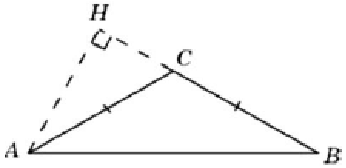
Контрольно измерительные материалы по математике (профиль)

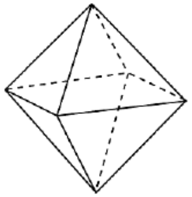
Вариант 20 2024

1 В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 15$, высота AH равна 9. Найдите $\cos BAC$.



2 Найдите длину вектора $\vec{a}(-24;\ 10)$.

3 Во сколько раз увеличится площадь поверхности октаэдра, если все его ребра увеличить в 1,5 раза?



4 Вероятность того, что новый тостер прослужит больше года, равна 0,9. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,82. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

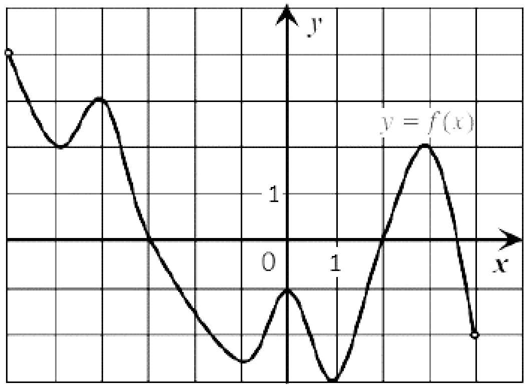
5 Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет чётных чисел, а нечётные числа 1, 3 и 5 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 3 и 5 очков. Какова вероятность того, что бросили первый кубик.

6 Решите уравнение $\sqrt[3]{x-4} = 2$

7 Найдите $\sin(a-\pi) - 9\cos\left(\frac{3\pi}{2} + a\right)$, если $\sin a = 0{,}8$

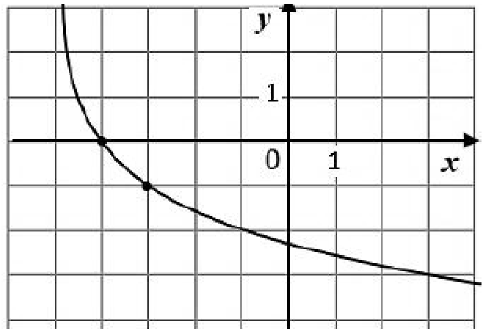
9 По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$, где ε — ЭДС источника (в вольтах), $r = 3$ Ом — его внутреннее сопротивление, R — сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять 20% от силы тока короткого замыкания $I_{кз} = \frac{\varepsilon}{r}$? Ответ выразите в омах.

8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 4)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$.



10 Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 16 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолете со скоростью 496 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

11 На рисунке изображен график функции $f(x) = \log_a(x+b)$. Найдите $f(11)$.



12 Найдите наименьшее значение функции

$$y = 4x - 4\,\mathrm{tg}\,x + 12$$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

Часть 2

13 а) Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x}{\log_4(\cos x)} = 0$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

14 Дан правильный треугольник ABC. Точка D лежит вне плоскости ABC, $\cos\angle BAD = \cos\angle DAC = 0{,}3$.

а) Докажите, что прямые AD и BC перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AD и BC, если $AC = 6$.

15 Решите неравенство

$$3^{|x|} - 8 - \frac{3^{|x|} + 9}{9^{|x|} - 4 \cdot 3^{|x|} + 3} \leq \frac{5}{3^{|x|} - 1}$$

16 В июле 2026 года планируется взять кредит на три года. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— платежи в 2027 и в 2028 годах должны быть по 500 тыс. рублей;

— к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита равна 1235,2 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

17 Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Диагональ BD разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD.

а) Докажите, что луч AC— биссектриса угла BAD.

б) Найдите CD, если известны диагонали трапеции: $AC = 15$ и $BD = 8{,}5$.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4ax + 6a - a^2 = 0$$

имеет не менее трех корней.

19 У ювелира есть 47 полудрагоценных камней, масса каждого из которых — целое число граммов, не меньшее 100 (некоторые камни могут иметь равную массу). Эти камни распределили по трем кучам: в первой куче n_1 камней, во второй — n_2 камней, в третьей — n_3 камней, причем $n_1 < n_2 < n_3$. Суммарная масса (в граммах) камней в первой куче равна S_1, во второй — S_2, а в третьей — S_3.

а) Может ли выполняться неравенство $S_1 > S_2 > S_3$?

б) Может ли выполняться неравенство $S_1 > S_2 > S_3$, если масса любого камня не превосходит 105 граммов?

в) Известно, что масса любого камня не превосходит k граммов. Найдите наименьшее целое значение k, для которого может выполняться неравенство $S_1 > S_2 > S_3$.