; -3\right)$.

Отобразив его симметрично оси ординат, и объединив с построенным графиком, получим график функции

$y = \dfrac{3|x| - 1}{|x| - 3x^2}$ **(см. рис. 12)**

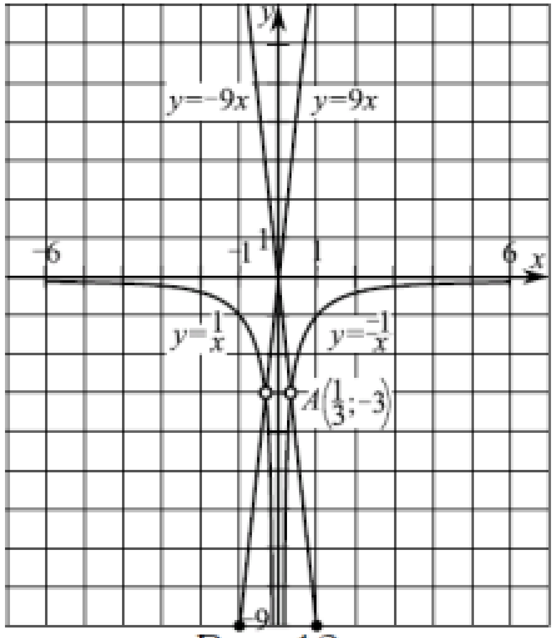


Рис. 12:

По графику определяем, что прямая $y = 0$ и две прямые: $y = 9x$ и $y = -9x$, проходящие через выколотые точки, не имеют с графиком заданной функции общих точек.

Ответ: $9; -9; 0$.

Задание 8. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 6x + 9, \text{ если } x < 4, \\ \dfrac{4}{x}, \text{ если } x \geqslant 4. \end{cases}$$

Определите при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с этим графиком одну или две общих точек.

Решение. **У параболы $y = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ вершиной является точка $(3; 0)$ и ветви направлены вверх, поэтому при $x \leqslant 3$ она убывает от $+\infty$ до нуля. При $3 \leqslant x \leqslant 4$ она возрастает от нуля до $y(4) = 1$.**

Гипербола $y = \dfrac{4}{x}$ убывает при $x \geqslant 4$ от $y(4) = \dfrac{4}{4} = 1$ до нуля, оставаясь больше нуля при любом $x \geqslant 4$.

Из сказанного получаем следующий график (см. рис. 13)

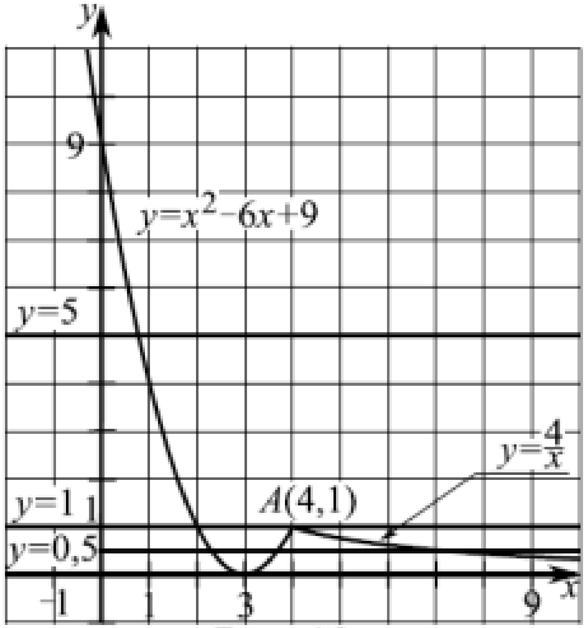


Рис. 13:

Для понимания того, какие из прямых $y = m$, параллельных оси абсцисс пересекают график заданной функции в одной или двух точках, на этом рисунке изображены также прямые $y = 0{,}5$, $y = 1$ и $y = 5$. По графику определяем, что такими прямыми являются прямые $y = m$ при $m \geqslant 1$ и $m = 0$.

Ответ: $[1; +\infty) \cup \{0\}$.

Задание 9.

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} -\dfrac{6}{|x|}, & \text{если } x < -3. \\ x+1, & \text{если } -3 \leqslant x \leqslant 3, \\ 4x^2 - 32x + 64, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Определите при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

Решение. Рассуждая, как и в предыдущей задаче получаем график заданной функции (см. рис. 14)

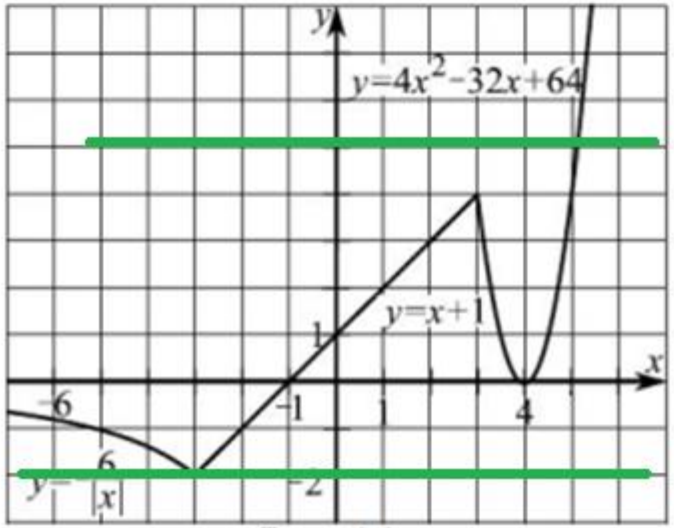


Рис. 14:

По графику определяем, что искомыми значениями m

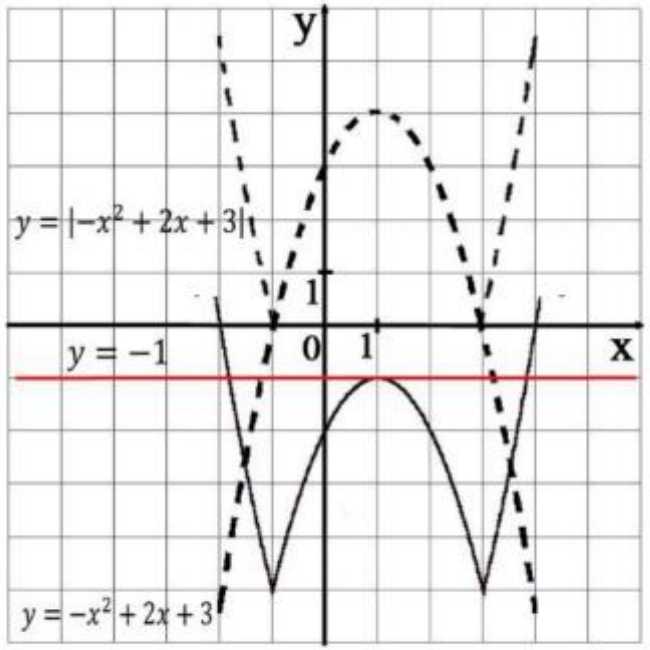
являются $m = -2$ и $m > 4$. Ответ: $(4; +\infty) \cup \{-2\}$.

Постройте график функции $y = |-x^2 + 2x + 3| - 5.$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

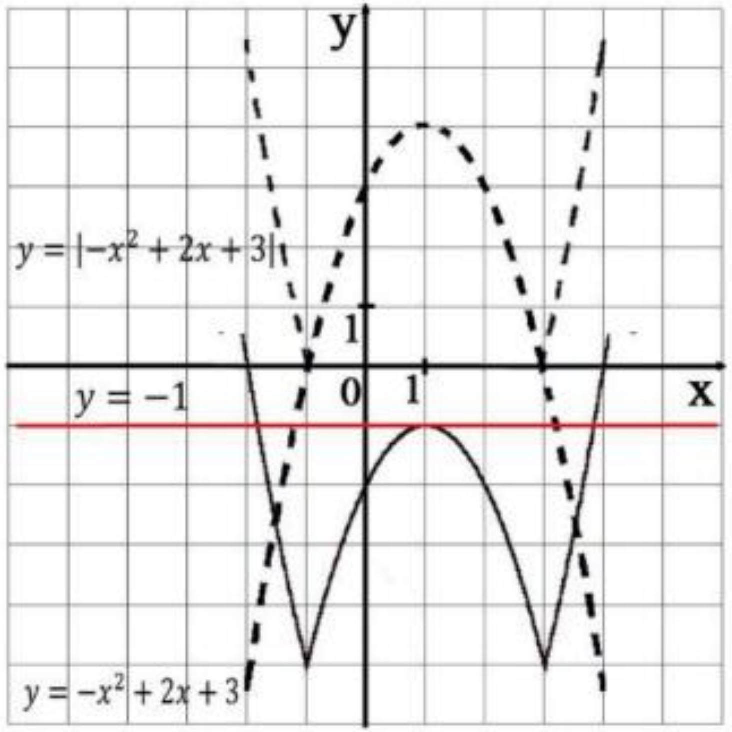
Решение.

1) Построим сначала график функции $y = -x^2 + 2x + 3$. Это парабола с вершиной $x = -\frac{b}{2a} = 1$ с ветвями вниз.
2) Затем построим график функции $y = |-x^2 + 2x + 3|$. Он получается из графика $y = -x^2 + 2x + 3$ отражением точек с отрицательными значениями y относительно оси Ox.



3) График функции $y = |-x^2 + 2x + 3| - 5$ получается из графика $y = |-x^2 + 2x + 3|$ сдвигом вниз на 5 (изображен на чертеже сплошной черной линией).
4) Прямая $y = m$ – горизонтальная прямая. Положения этой прямой, при котором ровно три пересечения, будет только при $m = -1$ (показано на рисунке красным). Таким образом, $m = -1$.

Ответ: $m = -1$.



Постройте график функции

$$y = \frac{|x^2 + x - 2|}{x + 2}.$$

Определите, при каких значениях k прямая $y = k$ имеет с графиком максимальное число точек пересечения.

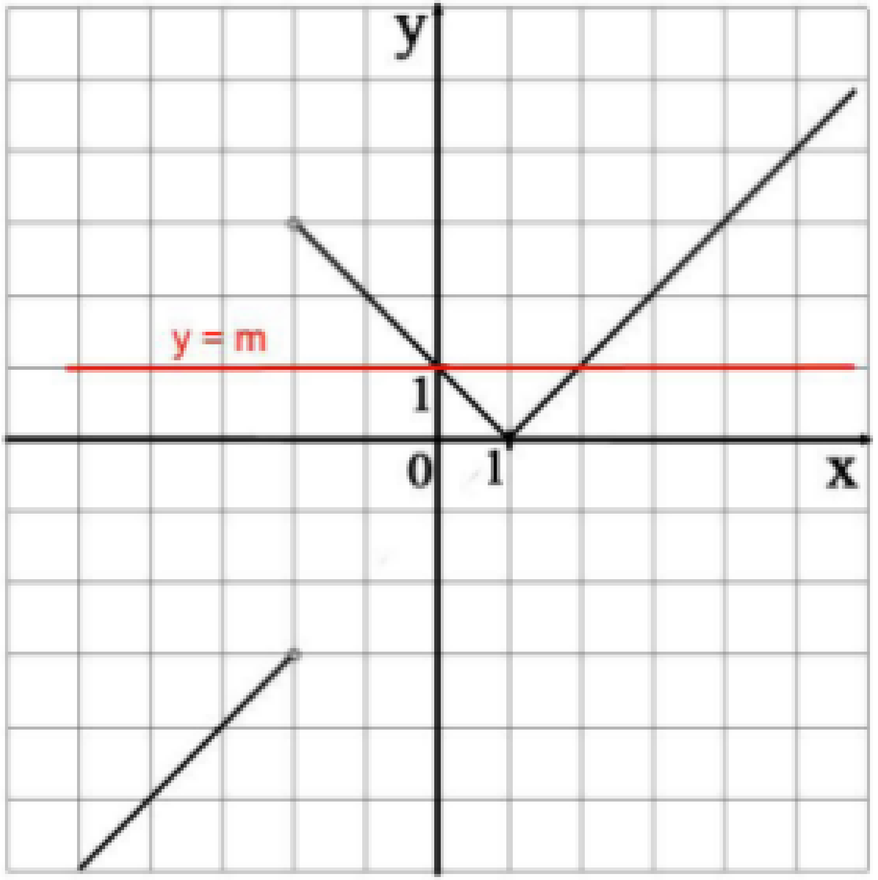
Решение.

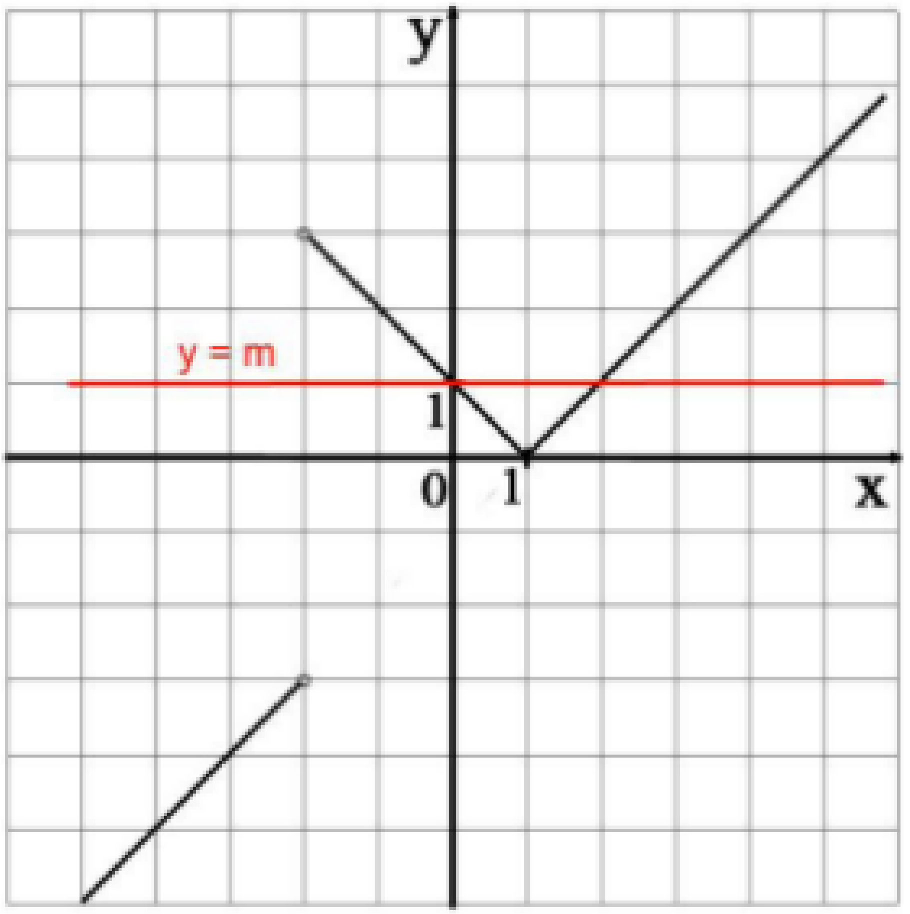
1) Отметим, что область определения $D(y)$ нашей функции - это $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.
2) Если приравнять числитель к нулю и через дискриминант найти корни, то получим $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. Таким образом, числитель можно разложить на множители $|x^2 + x - 2| = |(x - 1)(x + 2)|$. Кроме этого, так как $y = x^2 + x - 2$ – парабола с ветвями вверх, пересекающая ось OX в точках $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, то $x^2 + x - 2 > 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$ и $x^2 + x - 2 < 0$ при $x \in (-2; 1)$.

3) Построим теперь график, разбирая случаи.

а. При $x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$ модуль в числителе раскрывается со знаком плюс, откуда
$y = \frac{|(x-1)(x+2)|}{x+2} = \frac{(x-1)(x+2)}{x+2} = x - 1$ – прямая с выколотой точкой $x = -2$ (так как $x \neq -2$).

б. При $x \in (-2; 1)$ модуль в числителе раскрывается со знаком минус, откуда
$y = \frac{|(x-1)(x+2)|}{x+2} = -\frac{(x-1)(x+2)}{x+2} = 1 - x$ – прямая с выколотой точкой $x = -2$ (так как опять же $x \neq -2$).





4) При любом m график $y = m$ – горизонтальная прямая. Максимальное число точек пересечения (две точки) с нашим графиком будет при $m \in (0; 3)$.

Ответ: $m \in (0; 3)$.

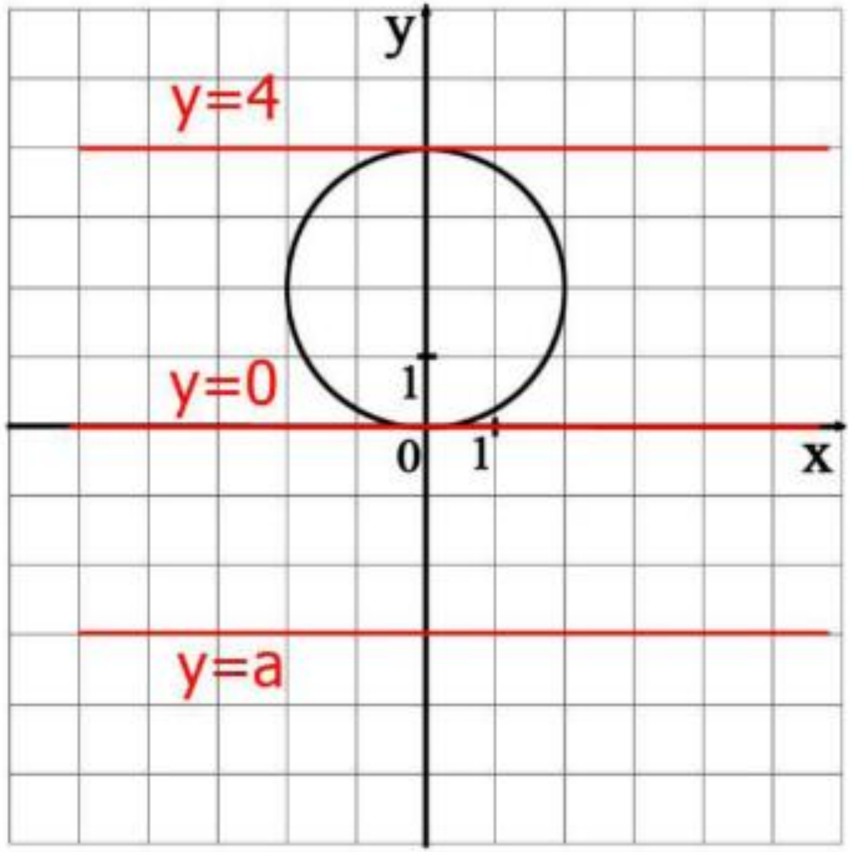
Укажите на координатной плоскости множество точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими уравнению

$$y^2 - 4y + 4 = 4 - x^2.$$

Определите, при каких значениях a прямая $y = a$ имеет с этим множеством ровно одну точку пересечения. Изобразите на этой же координатной плоскости такие прямые.

Решение.

1) Преобразуем наше уравнение. Перенесем x^2 в левую часть, получим $x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4$. В левой части заметим полный квадрат $x^2 + (y-2)^2 = 4$. Это уравнение окружности с центром в точке $(0; 2)$ и радиусом $R = 2$ (так как уравнение имеет вид $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$). Изобразим на координатной плоскости эту окружность



2) При любом a график $y = a$ - это горизонтальная прямая, имеющая с нашей окружностью ровно одну точку пересечения, если прямая касается окружности. Это будет для $a = 0$ и $a = 4$.

Ответ: $a = 0$, $a = 4$.

Постройте график функции

$$y = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + x + 1.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком бесконечно много точек пересечения.

Решение.

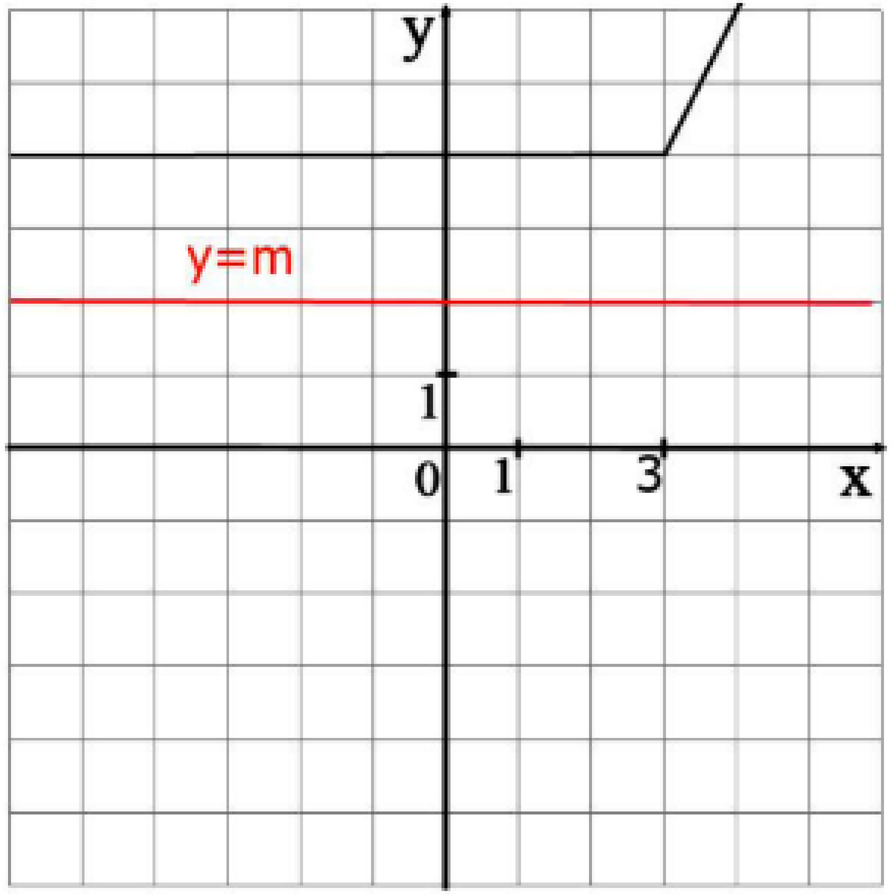
1) Отметим, что так как $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ - число неотрицательное, то функция определена при всех значениях x.
2) Так как $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$, то функцию можно переписать в виде $y = |x-3| + x + 1$.
3) При $x \in (-\infty; 3)$ выполнено $|x-3| = 3 - x$, а при $x \in [3; +\infty)$ выполнено $|x-3| = x - 3$. Таким образом, нашу функцию можно переписать в виде

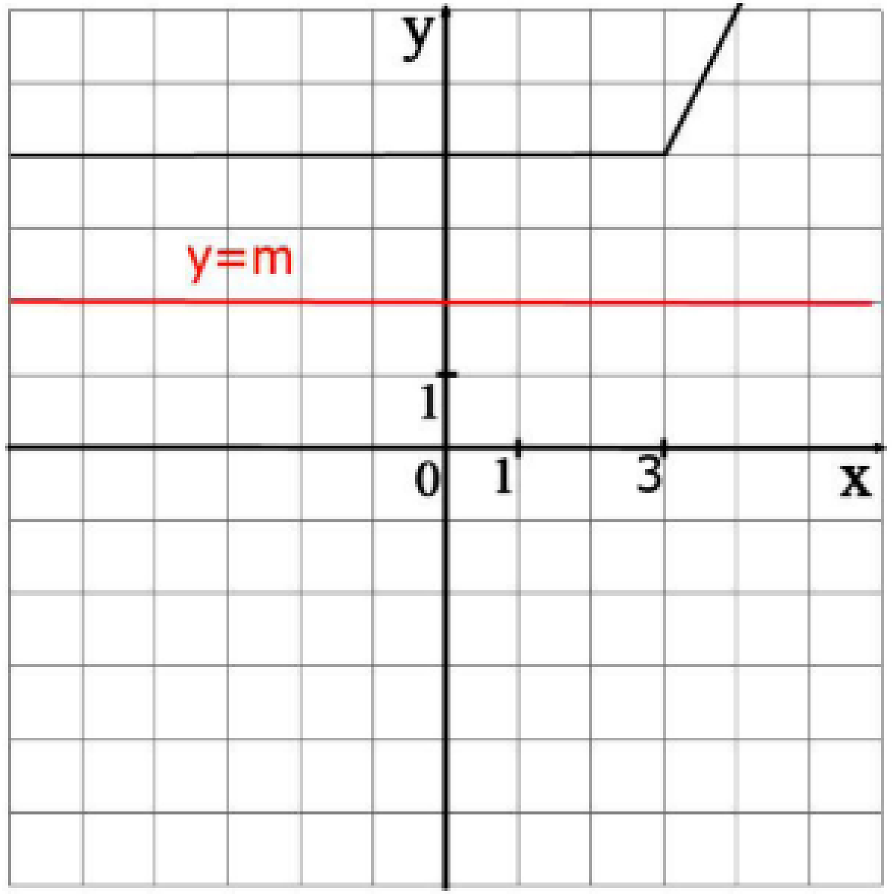
$$y = \begin{cases} 3 - x + x + 1 = 4 & \text{при } x \in (-\infty; 3); \\ x - 3 + x + 1 = 2x - 2 & \text{при } x \in (3; +\infty). \end{cases}$$

4) График функции $y = 4$ - это горизонтальная прямая (см. рисунок при $x \in (-\infty; 3)$).

График функции $y = 2x - 2$ - это прямая.

Построим ее, взяв например две точки $(1; 0)$ и $(2; 2)$, лежащие на этой прямой (см. рисунок при $x \in (3; +\infty)$).





5) При любом m график $y = m$ – горизонтальная прямая (см. рисунок), имеющая с нашим графиком бесконечно много точек пересечения при $m = 4$.

Ответ: $m = 4$.

Постройте график функции $y = \left|\frac{x+2}{x+1}\right| + 2.$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком одну точку пересечения.

Решение.

1) Построим сначала график $y = \frac{x+2}{x+1}$. Преобразуем правую часть $y = \frac{x+1+1}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$. График функции $y = \frac{1}{x+1}$ - это гипербола $y = \frac{1}{x}$, сдвинутая на 1 влево. График функции $y = 1 + \frac{1}{x+1}$ - это график $y = \frac{1}{x+1}$, сдвинутый на 1 вверх. Полученный график функции $y = \frac{x+2}{x+1}$, изображен на рисунке 1.

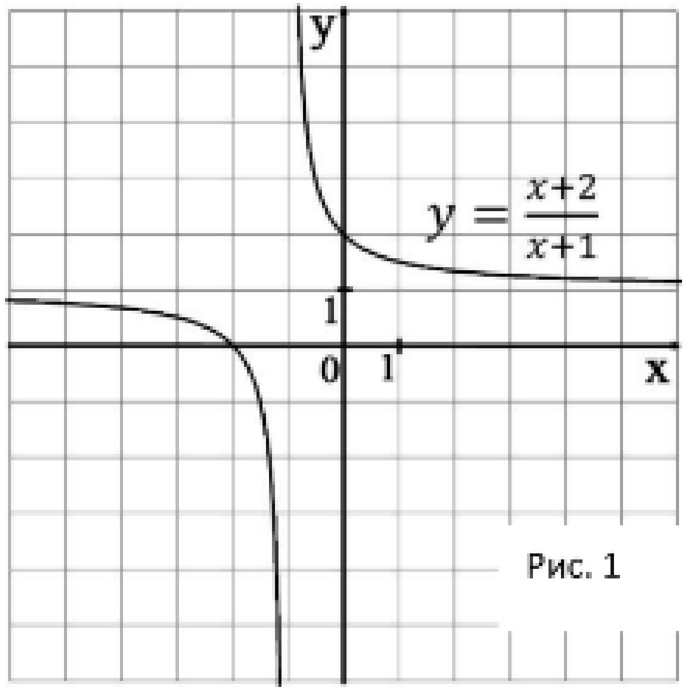


Рис. 1

2) График функции $y = \left|\frac{x+2}{x+1}\right|$ получается из графика $y = \frac{x+2}{x+1}$ отражением части графика, находящейся ниже оси OX наверх. И, наконец, график нужной нам функции $y = \left|\frac{x+2}{x+1}\right| + 2$ получается из графика $y = \left|\frac{x+2}{x+1}\right|$ сдвигом вверх на 2 (см. рисунок 2).

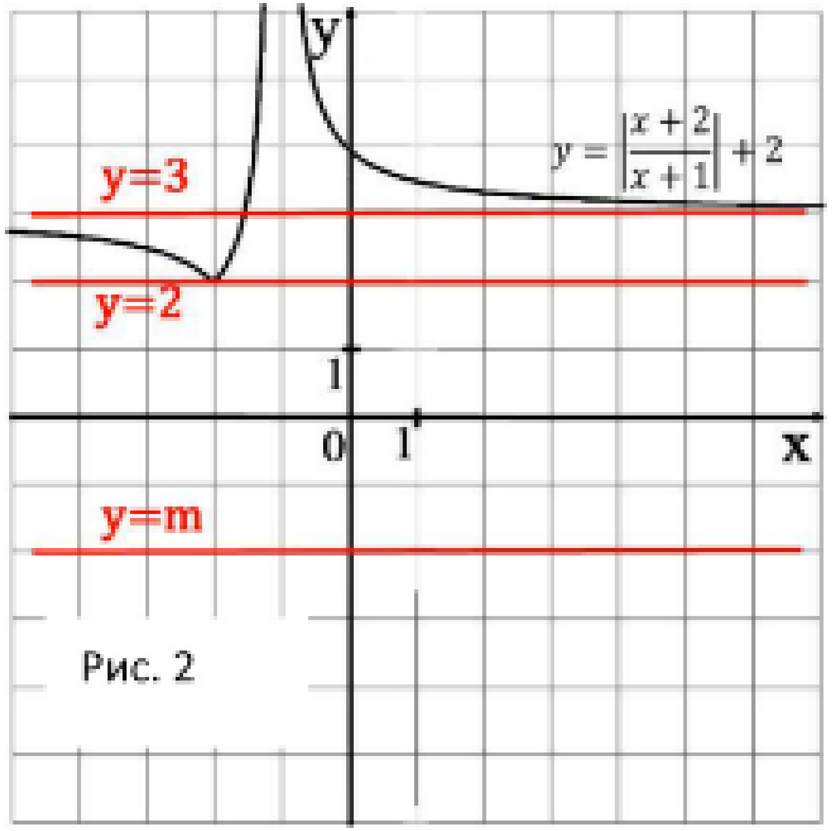


Рис. 2

3) При любом m график функции $y = m$ – горизонтальная прямая. Она имеет с предыдущим графиком одну точку пересечения, когда $y = 2$ и $y = 3$ (см. рисунок 2).

Ответ: $m = 2$ и $m = 3$.

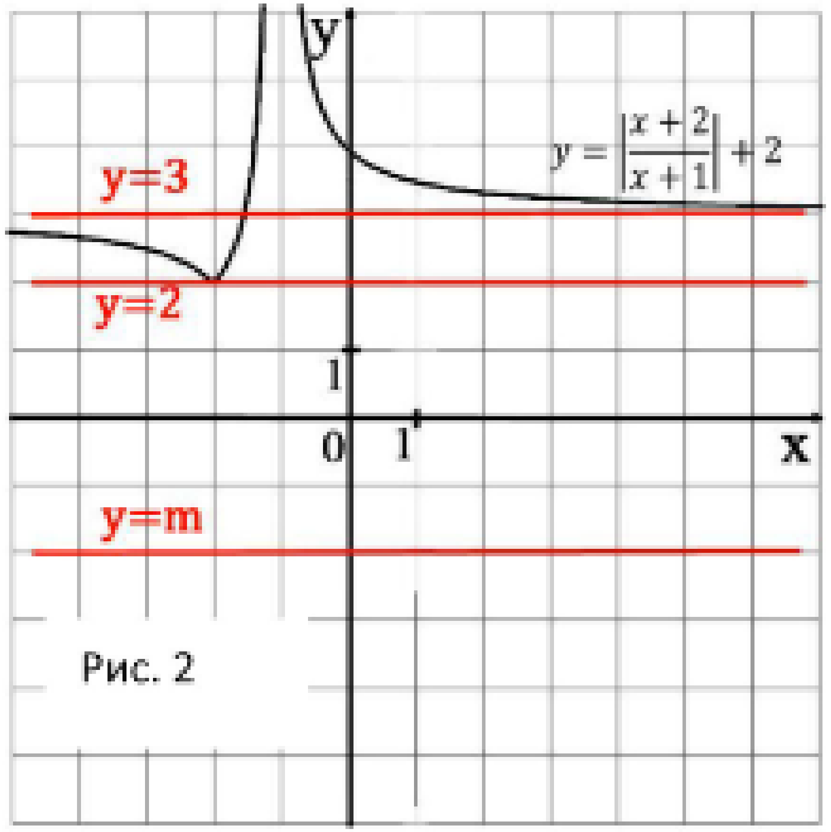


Рис. 2

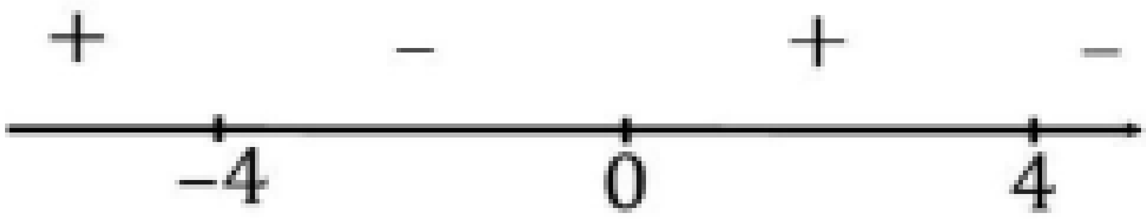
Постройте график функции $y = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{4}{x} - \frac{x}{4}\right| + \frac{4}{x} + \frac{x}{4}\right).$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком точек пересечения.

Решение.

1) Отметим, что область определения $D(y)$ нашей функции - это $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2) Выражение под модулем можно записать в виде $\frac{4}{x} - \frac{x}{4} = \frac{16-x^2}{4x}$. Определим знаки этого выражения. Нули числителя - это $x = \pm 4$, нуль знаменателя – это $x = 0$. Расставим эти числа на прямой и определим знаки



Постройте график функции $y = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{4}{x} - \frac{x}{4}\right| + \frac{4}{x} + \frac{x}{4}\right)$.

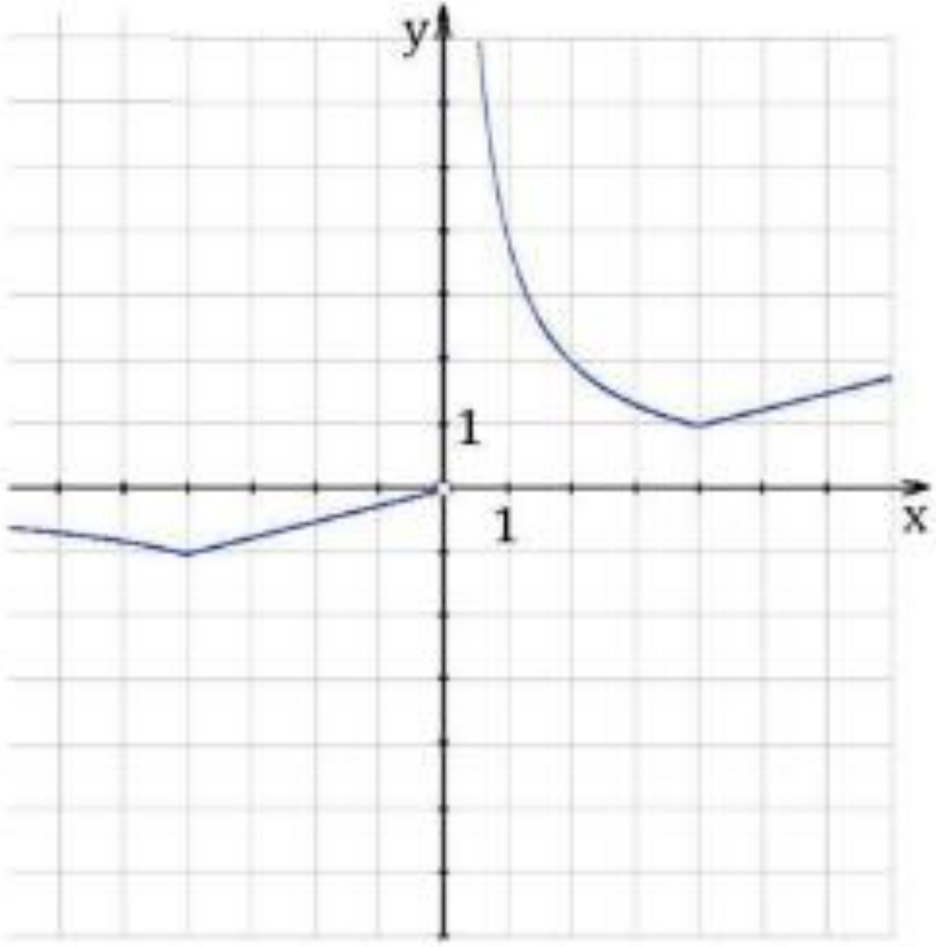
3) Построим теперь график, разбирая случаи.

а. При $x \in (-\infty; -4)$ модуль раскрывается с плюсом, откуда

$y = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{x} - \frac{x}{4}\right) + \frac{4}{x} + \frac{x}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x} = \frac{4}{x}$ – гипербола.

б. При $x \in [-4; 0)$ модуль раскрывается с минусом, откуда

$y = \frac{1}{2}\left(-\left(\frac{4}{x} - \frac{x}{4}\right) + \frac{4}{x} + \frac{x}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{4} = \frac{x}{4}$ – прямая.

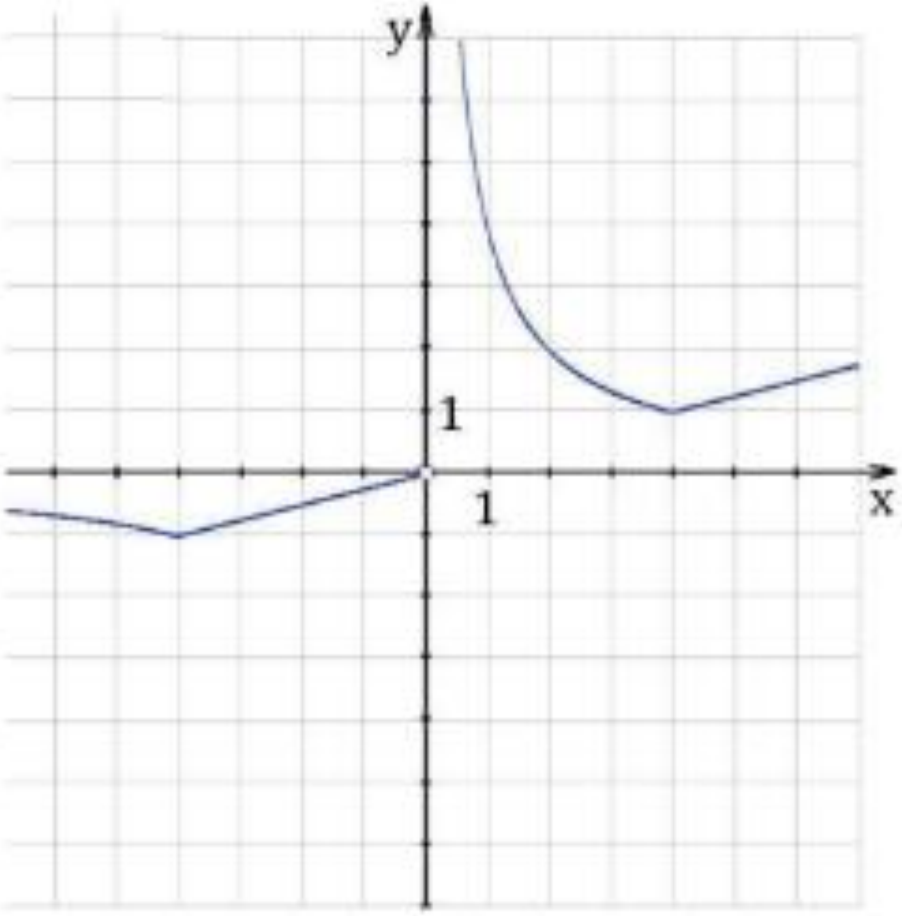


в. При $x \in (0; 4]$ модуль раскрывается с плюсом, откуда

$y = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{x} - \frac{x}{4}\right) + \frac{4}{x} + \frac{x}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x} = \frac{4}{x}$ – гипербола.

г. При $x \in (4; +\infty)$ модуль раскрывается с минусом, откуда

$y = \frac{1}{2}\left(-\left(\frac{4}{x} - \frac{x}{4}\right) + \frac{4}{x} + \frac{x}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{4} = \frac{x}{4}$ – прямая.



4) При любом m график $y = m$ – горизонтальная прямая. Эта прямая не имеет точек пересечения с нашим графиком если $m \in (-\infty; -1) \cup [0; 1)$.

Ответ: $m \in (-\infty; -1) \cup [0; 1)$.

Общие подходы к проверке и оценке выполнения заданий с развернутым ответом

Требования к выполнению заданий с развернутым ответом заключаются в следующем: решение должно быть математически грамотным и полным, из него должен быть понятен ход рассуждений обучающегося. Оформление решения должно обеспечивать выполнение указанных выше требований, а в остальном может быть произвольным. Не следует требовать от учащихся слишком подробных комментариев (например, описания алгоритмов). Лаконичное решение, не содержащее неверных утверждений, все выкладки которого правильны, следует рассматривать как решение без недочетов. Если решение заданий 2 части удовлетворяет этим требованиям, то выставляется полный балл – 2 балла за каждое задание. Если в решении допущена ошибка непринципиального характера (вычислительная, погрешность в терминологии или символике и др.), не влияющая на правильность общего хода решения (даже при неверном ответе) и позволяющая, несмотря на ее наличие, сделать вывод о владении материалом, то учащемуся засчитывается балл, на 1 меньший указанного, что и отражено в критериях оценивания заданий с развернутым ответом.

Задание № 22

Пример задания № 22. Постройте график функции $y = 3 - \frac{x+5}{x^2+5x}$. Определите при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком общих точек.

Содержание критерия	**Баллы**
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра.	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Типичные ошибки:

- не указывается область определения функции;
- нет названия функции;
- не описано построение графика;
- не определяется значение функции в выколотой точке;
- неверно построен график;
- не указаны единичные отрезки на осях координат;
- в таблице значений (x; y) менее трех точек для каждой ветви гиперболы;
- график строится схематично и не проходит через точки, взятые в таблице значений, или график построен небрежно;
- не выкалываются точки, в которых функция не определена;
- не проводится исследование и расположения прямой $y = m$ относительно графика функции, сразу дается готовый ответ.

Спасибо за внимание!