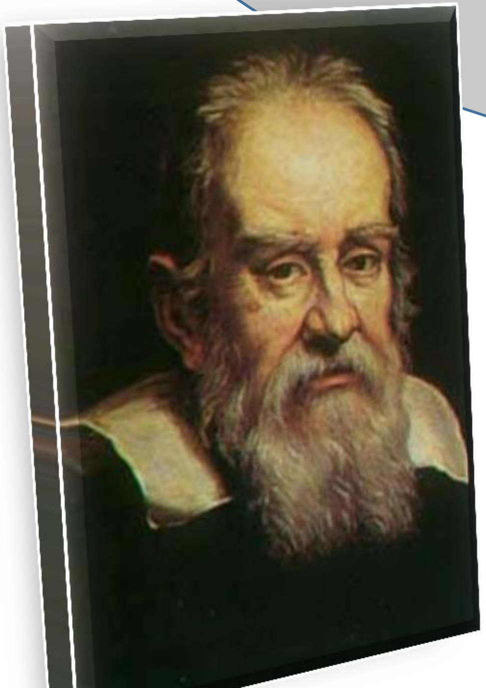
Система подготовки учащихся 10-11 классов к решению планиметрических задач на ЕГЭ

Иванов В.А.,
учитель математики МБОУ СОШ № 45

**Геометрия является
самым могущественным средством
для изощрения наших умственных
способностей
и дает нам возможность правильно
мыслить и рассуждать**



Галилео Галилей

«Как искать решение задачи?»

Поиск решения похож с задачей поймать мышь, прячущуюся в куче камней.

Есть два способа поймать мышь в куче камней.

Можно постепенно отбрасывать из этой кучи камень за камнем до тех пор, пока не покажется мышь. Тогда бросайтесь и ловите её…

Но можно и иначе. Надо ходить и ходить вокруг кучи и зорко смотреть, не покажется ли где-либо хвостик мыши. Как только заметите хвостик – хватайте и вытягивайте мышь из кучи.

Владимир Абрамович Тартаковский

Процесс обучения поиску решения задач

Усвоение основных понятий по теме

Решение типовых задач

Установление неявных связей между величинами

Установление простейших связей между объектами и величинами

Обучение эвристическим приемам при решении задач

Обучение приемам исследовательской работы


Задача
Анализ задачи
Схематическая запись задачи
Поиск способа решения
План решения
Анализ решения
Осуществление плана решения
Исследование задачи
Проверка
Ответ

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа №45

РАССМОТРЕНО на заседании Управляющего совета Председатель О.В.Лесник 31.08.2018	СОГЛАСОВАНО ___________ Заместитель директора по УВР Т.В. Лимонова 31.08.2018	УТВЕРЖДАЮ ___________ Директор Н.А.Шинкаренко 31.08.2018

Рабочая программа
курса «Практикум по решению геометрических задач»

Класс - 10
Количество часов в неделю - 1
Учитель – Иванов Виталий Анатольевич

Учебный год - 2018 - 2019

Цель курса :

подготовка к успешному выполнению заданий №16, повышение теоретических знаний курса геометрии, усиление роли теоретических обобщений и дедуктивных заключений.

Задачи:

Способствовать формированию осознанных мотивов изучения геометрии

Изучить различные методы и приемы при решении типовых заданий

Развить интерес к изучению геометрии

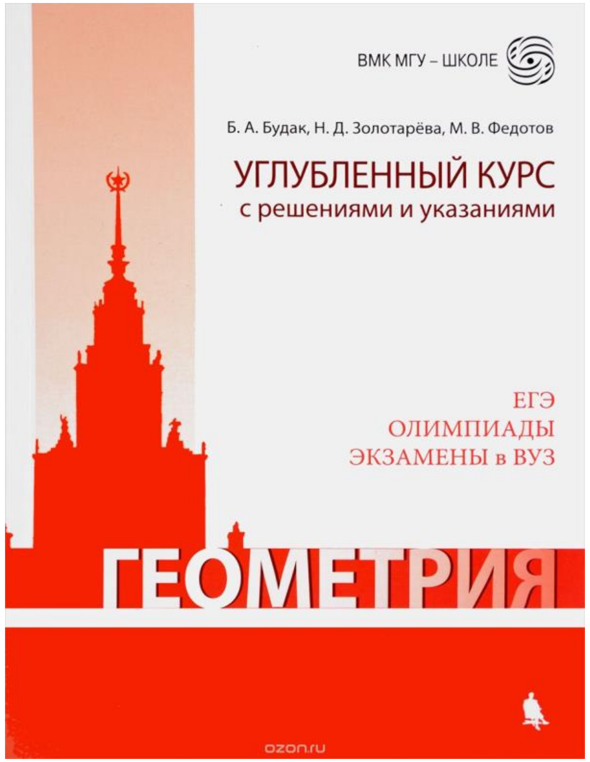

16
Под редакцией
И. В. Ященко
Р. К. Гордин
ЕГЭ
2019
МАТЕМАТИКА
ЕГЭ 2019
16
Профильный
ГЕОМЕТРИЯ.
ПЛАНИМЕТРИЯ
ФГОС
МАТЕМАТИКА


Под редакцией
И. В. Ященко
Р. К. Гордин
ЕГЭ
2019
Решение
задачи 16
ФГОС
МАТЕМАТИКА


А. А. Черняк, Ж. А. Черняк
ЕГЭ
ПО МАТЕМАТИКЕ
ГЕОМЕТРИЯ
Практическая подготовка
Три уровня сложности: необходимый, достаточный, повышенный
Систематизированные методы решения однотипных задач
Задачи с иллюстрированными решениями
Методические советы, комментарии, ответы
bhv

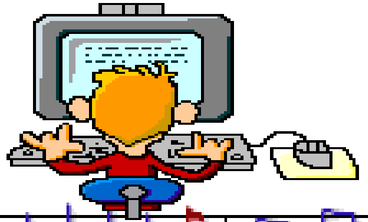

Большая перемена
Э.Н. БАЛАЯН
НОВЫЙ РЕПЕТИТОР ПО ГЕОМЕТРИИ
для подготовки к ГИА и ЕГЭ
• КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ
• 500 ЗАДАЧ С РЕШЕНИЯМИ
• 1500 ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ
• ОТВЕТЫ КО ВСЕМ ЗАДАЧАМ


Обзорное повторение к ЕГЭ
Е. С. Смирнова
ПЛАНИМЕТРИЯ:
ВИДЫ ЗАДАЧ
И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЙ
Элективный курс
для учащихся 9—11 классов


ВМК МГУ – ШКОЛЕ
Б. А. Будак, Н. Д. Золотарёва, М. В. Федотов
УГЛУБЛЕННЫЙ КУРС
с решениями и указаниями
ЕГЭ
ОЛИМПИАДЫ
ЭКЗАМЕНЫ в ВУЗ
ГЕОМЕТРИЯ


ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭКЗАМЕН
Е. В. ПОТОСКУЕВ
МАТЕМАТИКА
ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ
ЗАДАНИЯ 14,16
ОПОРНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ.
ПЛАНИМЕТРИЯ. СТЕРЕОМЕТРИЯ
ЕГЭ 2017
• Основные теоремы и формулы планиметрии и стереометрии • Задачи "от простого – к сложному"
• Расстояния и углы в пространстве
• Нахождение площадей и объемов • Построение сечений • Тетраэдр, куб, пирамида, призма.
Комбинации многогранников и сфер
• Ответы ко всем заданиям

Содержание



Вводное повторение

1. Треугольник
2 Многоугольники
3. Окружность
4. Векторы

Цели вводного повторения

Формирование у учащихся устойчивых знаний теоретического материала

Наработка методов решения базовых задач,

задач состоящих из базовых подзадач,

задач, требующих творческого, нестандартного подхода.

ПОДГОТОВКА К ГИА-11. ГЕОМЕТРИЯ. БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

Многоугольники

1. Эти вопросы необходимо повторить и выучить

1. Определение параллелограмма. Свойство сторон и углов параллелограмма.
2. Признак параллелограмма.
3. Определение прямоугольника. Свойства диагоналей прямоугольника.
4. Определение ромба. Свойства диагоналей ромба.
5. Определение квадрата. Свойства квадрата. 6. Определение трапеции. Определение средней линии трапеции. Свойство средней линии трапеции.
7. Формулы для вычисления площади:

1) прямоугольника (через сторону; через диагональ); 2) квадрата (через сторону; через диагональ) ; 3) параллелограмма (через высоту; через угол);
4) ромба (через угол; через диагонали; через высоту); 5) выпуклого четырехугольника; 6) правильного треугольника;
7) правильного шестиугольника; 8) правильного многоугольника; 9) трапеции;

8. Площадь описанного многоугольника;
9. Правильный четырехугольник. Формулы для вычисления:

1) длины диагонали; 2) площади (через сторону; через диагональ); 3) радиуса вписанной окружности; 4) радиуса описанной окружности.

10. Правильный шестиугольник. Формулы для вычисления:

1) большой диагонали; 2) малой диагонали; 3) радиуса вписанной окружности; 4) радиуса описанной окружности;
5) углов; 6) площади.

Вопросы к теоретической части зачёта по теме «Четырёхугольники»
1 вариант

№1. Определение параллелограмма.

№2. Свойство сторон и углов параллелограмма

№3. Определение ромба. Свойства диагоналей ромба

№4. Определение трапеции. Определение средней линии трапеции. Свойство средней линии трапеции

№5. Формулы для вычисления площади прямоугольника (через сторону; через диагональ);

№6. Формулы для вычисления площади ромба (через угол; через диагонали; через высоту);

№7. Формула для вычисления площади правильного шестиугольника

№8. Правильный четырехугольник. Формулы для вычисления:
А) длины диагонали;
Б) площади (через сторону; через диагональ);
В) радиуса вписанной окружности;
Г) радиуса описанной окружности

ЗАДАЧИ С ПОДСКАЗКАМИ

Активное повторение
Групповая и домашняя работа

Трапеция — это четырехугольник, две противоположные стороны (основания) которого параллельны, а две другие (боковые стороны) непараллельны.

28. В прямоугольной трапеции основания равны 4 и 9, а меньшая из боковых сторон равна 12. Найти вторую боковую сторону.

Ответ: рис. 1.40 (теорема Пифагора).

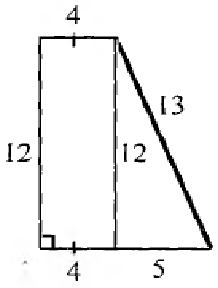


Рис. 1.40

В равнобедренной трапеции высота, проведенная из вершины острого угла, делит большее основание на отрезки, один из которых равен полусумме оснований, а другой — полуразности.

29. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 6$, $AD = 8$ и высотой BK. Найти AK и KD.

Ответ: рис. 1.41.

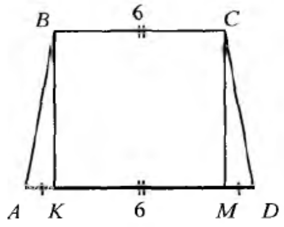


Рис. 1.41

В равнобедренной трапеции углы, образованные диагоналями трапеции с ее основаниями, равны между собой.

30. В равнобедренной трапеции угол между диагоналями, лежащими против боковой стороны, равен 50°. Найти угол, который образует диагональ с основанием трапеции.

Ответ: рис. 1.42 (углы в равнобедренной трапеции).

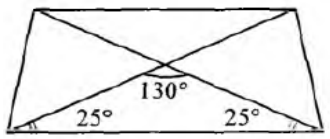
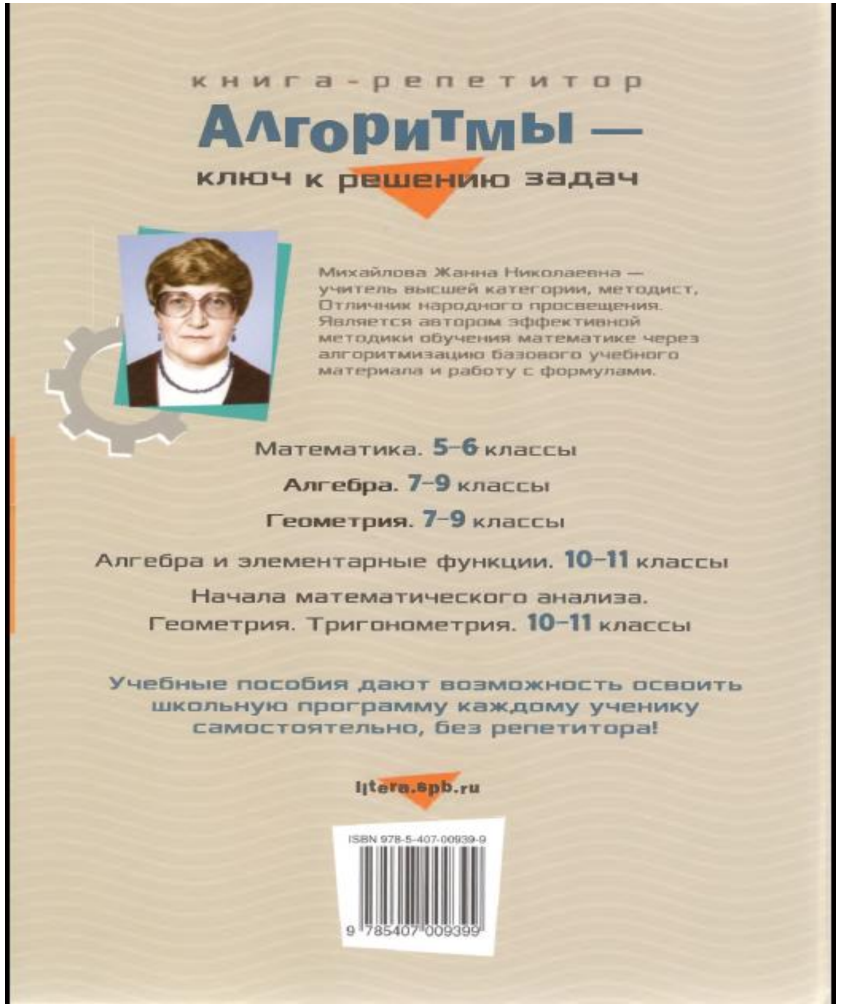


Рис. 1.42

Активное повторение



Рецензенты:
Е. Ю. Лукичева — кандидат педагогических наук,
заведующая кафедрой математики и информатики СПб АППО
А. С. Фадеева — учитель математики школы № 332
Санкт-Петербурга

Научный редактор *Е. Ю. Лукичева*

Михайлова Ж. Н.

М69 Алгоритмы — ключ к решению задач: Геометрия. 7—9 классы. — СПб.: Издательский Дом «Литера», 2019. — 544 с.: ил. — (Серия «Средняя школа»).

ISBN 978-5-407-00939-9

Книга содержит определения, формулировки теорем, формулы, алгоритмы решения типовых задач по геометрии, предлагавшихся на ОГЭ, с образцами оформления решенных задач.

Предназначена для учащихся общеобразовательных школ, технических училищ и для обучения на дому.

Ромб

Определение. ***Ромбом*** называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма.

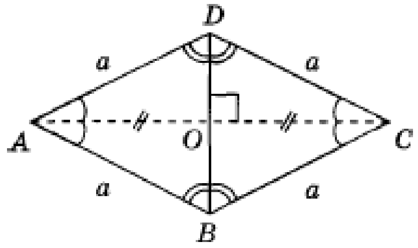


Рис. 341

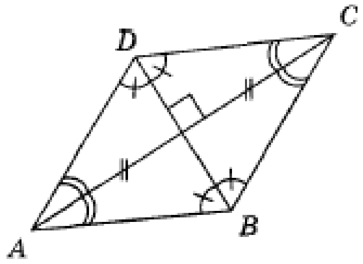


Рис. 342

Полезный совет

Ромб удобно строить так:

1. Проведите две прямые под прямым углом.

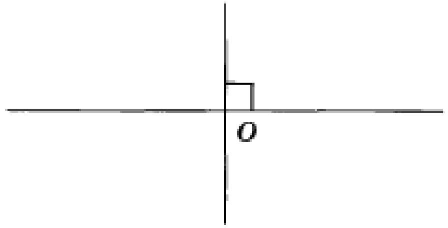


Рис. 343

2. Отложите от точки O на этих прямых половины диагоналей.

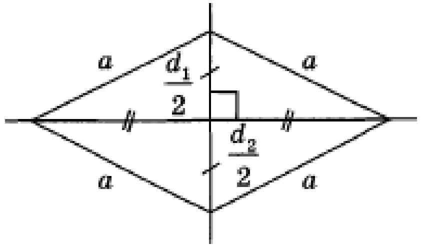


Рис. 344

3. Соедините концы отрезков — получите ромб.

Свойства ромба

1. $AB = BC = CD = AD = a$; $\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$.

2. ***Диагонали ромба*** — биссектрисы его противоположных углов: AC — биссектриса $\angle A$ и $\angle C$; BD — биссектриса $\angle B$ и $\angle D$.

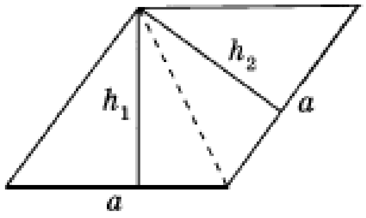
3. Теорема 1. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом: $AC \perp BD$.

4. Теорема 2. Диагональ ромба делит ромб на два равных треугольника.

5.
$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$$
$$P_{\text{ромба}} = 4a$$

Площадь ромба

I. Площадь ромба равна произведению стороны на высоту, проведенную к этой стороне.



$$S_{\text{ромба}} = h \cdot a$$
$$h = h_1 = h_2$$

Рис. 345

Алгоритм 60 Решение задач на ромб

1. Сделайте рисунок с числовыми данными.
2. Напишите, что *дано* и что *найти*.
3. Запишите нужную формулу для решения или свойство углов или диагоналей.
4. Найдите неизвестную, входящую в формулу, и подставьте ее в п. 3.
5. Запишите ответ.

Замечание. Все алгоритмы решения задач на четырехугольники одинаковы.

Задача 1 Сторона ромба равна 12. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до этой стороны равно 1. Найдите площадь ромба.

Дано:
$ABCD$ — ромб
$AB = BC = DC = AD = 12$
$OK \perp AB$; $OK = 1$

Найти:
S_{ABCD}

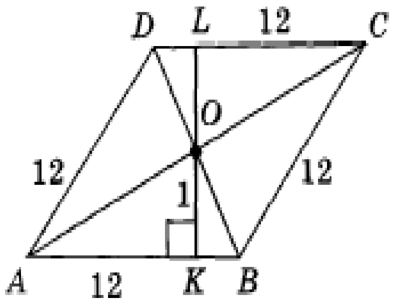


Рис. 346

Решение:
1) $S_{ромба} = a \cdot h$; $S = 12 \cdot h$
2) Найдем h: $OK \perp AB$ (расстояние от точки до прямой).
$h = 2\,OK = 2 \cdot 1 = 2$; докажем это:
$\triangle AOB = \triangle DOC$ (по двум сторонам и углу между ними), тогда в равных треугольниках и высоты, проведенные к равным сторонам из одной вершины, равны.
$OK = OL$; $LK = h$ — высота ромба.
3) $S_{ABCD} = LK \cdot AB = 12 \cdot 2 = 24$ (кв. ед.).

Ответ: $S_{ABCD} = 24$ кв. ед.

Замечание. Точка пересечения диагоналей ромба равноудалена от сторон ромба.

Задача 5 Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 17, а одна из диагоналей ромба равна 68. Найдите углы ромба.

Дано:
$ABCD$ — ромб
$OK = 17$
$AC = 68$

Найти:
$\angle A$, $\angle B$

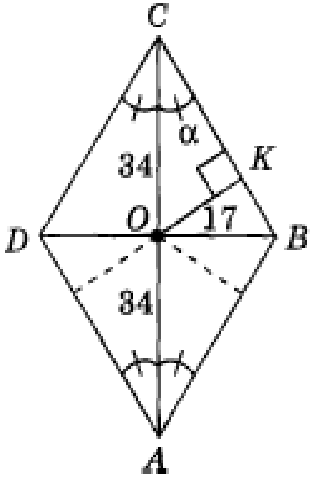


Рис. 351

Решение:

1) $\triangle CKO$: $\angle K = 90°$; $CO = 68 : 2 = 34$ (диагонали делятся точкой O пополам).

$\frac{OK}{CO} = \sin\alpha$; $\sin\alpha = \frac{17}{34} = \frac{1}{2}$; $\alpha = 30°$, тогда $\angle C = 2\angle\alpha = 2 \cdot 30° = 60°$

(AC — биссектриса ромба).

$\angle A = \angle C = 60°$ (противоположные углы ромба).

2) $\angle B + \angle D = 360° - 2\angle C = 360° - 2 \cdot 60° = 240°$

$\angle B = \angle D = 240° : 2 = 120°$

Ответ: $\angle A = 60°$; $\angle B = 120°$.

Попробуй - ка не реши

1. Сторона ромба равна 8 см, а один из углов равен 150°. Найдите площадь ромба.

Ответ: $S = 32$ см^2.

2. Диагональ ромба образует с его стороной угол 35°. Найдите больший угол ромба.

Ответ: больший угол равен 110°.

3. Найдите площадь ромба, если его сторона равна 10, а диагонали относятся как 3 : 4.

Ответ: $S = 96$ кв. ед.

4. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 24$ и $CH = 2$. Найдите высоту ромба.

Ответ: $AH = 10$.

5. Большее основание трапеции имеет длину 24. Найти длину меньшего основания, если расстояние между серединами ее диагоналей равно 4.

11. В трапеции с площадью 161 высота равна 7, а разность длин оснований равна 11. Найти длину большего основания.

12. Длины оснований трапеции равны 4 и 10, одна из боковых сторон составляет с меньшим основанием угол $150°$. Найти длину этой стороны, если площадь трапеции равна 21.

13. Через вершины данного четырехугольника, не являющегося параллелограммом, проведены прямые, параллельные его диагоналям. Найти отношение площади четырехугольника, образованного этими прямыми, к площади данного четырехугольника.

14. Периметр параллелограмма равен 90, а его острый угол равен $60°$. Диагональ делит тупой угол на части в отношении 1:3. Найти длины сторон параллелограмма.

15. Трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD вписана в окружность. Известно, что диагональ BD перпендикулярна боковой стороне AB, $AB = 6$, $BD = 8$. Найти площадь круга, ограниченного этой окружностью.

16. Найти площадь трапеции $ABCD$, если длины ее оснований относятся как 5:3, а площадь $\triangle ADM$ равна 50, где M — точка пересечения прямых AB и CD.

Зачёт №4 Многоугольники, 1 вариант

№6.

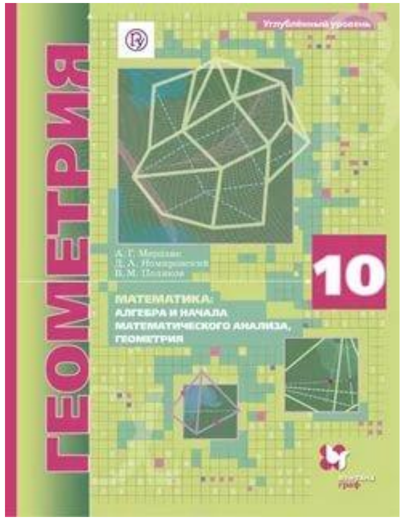
Периметр параллелограмма равен 90 см, острый угол равен 60◦. Диагональ параллелограмма делит его тупой угол на части в отношении 1: 3. Найти длину наибольшей стороны параллелограмма.

№7.

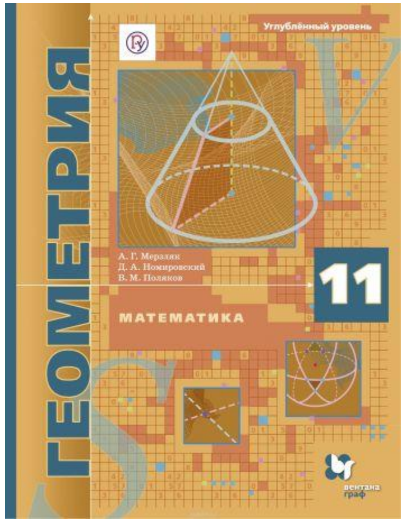
Меньшая сторона и меньшая диагональ параллелограмма равны 13 см и 15 см соответственно. Найти площадь параллелограмма, если его высота, опущенная на большую сторону, равна 12 см.

№8.

Длина боковой стороны равнобедренной трапеции равна ее средней линии, а периметр трапеции равен 24 см. Найти длину боковой стороны.



Текущее повторение



Упражнения для повторения

14.53. Через середину диагонали AC прямоугольника $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD прямоугольника в точках M и K соответственно, $AC = 15$ см, $AK = 4$ см, $KD = 8$ см. Найдите площадь четырёхугольника $AMCK$.

14.54. Две стороны треугольника равны 15 см и 25 см, а медиана, проведённая к третьей стороне, — 16 см. Найдите третью сторону треугольника.

Модуль «Геометрия»

Треугольник

Работа 127

1. В треугольнике ABC угол C равен 16°, стороны AC и BC равны. Найдите угол A. Ответ дайте в градусах.

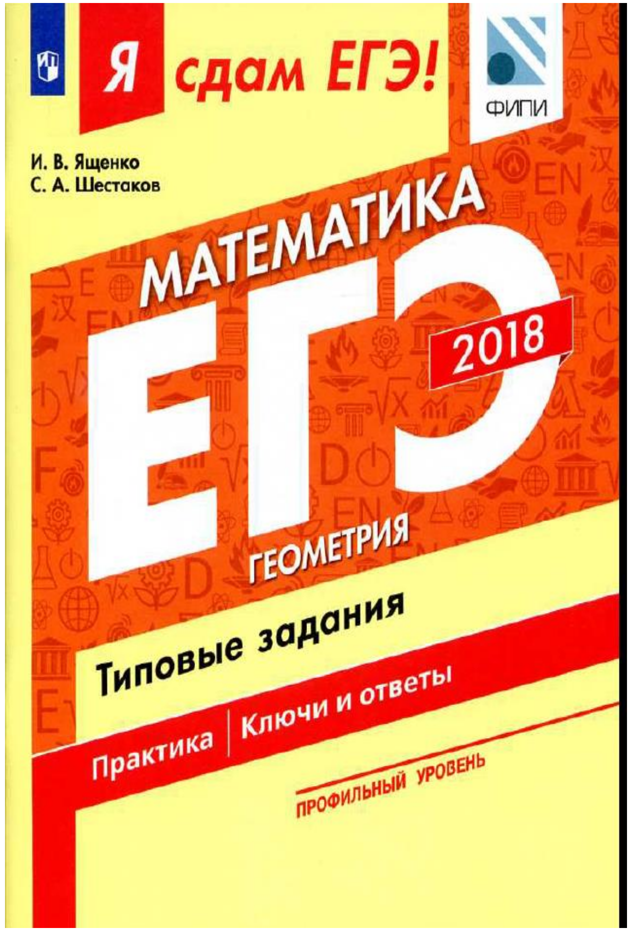
Ответ:

2. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны, угол C равен 120°. Найдите внешний угол CBD. Ответ дайте в градусах.

Ответ:

3. Один из внешних углов треугольника равен 90°. Углы треугольника, не смежные с данным внешним углом, относятся как $1:4$. Найдите наибольший из них. Ответ дайте в градусах.

Ответ:



Повторение. Ключевые задачи

Подготовка к ЕГЭ. Базовый уровень
Демонстрационный материал по теме №5
«Касательная к окружности. Вписанная окружность»

1. Задание 15 № 53315

Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен . Найдите сторону этого треугольника.

Ответ: 25

2. Задание 15 № 27934

Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, основание равно 6. Найдите радиус вписанной окружности.

Ответ: 1,5

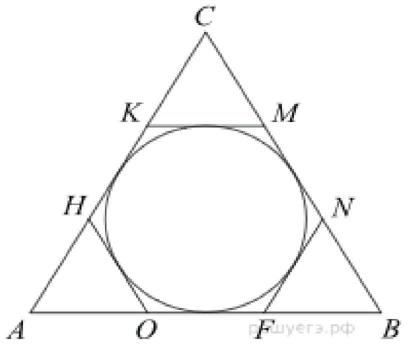
3. Задание 15 № 27916

Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен .

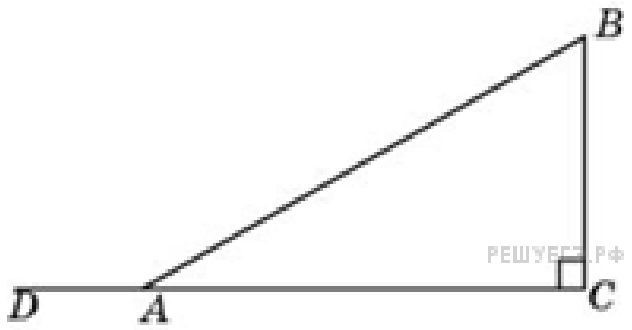
Ответ: 2

Подготовка к ЕГЭ. Базовый уровень
Домашняя работа №7 по теме
«Касательная к окружности. Вписанная окружность»

1. К окружности, вписанной в треугольник ABC, проведены три касательные. Периметры отсеченных треугольников равны 6, 8, 10. Найдите периметр данного треугольника.



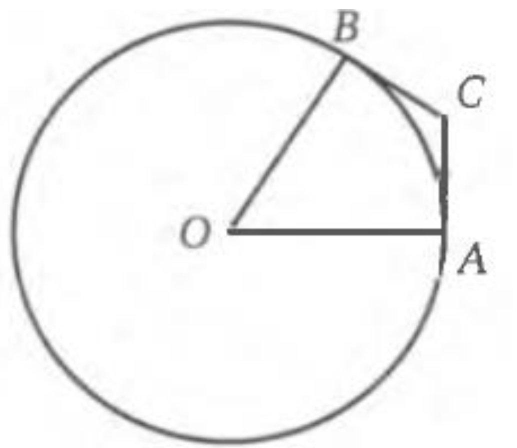
2. В треугольнике угол C равен 90°, угол A равен 30° Найдите тангенс угла BAD. В ответе укажите $\sqrt{3}\cdot \operatorname{tg} BAD$.



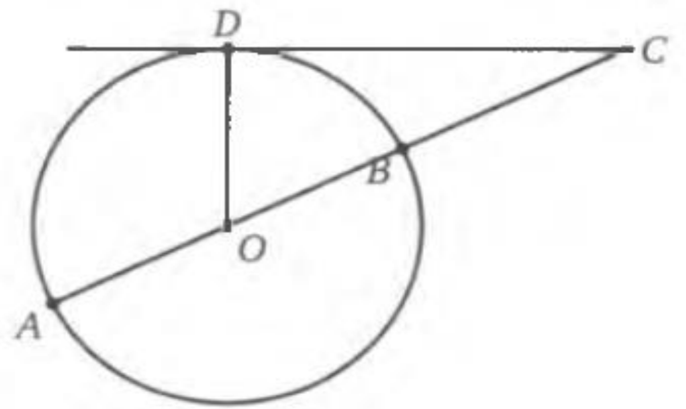
3. Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен $10\sqrt{3}$.

Подготовка к ЕГЭ. Базовый уровень
Проверочная работа №5 по теме
«Касательная к окружности. Вписанная окружность»
1 вариант

1. К окружности с центром O проведены касательные CA и CB. Найдите $\angle ACB$, если $\angle AOB = 57°$. Ответ дайте в градусах.



2. Из точки C к окружности с центром O проведены касательная CD и секущая CBA, проходящая через диаметр AB. Найдите $\angle DOA$, если $\angle BCD = 26°$. Ответ дайте в градусах.

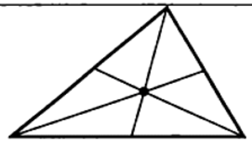


Подготовка к ЕГЭ

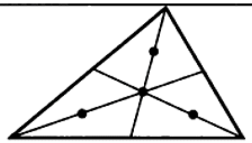
Домашняя работа: Задачи ЕГЭ_ №16. Свойства медианы

1. Повторите свойства медиан треугольника, разберите примеры решения задач

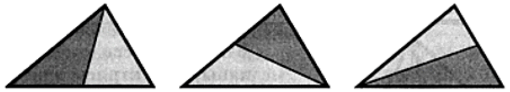
СВОЙСТВА МЕДИАН



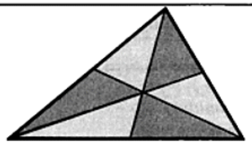
Три медианы пересекаются *в одной точке*, которая всегда находится *внутри* треугольника (центр масс треугольника).



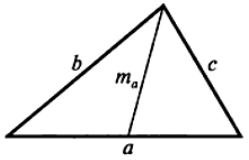
Каждая медиана точкой пересечения медиан делится в отношении 2 : 1, считая от вершины.



Каждая медиана делит треугольник на 2 равновеликих треугольника (одинаковой площади).



Три медианы делят треугольник на 6 равновеликих треугольников.

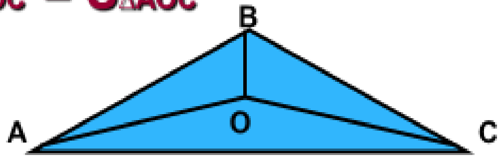


Длина медианы

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Свойства медиан треугольника

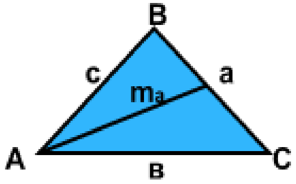
3. Если О – точка пересечения медиан, то $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta BOC} = S_{\Delta AOC}$



4. Медиана на сторону **a** вычисляется по формулам:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos A}$$

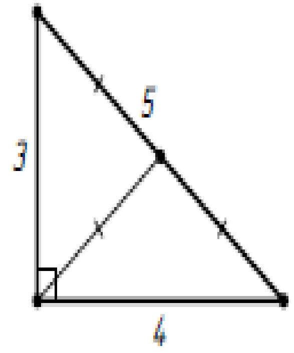


Примеры решения задач:

№1. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами 8 и 9. Найдите стороны треугольника.

Ответ: 3; 4; 5.

Решение. Обозначим через a и b ($a < b$) катеты треугольника. Поскольку медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, а две стороны треугольника с периметром 8 соответственно равны двум сторонам треугольника с периметром 9, разность периметров равна разности третьих сторон. Значит, $b - a = 9 - 8 = 1$. Гипотенуза данного прямоугольного треугольника равна удвоенной медиане, т. е. сумме двух сторон треугольника с периметром 8, поэтому гипотенуза равна $8 - a$.



По теореме Пифагора

$$a^2 + b^2 = (8 - a)^2.$$

Из системы

$$\begin{cases} b - a = 1, \\ a^2 + b^2 = (8 - a)^2 \end{cases}$$

находим, что $a = 3$, $b = 4$.

№2. В треугольнике ABC к стороне AC проведены высота BK и медиана MB, причём AM =BM. Найдите косинус угла KBM, если AB=1, BC =2.

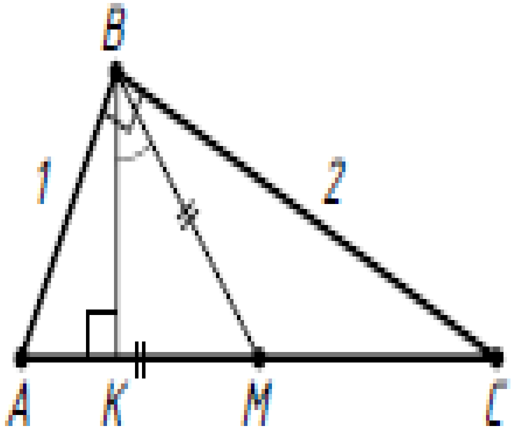
Ответ: $\frac{4}{5}$.

Решение. Поскольку $BM = AM = MC$, то треугольник ABC прямоугольный. Поэтому

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5}, \quad AC \cdot BK = AB \cdot BC,$$

$$BK = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad BM = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\cos\angle KBM = \frac{BK}{BM} = \frac{4}{5}.$$



2. Решите задачи самостоятельно:

№8. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведены высота CD и медиана CE. Площади треугольников ABC и CDE равны соответственно 10 и 3. Найдите AB.

№9. Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60°. Найдите основания и меньшую боковую сторону трапеции.

№10. Медианы AM и BN треугольника ABC перпендикулярны и пересекаются в точке P.
а) Докажите, что CP = AB.
б) Найдите площадь треугольника ABC, если AC = 3 и BC = 4.

№11. В треугольнике две стороны равны 11 и 23, а медиана, проведённая к третьей, равна 10. Найдите третью сторону.

ГЛАВА 2. Достаточный уровень

§ 2.1. Методы, алгоритмы, приемы и демонстрационные задачи

Решая геометрическую задачу, всегда можно найти подсказки в самом ее условии. Так, например, если в условии говорится о пересечении двух медиан, то почти наверняка придется использовать следующее свойство точки их пересечения: все три медианы треугольника пересекаются в одной точке; точка пересечения медиан треугольника делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины (рис. 2.1).

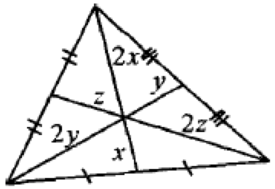


Рис. 2.1

А если к тому же сказано, что эти медианы пересекаются под прямым углом, то будет разумным провести третью медиану: ее часть окажется медианой прямоугольного треугольника, которая обладает особенными свойствами (см. § 1.1).

Полезно также знать **формулу вычисления медианы** (рис. 2.2):

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

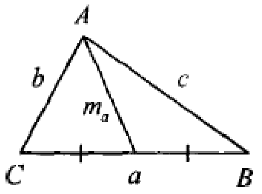


Рис. 2.2

1. Длины двух сторон треугольника равны 6 и 8. Медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найти длину третьей стороны.

Решение. Пусть AK и CM — медианы, O — точка их пересечения (рис. 2.3), $BC=6$, $AB=8$, $AC=x$. По условию $AK\perp CM$. Следовательно, $\triangle AOC$ — прямоугольный. Проведем медиану BD. Так как медианы любого треугольника пересекают-

ГЛАВА 3. Повышенный уровень

§ 3.1. Методы, алгоритмы, приемы и демонстрационные задачи

Для нахождения параметров прямоугольного треугольника в простых задачах не стоит применять ни теорему синусов, ни теорему косинусов, поскольку здесь по любой паре — острый угол и сторона — можно определить все необходимые метрические характеристики треугольника с помощью тригонометрических функций синус, косинус, тангенс и котангенс. Однако рассмотрим комбинированную задачу на прямоугольный треугольник, в решении которой все-таки придется использовать теорему косинусов, поскольку искомый отрезок будет служить стороной непрямоугольного треугольника с известным углом и длинами сторон, его образующих.

1. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найти расстояние между центром вписанной в этот треугольник окружности и точкой пересечения его медиан.

Решение. Пусть $\angle A=90^\circ$, $\angle B=\alpha$, AD — медиана $\triangle ABC$, O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности, M — точка пересечения медиан (рис. 3.1).

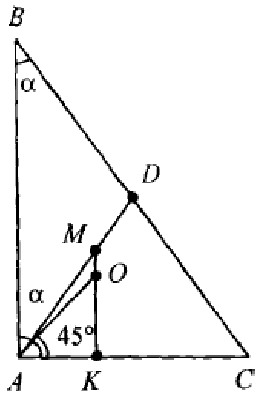
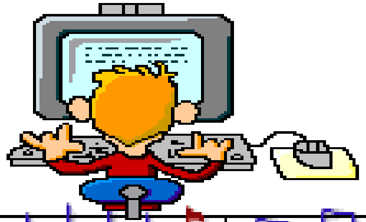


Рис. 3.1

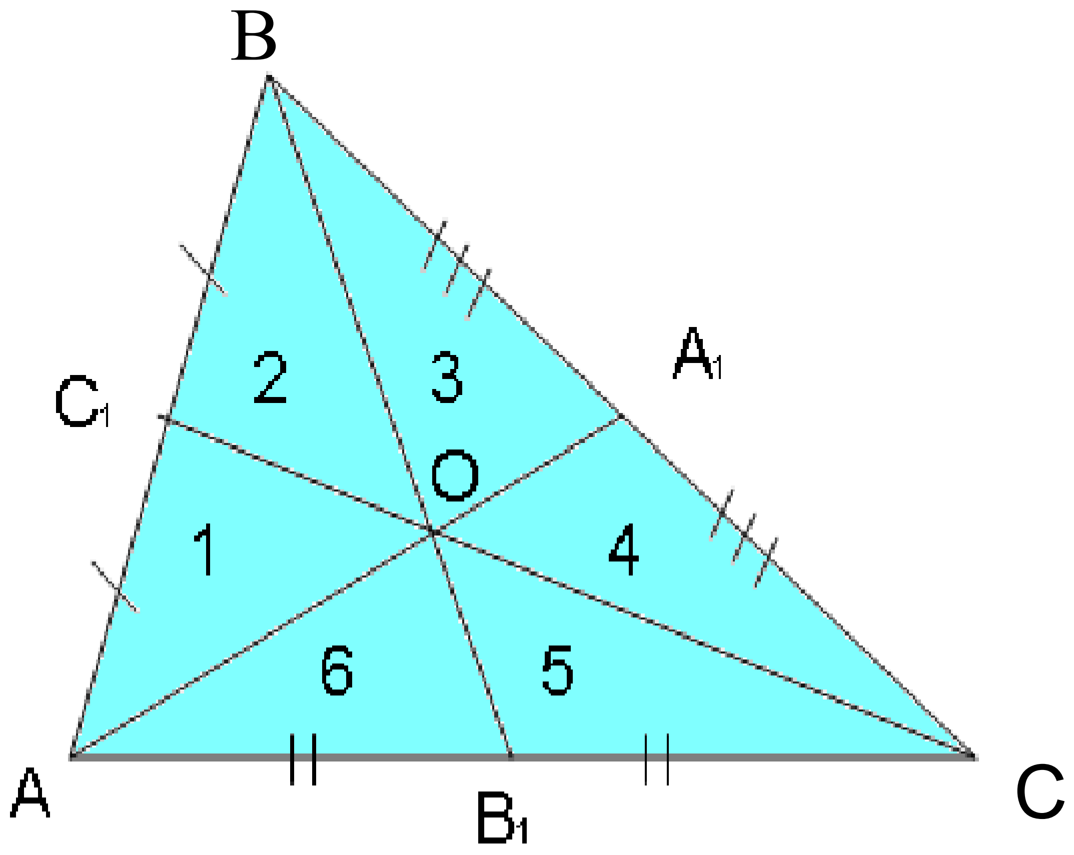
Содержание


16
Под редакцией И. В. Ященко
Р. К. Гордин
ЕГЭ 2019
МАТЕМАТИКА
ЕГЭ 2019
16 Профильный
ГЕОМЕТРИЯ. ПЛАНИМЕТРИЯ
ФГОС
МАТЕМАТИКА



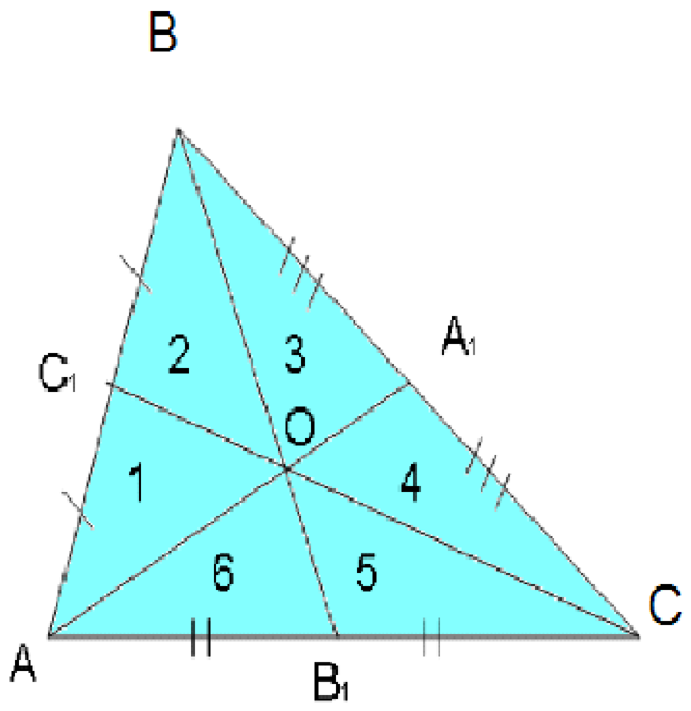
Фрагмент урока по теме «Удвоение медианы»

Что вы знаете о медианах треугольника?



Что вы знаете о медианах треугольника?

- Медиана треугольника – отрезок, соединяющий его вершину с серединой противолежащей стороны
- Медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины
- Медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника
- Медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников*



Метод решения: Удвоение медианы

Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

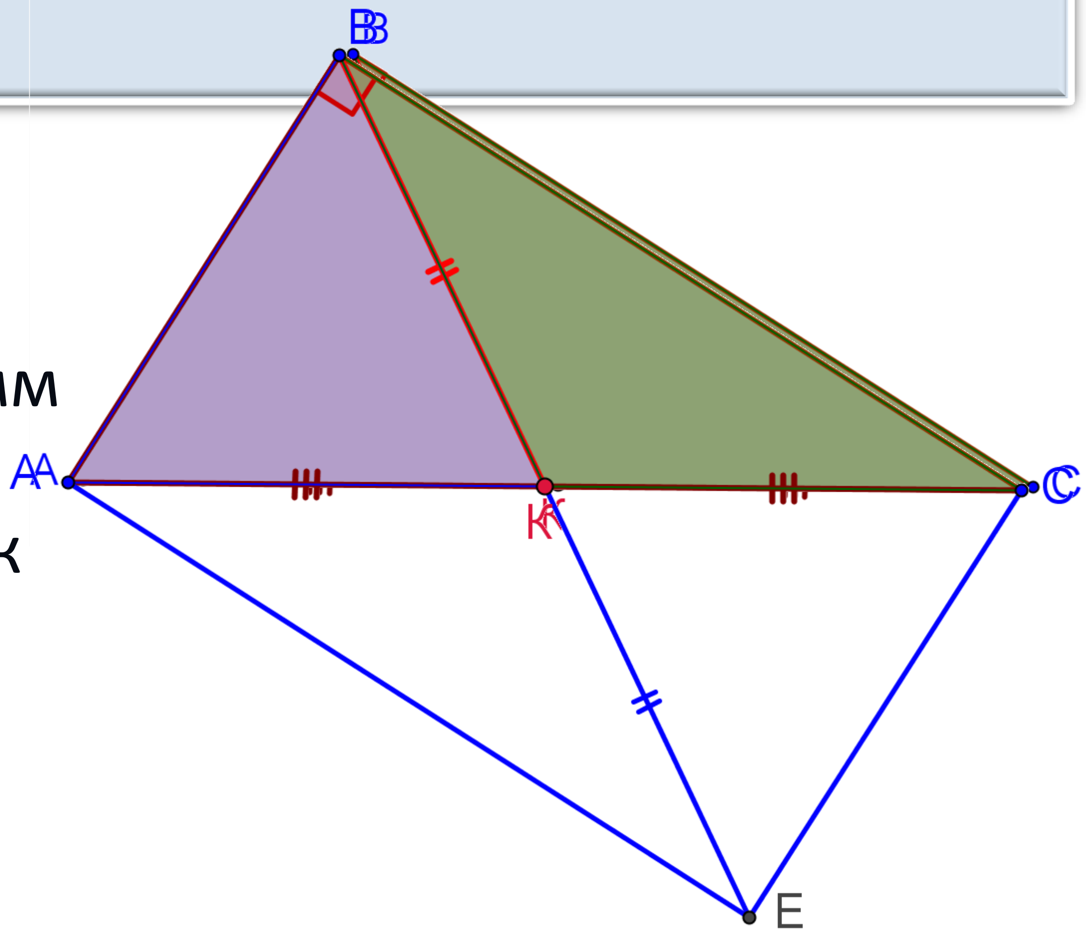
Удвоим медиану ВК, продлив ее за точку К

АВСЕ – параллелограмм (по признаку)

АВСЕ – прямоугольник (т.к. $\angle B = 90°$)

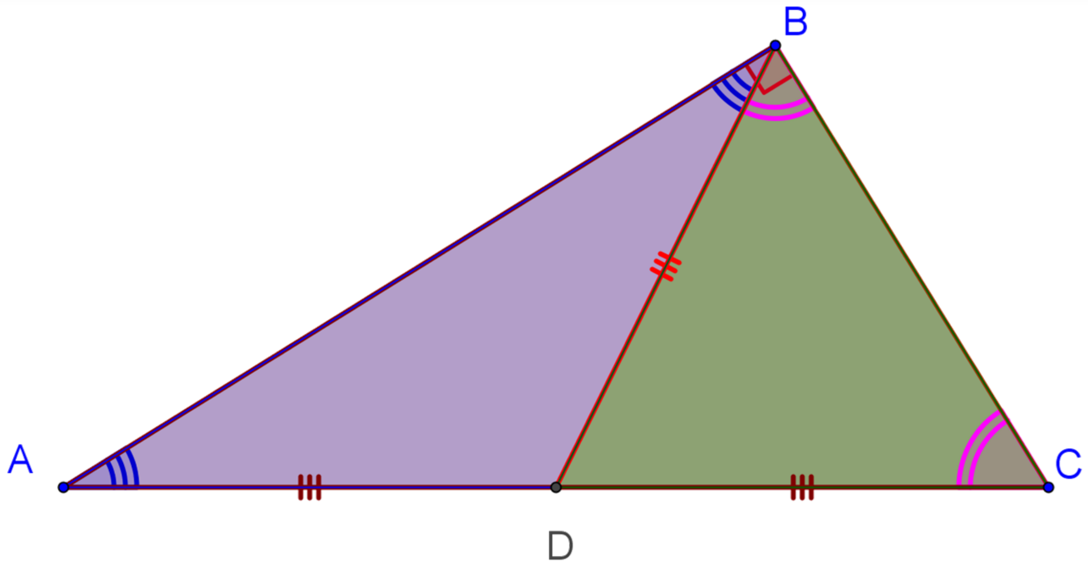
$\Rightarrow$ ВК = АС = КС = КЕ

$\Rightarrow$ ВК = ½ АС

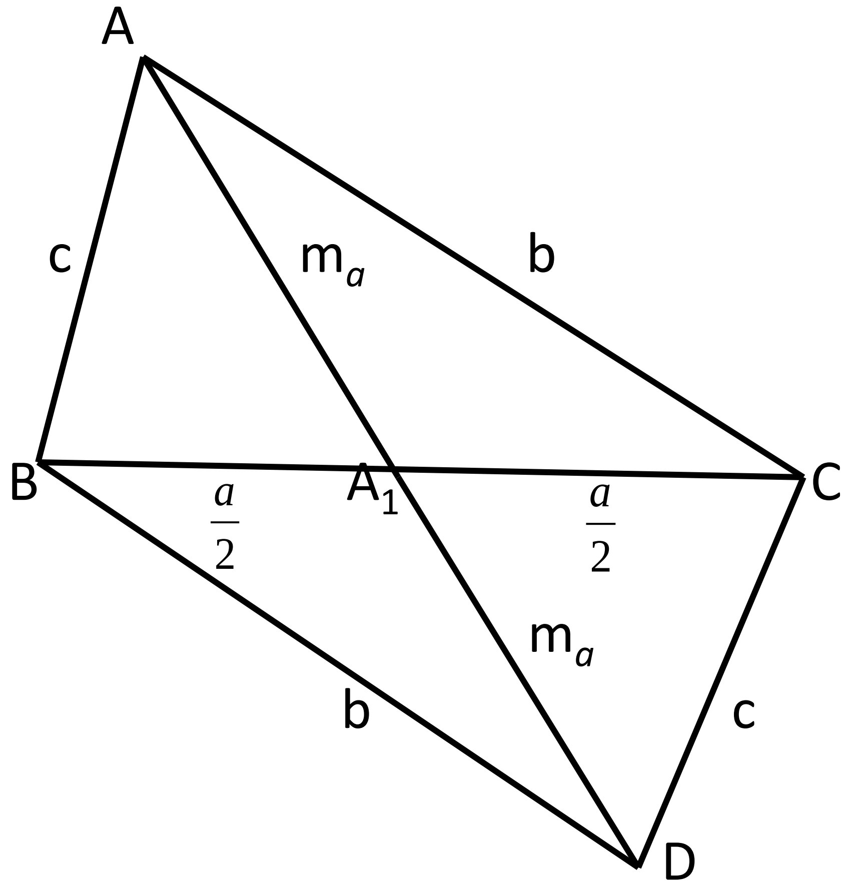


Следствие из свойства медианы к гипотенузе. Ключевая задача

Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, делит треугольник на два равнобедренных треугольника, основаниями которых являются катеты данного треугольника



Длина медианы треугольника



Задача 1.

Дан треугольник ABC   со сторонами   C = *a*, AC = *b*, AB = *c*. Найти медиану, проведенную к стороне BC

Свойство параллелограмма: «Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна удвоенной сумме квадратов его сторон»

Применяем формулу для вычисления медианы

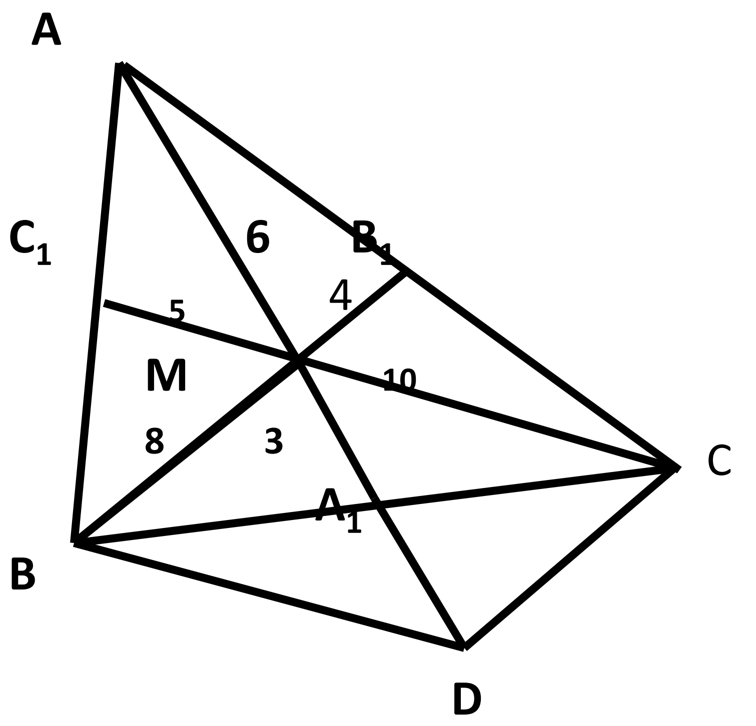
Задача 2.

Дан треугольник ABC со сторонами BC = 9,

AC = 7, AB = 8. Найти медиану, проведенную к стороне AB

Решение задач

Задача 3.
Медианы треугольника равны 9, 12 и 15. Найдите площадь треугольника.



Δ BMD: BM =8, MD = 6, BD = 10

S_{BMD}=24, S_{BMA_1} = 12, S_{ABC} = 72

Задачи на доказательство и вычисление

2.17.1. Медиана AM треугольника ABC продолжена за точку M на расстояние $MD = AM$.

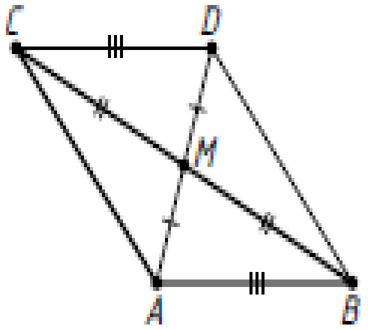
а) Докажите, что $CD = AB$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 10$, $AC = 12$, $AM = 5$.

Сравниваем решения

Ответ: 48.

Решение. а) Диагонали AD и BC четырёхугольника $ABDC$ точкой пересечения делятся пополам, значит, $ABDC$ — параллелограмм. Противоположные стороны параллелограмма равны, поэтому $CD = AB$.

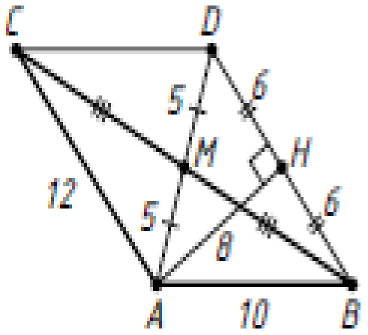


б) Поскольку $AD = 10 = AB$, треугольник ABD равнобедренный. Его высота AH является медианой, поэтому

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{100 - 36} = 8.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} BD \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48.$$

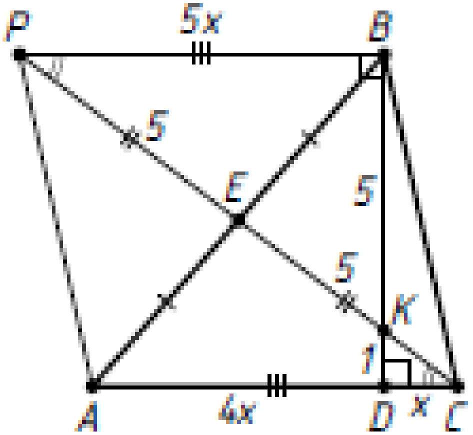


Продолжаем решать задачи, используя метод удвоения медианы

2.18.1. В треугольнике ABC высота BD равна 6, медиана CE равна 5, расстояние от точки пересечения отрезков BD и CE до стороны AC равно 1.

а) Докажите, что $CD : AD = 1 : 4$.

б) Найдите площадь треугольника AEC.



Решение. а) На продолжении медианы CE за точку E отложим отрезок $EP = CE$. Тогда $ACBP$ — параллелограмм. Поэтому $BP = AC$ и $BP \parallel AC$.

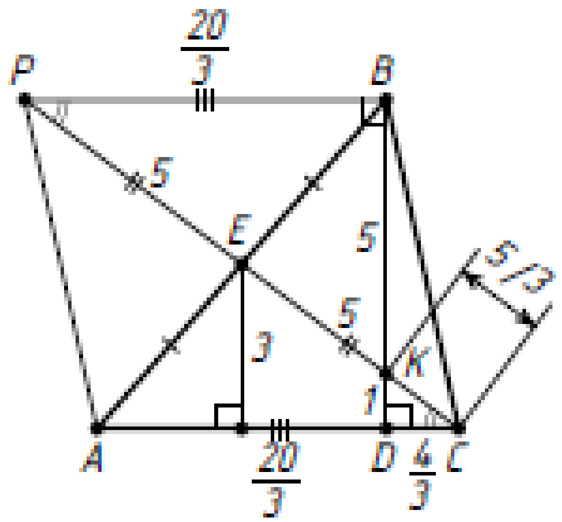
Пусть K — точка пересечения отрезков BD и CE. Из подобия треугольников PKB и CKD следует, что

$$DC = \frac{1}{5}BP = \frac{1}{5}AC.$$

Значит, $CD : AD = 1 : 4$.

Ответ на вопрос б)

б) Из подобия треугольников PKB и CKD также следует, что



$CK = \frac{1}{5}PK$, поэтому

$$CK = \frac{1}{6}CP = \frac{1}{6}\cdot 10 = \frac{5}{3}.$$

Из прямоугольного треугольника KDC находим, что

$$DC = \sqrt{KC^2 - KD^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1} = \frac{4}{3}.$$

Поэтому $AC = 5DC = \frac{20}{3}$, а так как высота треугольника AEC, опущенная на основание AC, вдвое меньше высоты BD треугольника ABC, опущенной на то же основание, то

$$S_{\Delta AEC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}BD\cdot AC = \frac{1}{4}\cdot 6\cdot\frac{20}{3} = 10.$$

Решаем задачи ЕГЭ, используя метод удвоения медианы

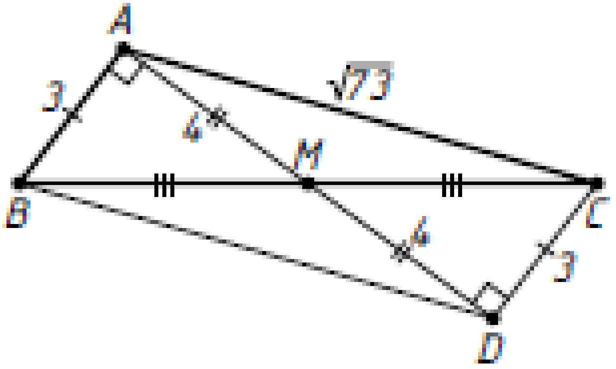
2.19.1. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 3$, $AC = \sqrt{73}$ и медианой $AM = 4$.

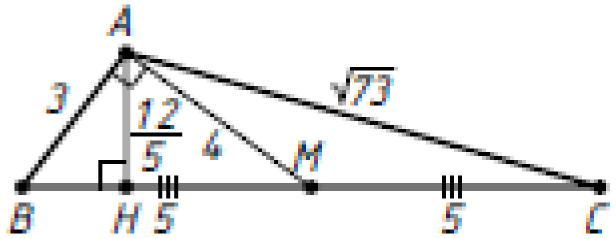
а) Докажите, что медиана AM перпендикулярна стороне AB.

б) Найдите высоту треугольника ABC, проведённую из вершины A.

Анализируем решение, сравниваем способы решения

Решение. а) На продолжении медианы AM за точку M отложим отрезок $MD = AM = 4$. Тогда $ABDC$ — параллелограмм. Поэтому $CD = AB = 3$ и $CD \parallel AB$. Треугольник ACD прямоугольный с прямым углом при вершине D, так как $AC^2 = 73 = 64 + 9 = AD^2 + CD^2$. Следовательно, $\angle BAM = \angle ADC = 90°$.





Решение вопроса б)

б) Пусть AH — высота треугольника ABC. Из прямоугольного треугольника AMB находим, что $BM = 5$. Следовательно,

$$AH = \frac{AB \cdot AM}{BM} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}.$$

Задачи для домашней работы

2.20.1. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB.

а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2}DK$.

б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 6$, $BC = 10$ и $\angle ACB = 30°$.

Ответ: 7.

2.21.1. В трапеции $ABCD$ основания BC и AD относятся как $1:2$. Пусть K — середина диагонали AC. Прямая DK пересекает сторону AB в точке L.

а) Докажите, что $AL = 2BL$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $BCKL$, если известно, что площадь трапеции $ABCD$ равна 9.

Ответ: 2.

Тот, кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества .

Роджер Бэкон

Желаю удачи в обучении геометрии !