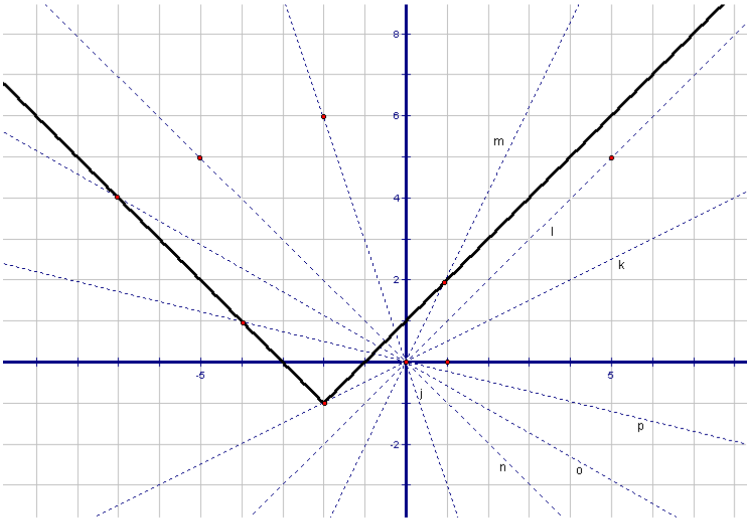
Уравнения с параметром

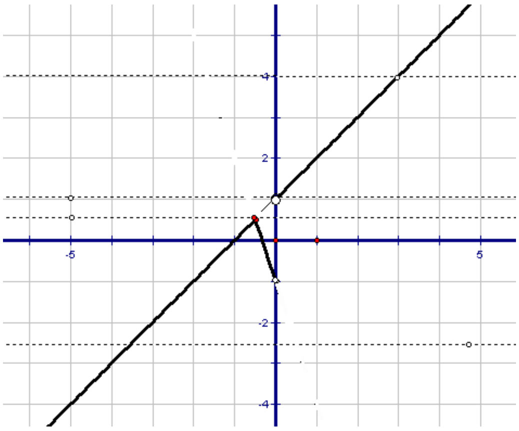
Оглавление

1.РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Пример 1. Сколько решений в зависимости от параметра ***a*** имеет уравнение $|x+2| = ax+1$.

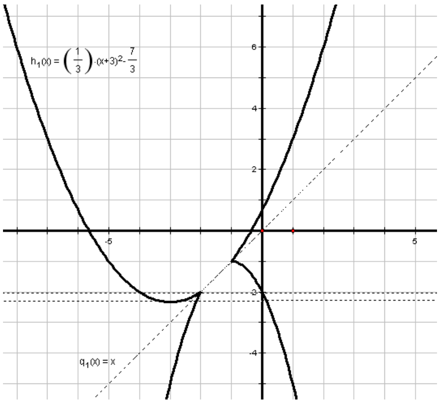


(рис для 1 способа)

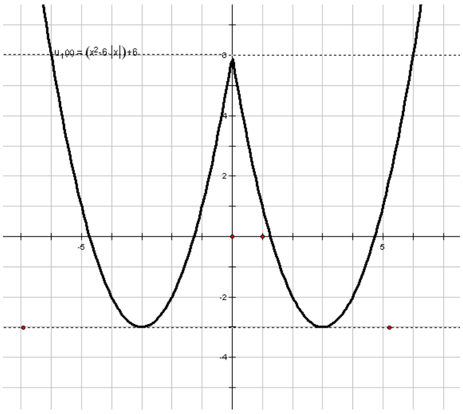


(рис для 2 способа)

Пример 2. Найдите все значения параметра ***a*,** при которых уравнение $x^2+4x-|x-a|+2-a=0$ имеет четыре решения.



(рис для примера 2)



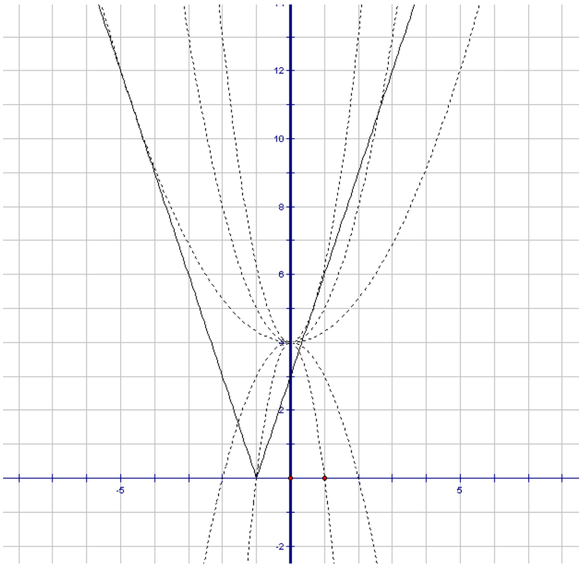
(рис для примера 3)

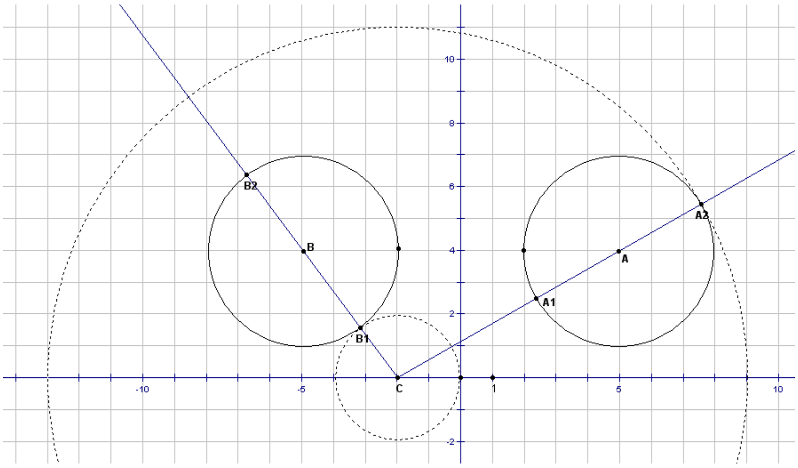
Пример 3. Найдите все значения параметра ***a*,** при которых уравнение

$(x^2-6|x|-a)^2+12(x^2-6|x|-a)^2+37=\cos\dfrac{18\pi}{a}$ имеет ровно два корня.

Пример 4. Решить уравнение $|3x+3| = ax^2+4$, где a параметр.

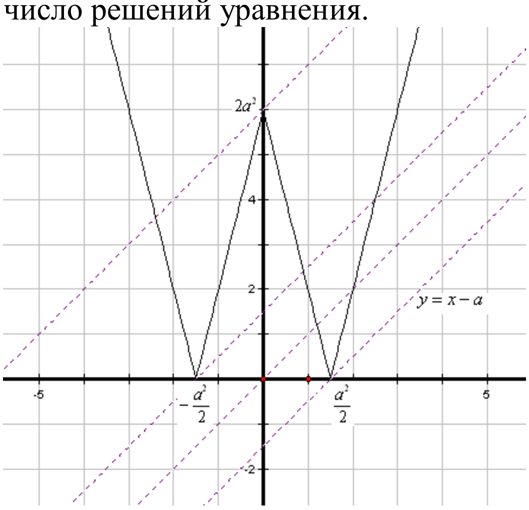
Пример 5. Найдите все положительные значения параметра *a,* при каждом из которых система имеет $\begin{cases}(|x|-5)^2+(y-4)^2=9,\\ (x+2)^2+y^2=a^2\end{cases}$ единственное решение.





(рис для 4 примера) (рис для 5 примера)

Пример 6. При каких значениях параметра ***a***, уравнение $x-a=2\left|2|x|-a^{2}\right|$ имеет решения? Определить число решений уравнения.



Пример 7. При каких значениях параметра ***a***, уравнение $9^{x}-2(3a-2)\cdot 3^{x}+5a^{2}-4a=0$ имеет два различных решения?

Пример 8. При каких значениях параметра ***a***, уравнение $\dfrac{2x-x^{2}-\log_{a}2}{2x-x^{2}-3}>\log_{a}\dfrac{1}{2}$ выполняется при любых значениях $x\in R$?

Пример 9. При каких значениях параметра ***a*** для любого значения параметра $b>0$ существуют решения уравнения $\log_{2}(1-x-x^{2})=a\log_{1-x-x^{2}}2+b$ удовлетворяющие условию $0<x<\dfrac{1}{2}$?

Пример 10. В зависимости от значений параметра ***a*** решить уравнение $\dfrac{\sin x-1}{\sin x-2}+a=\dfrac{\sin x-2}{\sin x-3}$.

Пример 11. При каких значениях параметра ***a*** уравнение $\sin^{2}x+(a+2)\sin x+3a+1=0$ не имеет корней.

Пример 12. Найти все значения параметра ***a***, при которых уравнение $3^{x^{2}+x}+\sqrt[3]{x^{2}+x}=3^{a-x}+\sqrt[3]{a-x}$ имеет ровно один корень.

Пример 13. Найти все значения параметра ***a***, при которых уравнение $\sqrt{\sqrt{x}+a}=x-a$ имеет два различных корня.

Пример 14. Найти все значения параметра ***a***, при которых уравнение $3^{\left|x^{2}-4x+3\right|+1}\cdot\log_{2}\left(\left|x^{2}-4x+3\right|+1\right)=3^{1+3a-2a^{2}}\cdot\log_{2}\left(1+3a-2a^{2}\right)$ имеет ровно три корня.

(назад к оглавлению)

2.ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Теоремы:

Т.1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ возрастают на промежутке I, то функция $y = f(x) + g(x) + C$ также возрастает на I.

Т.2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны и возрастают на промежутке I, то функция $y = C \cdot f(x) \cdot g(x)$ также возрастает на I.

Т.3. Если функция $f(x)$ монотонна на промежутке I, то уравнение $f(g(x)) = f(h(x))$ равносильно на промежутке I уравнению $g(x) = h(x)$.

Т.4. Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке I, то неравенство $f(g(x)) < f(h(x))$ равносильно на промежутке I уравнению $g(x) < h(x)$ ($g(x) > h(x)$).

Т.5. Если функция $f(x)$ монотонна на промежутке I, то уравнение $f(x) = C$ на промежутке I имеет не более одного корня.

Т.6. Если функция $f(x)$ возрастает а функция $g(x)$ убывает на промежутке I, то уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке I имеет не более одного корня.

Т.7. Если функция $f(x)$ возрастает на промежутке I, то уравнение $f(f(x)) = x$ равносильно на промежутке I уравнению $f(x) = x$.

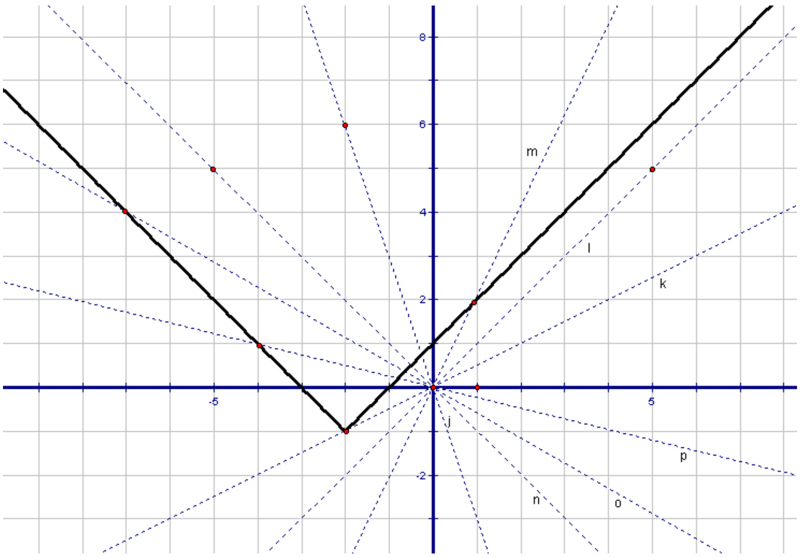
(назад к оглавлению)

3.РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

Пример 1. Сколько решений в зависимости от параметра ***a*** имеет уравнение $|x+2| = ax + 1$.

Решение.

(1 способ) Решим уравнение графически. Построим в одной системе координат графики функций $y = |x+2| - 1$ и $y = ax$. Графиком функции $y = |x+2| - 1$ является «галочка» с вершиной в точке (-2; -1). Графиком функции $y = ax$ является пучок прямых проходящих через начало координат.



Для функции $y = ax$ изменяя значение параметра от -∝ до + ∝ определим соответствующее количество точек пересечении графиков функции $y = ax$ и $y = |x+2| - 1$.

Видно три критические значения параметра ***a***=-1, ***a***=1 и ***a***=0,5. При ***a***=-1 или ***a***=1 прямая параллельна одной из ветвей графика функции $y = |x+2| - 1$. При ***a***=0,5 прямая проходит через вершину графика $y = |x+2| - 1$.

При $a = 0,5$ графики функций пересекаются в одной точке. При $a \in (0,5;1]$ графики функций не пересекаются. При $a \in (-1;\, 0,5)$ графики функций пересекаются в двух точках. При $a \in (-\infty;-1] \cup (1;+\infty)$ графики функций пересекаются в одной точке.

Значит при $a \in (0,5;1]$ уравнение не имеет решений, при $a \in (-1;\, 0,5)$ уравнение имеет два решения, при $a \in (-\infty;-1] \cup (1;+\infty) \cup \{0,5\}$ уравнение имеет одно решение.

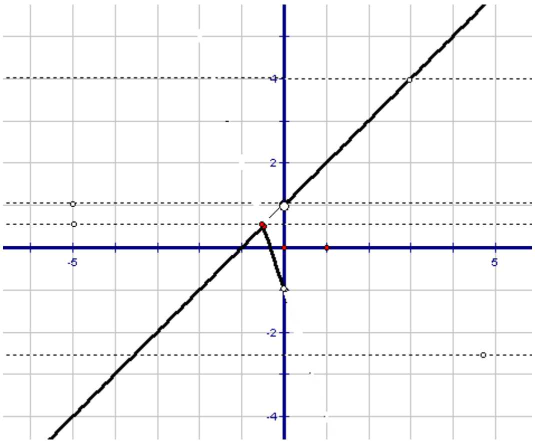
Ответ: при $a \in (0,5;1]$ - нет решений;

при $a \in (-1;\, 0,5)$ - два решения;

при $a \in (-\infty;-1] \cup (1;+\infty) \cup \{0,5\}$ - одно решение.

(2 способ) Так как число x=0 не является корнем уравнения $|x+2| = ax+1$, то оно равносильно уравнению $\frac{1}{x}\cdot|x+2| - \frac{1}{x} = a$. Последнее уравнение имеет столько же корней, сколько и уравнение $t\cdot\left|\frac{1}{t}+2\right| - t = a$. Решим полученное уравнение графически, построив в одной системе координат графики функций $y = t\cdot\left|\frac{1}{t}+2\right| - t$ и $y = a$.

Функцию $y = t\cdot\left|\frac{1}{t}+2\right| - t$ можно записать по другому раскрыв модуль $y = \begin{cases} t-1, \text{ если } t < -0{,}5, \\ -3t-1, \text{ если } -0{,}5 \le t < 0, \\ t+1, \text{ если } t > 0. \end{cases}$



Выполняя параллельный перенос прямой $y = a$ получим количество точек пересечения при разных значениях параметра ***a***.

При $a = 0{,}5$ графики функций пересекаются в одной точке. При $a \in (0{,}5;1]$ графики функций не пересекаются. При $a \in (-1;\, 0{,}5)$ графики функций пересекаются в двух точках. При $a \in (-\infty;-1] \cup (1;+\infty)$ графики функций пересекаются в одной точке.

Ответ: при $a \in (0{,}5;1]$ - нет решений;

при $a \in (-1;\, 0{,}5)$ - два решения;

при $a \in (-\infty;-1] \cup (1;+\infty) \cup \{0{,}5\}$ - одно решение.

Пример 2. Найдите все значения параметра ***a,*** при которых уравнение $x^2+4x-|x-a|+2-a=0$ имеет четыре решения.

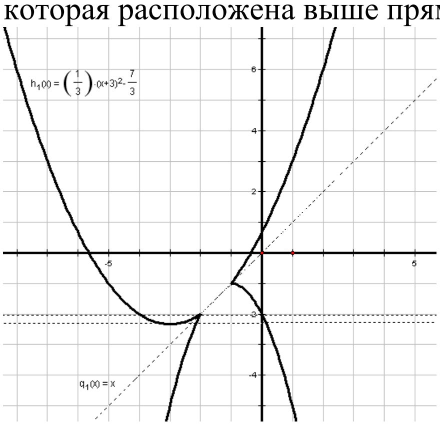
Решение.

Решим уравнение графически. Раскроем модуль и рассмотрим два случая:

Если $x < a$, то уравнение можно записать в виде $a = -(x-1)^2 - 1$.

Если $x \ge a$, то уравнение можно записать в виде $a = \frac{1}{3}(x-3)^2 - \frac{7}{3}$.

В одной системе координат xOa построим графики функций: график функции $a = -(x-1)^2 - 1$ только ту часть, которая расположена ниже прямой $a = x$ и график функции $a = \frac{1}{3}(x-3)^2 - \frac{7}{3}$ только ту часть, которая расположена выше прямой $a = x$.



По рисунку видно что прямая параллельная оси Ox пересекает график уравнения в четырех точках при $a \in \left(-\frac{7}{3}; -2\right)$.

Следовательно исходное уравнение имеет четыре решения при $a \in \left(-\frac{7}{3}; -2\right)$.

Ответ: $a \in \left(-\frac{7}{3}; -1\right)$

Пример 3. Найдите все значения параметра ***a,*** при которых уравнение $(x^2 - 6|x| - a)^2 + 12(x^2 - 6|x| - a)^2 + 37 = \cos\frac{18\pi}{a}$ имеет ровно два корня.

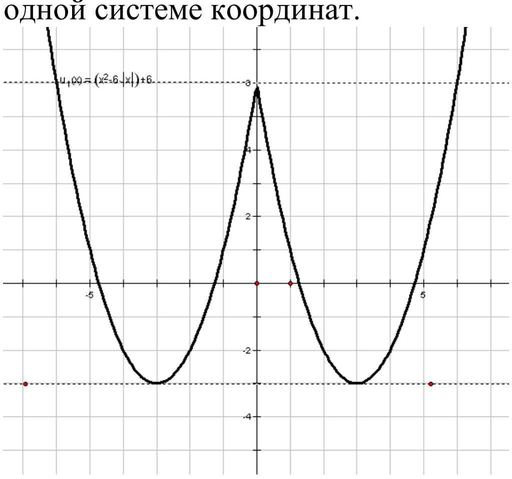
Решение. ***(1 способ)*** Уравнение равносильно уравнению

$(x^2-6|x|-a)^2+12(x^2-6|x|-a)^2+36+1-\cos\frac{18\pi}{a}=0$ или $\left(x^2-6|x|-a+6\right)^2+\left(1-\cos\frac{18\pi}{a}\right)=0$.

Выражение $\left(x^2-6|x|-a+6\right)^2$ неотрицательно при всех значениях x. А т.к. $-1\le\cos\frac{18\pi}{a}\le 1$ то $0\le 1-\cos\frac{18\pi}{a}\le 2$. Сумма двух неотрицательных выражений равно нулю тогда и только тогда, когда оба выражения одновременно равны нулю, т.е.

$$\begin{cases} x^2-6|x|-a+6=0, \\ 1-\cos\frac{18\pi}{a}=0. \end{cases} \quad \begin{cases} a=x^2-6|x|+6, \\ \cos\frac{18\pi}{a}=1. \end{cases} \quad \begin{cases} a=x^2-6|x|+6, \\ \frac{18\pi}{a}=2\pi n,\ n\in Z. \end{cases} \quad \begin{cases} a=x^2-6|x|+6, \\ \frac{9}{a}=n,\ n\in Z. \end{cases}$$

Решим первое уравнение $a=x^2-6|x|+6$ системы графически и выясним, при каких значениях параметра ***a*** уравнение имеет ровно два корня. Построим графики функций $y=x^2-6|x|+6$ и $y=a$ в одной системе координат.



Графики функций $y=x^2-6|x|+6=0$ и $y=a$ пересекаются в двух точках при $a\in(6;+\infty)\cup\{-3\}$.

Выясним, при каких значениях параметра $a\in(6;+\infty)\cup\{-3\}$ второе равенство системы верно.

$\frac{9}{a}=n,\ n\in Z$. Так как $n\in Z$, то и $\frac{9}{a}\in Z$, т.е. $a=\{\pm1;\pm3;\pm9\}$.

Из полученных значений параметра $a=\{\pm1;\pm3;\pm9\}$ удовлетворяют условию $a\in(6;+\infty)\cup\{-3\}$ только $a=\{-3;9\}$. Значит, исходное уравнение имеет ровно два корня при $a=\{-3;9\}$. **Ответ:** $a=\{-3;9\}$.

(2 способ) Уравнение равносильно уравнению

$(x^2-6|x|-a)^2+12(x^2-6|x|-a)^2+36+1-\cos\frac{18\pi}{a}=0$ или $\left(x^2-6|x|-a+6\right)^2+\left(1-\cos\frac{18\pi}{a}\right)=0$.

Выражение $\left(x^2-6|x|-a+6\right)^2$ неотрицательно при всех значениях x. А т.к. $-1\le\cos\frac{18\pi}{a}\le 1$ то $0\le 1-\cos\frac{18\pi}{a}\le 2$. Сумма двух неотрицательных выражений равно нулю тогда и только тогда, когда оба выражения одновременно равны нулю, т.е.

$$\begin{cases} x^2-6|x|-a+6=0, \\ 1-\cos\frac{18\pi}{a}=0. \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-6|x|+6-a=0, \\ \frac{9}{a}=n,\ n\in Z. \end{cases}$$

Решим первое уравнение $x^2-6|x|+6-a=0$. Данное уравнение будет иметь два решения, если уравнение $t^2-6t+6-a=0$ имеет один положительный корень или два корня один из которых положительный, а другой отрицательный.

1) Уравнение $t^2-6t+6-a=0$ имеет один корень, т.е. $D=12+4a=0$, $a=-3$, $x=3$, удовлетворяет условию. Значит, при $a=-3$ уравнение $t^2-6t+6-a=0$ имеет один положительный корень, следовательно уравнение $x^2-6|x|+6-a=0$ имеет ровно два корня.

2) Уравнение $t^2-6t+6-a=0$ имеет два корня один из которых положительный, а другой отрицательный. Данное условие выполняется, если $\begin{cases} D>0, \\ x_1\cdot x_2<0; \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} 12+4a>0, \\ 6-a<0; \end{cases}$ $\begin{cases} a>-3, \\ a>6; \end{cases}$ $a>6$.

Получили, что уравнение $x^2-6|x|+6-a=0$ имеет ровно два корня при $a\in(6;+\infty)\cup\{-3\}$.

Выясним, при каких значениях параметра $a\in(6;+\infty)\cup\{-3\}$ второе равенство системы верно.

$\frac{9}{a}=n,\ n\in Z$. Так как $n\in Z$, то и $\frac{9}{a}\in Z$, т.е. $a=\{\pm1;\pm3;\pm9\}$.

Из полученных значений параметра $a=\{\pm 1; \pm 3; \pm 9\}$ удовлетворяют условию $a \in (6; +\infty) \cup \{-3\}$ только $a=\{-3; 9\}$. Значит, исходное уравнение имеет ровно два корня при $a=\{-3; 9\}$.
Ответ: $a=\{-3; 9\}$.

Пример 4. Решить уравнение $|3x+3| = ax^2+4$, где ***a*** параметр.
Решение.
Решим данное уравнение графически: $y=|3x+3|$; $y=ax^2+4$.

Графиком функции $y=3|x+1|$ является «галочка» с вершиной в точке (-1; 0). Графиком функции $y=ax^2+4$ является семейство парабол с вершиной в точке (4; 0). Критическими точками для параметра ***a*** являются точка (-1; 0) и точки касания параболы прямых $y=3x+3$ и $y=-3x-3$. Парабола проходит через точку (-1; 0) при $a=-4$. Найдем точку касания параболы $y=ax^2+4$ с прямой $y=3x+3$:

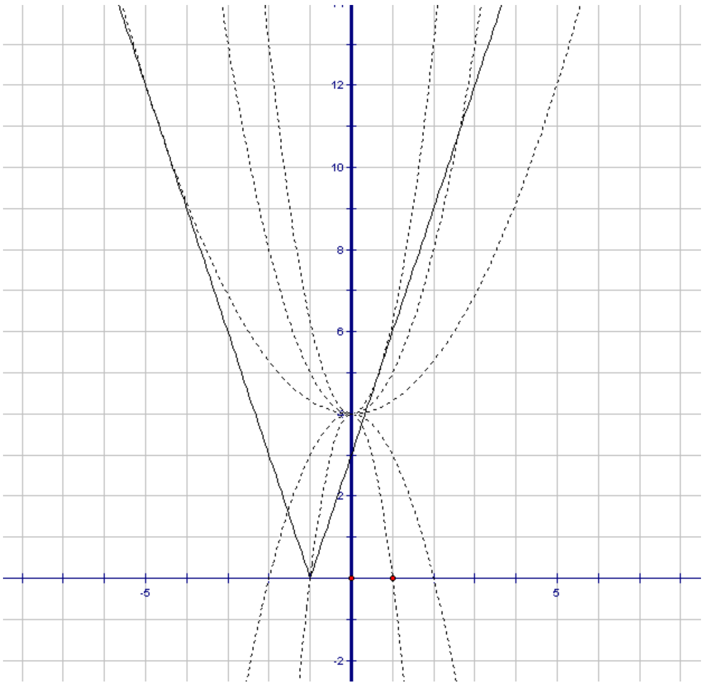
$y'=2ax$, $2ax=3$, $x_0=\dfrac{3}{2a}$, $y_0=\dfrac{9}{4a}+4$

$\dfrac{9}{4a}+4=3\cdot\dfrac{3}{2a}+3$, $a=\dfrac{9}{4}$.

Найдем точку касания параболы $y=ax^2+4$ с прямой $y=-3x-3$:

$y'=2ax$, $2ax=3$, $x_0=-\dfrac{3}{2a}$, $y_0=\dfrac{9}{4a}+4$, $\dfrac{9}{4a}+4=-3\cdot\left(-\dfrac{3}{2a}\right)-3$, $a=\dfrac{9}{28}$.

Если $a<-4$, то парабола пересекает только прямую $y=3x+3$, и при этих значениях параметра ***a***



корнями исходного уравнении будут корни уравнения $3x+3=ax^2+4$, откуда $x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4a}}{2a}$.

Если $-4 \le a < 0$, то парабола пересекает прямые $y=3x+3$ и $y=-3x-3$, и меньший из корней получается при пересечении параболы с прямой $y=-3x-3$, т.е. это меньший корень уравнения $-3x-3=ax^2+4$, $x=\dfrac{-3-\sqrt{9-28a}}{2a}$, а второй больший корень получается при пересечении параболы с прямой $y=3x+3$, т.е. это больший корень уравнения $3x+3=ax^2+4$, $x=\dfrac{3+\sqrt{9-4a}}{2a}$.

Если $a=0$, то исходное уравнение принимает вид $|3x+3|=ax^2+4$, корнями которого являются числа $x=-\dfrac{7}{3}$ и $x=\dfrac{1}{3}$.

Если $0<a\le\dfrac{9}{28}$, то парабола пересекает прямые $y=3x+3$ и $y=-3x-3$, и каждую из них в двух точках. Значит корнями исходного уравнения являются корни уравнений $-3x-3=ax^2+4$ и $3x+3=ax^2+4$, откуда получаем $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-28a}}{2a}$ и $x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4a}}{2a}$.

Если $\dfrac{9}{28}<a\le\dfrac{9}{4}$, то парабола пересекает только прямую $y=3x+3$. Значит корнями исходного уравнения являются корни уравнения $3x+3=ax^2+4$, откуда получаем $x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4a}}{2a}$.

Если $a > \frac{9}{4}$, то парабола графики функций не пересекаются, соответственно исходное уравнение не имеет решений.

Ответ: если $a < -4$, то $x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4a}}{2a}$; если $-4 \le a < 0$, то $x = \frac{-3-\sqrt{9-28a}}{2a}$, $x = \frac{3+\sqrt{9-4a}}{2a}$;

если $a = 0$, то $x = -\frac{7}{3}$ и $x = \frac{1}{3}$; если $0 < a \le \frac{9}{28}$, $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-28a}}{2a}$ и $x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4a}}{2a}$;

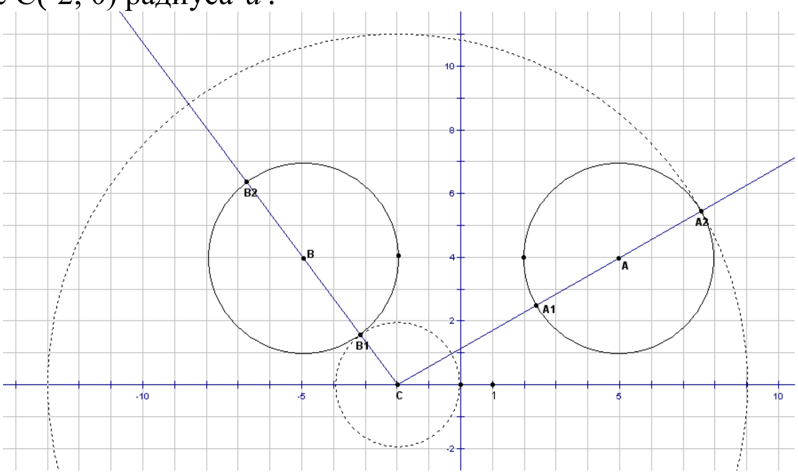
если $\frac{9}{28} < a \le \frac{9}{4}$, то $x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4a}}{2a}$; если $a > \frac{9}{4}$, то нет решений.

Пример 5. Найдите все положительные значения параметра ***a*,** при каждом из которых система имеет $\begin{cases} (|x|-5)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ (x+2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ единственное решение.

Решение.

Если $x \ge 0$, то уравнение $(|x|-5)^2 + (y-4)^2 = 9$ задает окружность ω_1 с центром в точке A(5; 4) радиуса 3, если $x < 0$, то уравнение $(|x|-5)^2 + (y-4)^2 = 9$ задает окружность ω_2 с центром в точке B(-5; 4) радиуса 3.

При положительных значениях a уравнение $(x+2)^2 + y^2 = a^2$ задает окружность ω с центром в точке C(-2; 0) радиуса a.



Поэтому задача состоит в том, чтобы найти все значения a, при каждом из которых окружность ω имеет единственную общую точку с окружностью ω_1 или окружностью ω_2.

Из токи C проведем луч CA, который пересекает окружность ω_1 в точках A_1 и A_2, где A_1 лежит между C и A. $CA = \sqrt{(5+2)^2 + 4^2} = \sqrt{65}$, $CA_1 = \sqrt{65} - 3$, $CA_2 = \sqrt{65} + 3$.

При $a < CA_1$ или $a > CA_2$ окружности ω и ω_1 не пересекаются.

При $CA_1 < a < CA_2$ окружности ω и ω_1 пересекаются в двух точках.

При $a = CA_1$ или $a = CA_2$ окружности ω и ω_1 касаются.

Из токи C проведем луч CB, который пересекает окружность ω_2 в точках B_1 и B_2, где B_1 лежит между C и B. $CB = \sqrt{(-5+2)^2 + 4^2} = 5$, $CB_1 = 5 - 3 = 2$, $CB_2 = 5 + 3 = 8$.

При $a < CB_1$ или $a > CB_2$ окружности ω и ω_2 не пересекаются.

При $CB_1 < a < CB_2$ окружности ω и ω_2 пересекаются в двух точках.

При $a = CB_1$ или $a = CB_2$ окружности ω и ω_2 касаются.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается ровно одной из двух окружностей ω_1 и ω_2 и не пересекается с другой. Так как $CB_1 < CA_1 < CB_2 < CA_2$, то условию задачи удовлетворяют только значения параметра a, где касания происходит в токах B_1 и A_2, т.е. $a = 2$ и $a = \sqrt{65} + 3$.

Ответ: $a = 2$, $a = \sqrt{65} + 3$

Пример 6. При каких значениях параметра ***a*** уравнение $x-a=2\left|2|x|-a^2\right|$ имеет решения? Определить число решений уравнения.

Решение.

(1 способ) Построим в одной системе координат графики функций $y=x-a$ и $y=2\left|2|x|-a^2\right|$.

$y=2\left|2|x|-a^2\right|$; если $x\ge 0$, то $y=2\left|2x-a^2\right|$, $\left(\frac{a^2}{2};0\right)$ и $\left(0;2a^2\right)$ - точки пересечения с осями координат;

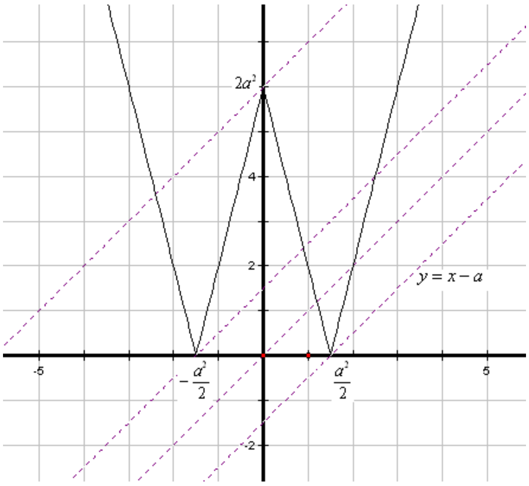
если $x<0$, то $y=2\left|-2x-a^2\right|$, $\left(-\frac{a^2}{2};0\right)$ и $\left(0;2a^2\right)$ - точки пересечения с осями координат.

$y=x-a$; $(a;0)$ и $(0;-a)$ - точки пересечения с осями координат.

1)Если $\frac{a^2}{2}<a$, т.е. $a\in(0;2)$, то исходное уравнение не имеет решений.

2)Если $0<a<\frac{a^2}{2}$, $\begin{cases}-\frac{a^2}{2}<a<0\\ 2a^2>-a\end{cases}$ и $\begin{cases}a<-\frac{a^2}{2}\\ 2a^2<-a\end{cases}$,

т.е. $a\in(-\infty;2)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup(2;+\infty)$, то исходное уравнение имеет два решения.



Если прямая $y=x-a$ проходит через точки $\left(-\frac{a^2}{2};0\right)$ или $\left(0;2a^2\right)$, то исходное уравнение имеет три решения. Подставляя координаты данных точек в уравнение прямой $y=x-a$ получим, что $a=-\frac{1}{2}$, $a=-2$ - значения параметра при которых исходное уравнение имеет три решения.

Если $\begin{cases}a<-\frac{a^2}{2}\\ 2a^2>-a\end{cases}$, т.е. $a\in\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$, то исходное уравнение имеет четыре решения.

Ответ: если $a\in(0;2)$, то нет решений;

если т.е. $a\in(-\infty;2)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup(2;+\infty)$, то два решения;

если $a=-\frac{1}{2}$, $a=-2$, то три решения; если $a\in\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$, то четыре решения.

(2 способ) Найдите все значения параметра ***a*** уравнение при каждом из которых уравнение $x-a=2\left|2|x|-a^2\right|$ имеет три различных корня. Найдите эти корни.

<u>1)</u>Пусть $x<0$, тогда будем иметь систему $\begin{cases}x<0,\\ x-a=2\left|-2x-a^2\right|.\end{cases}$ Чтобы решить эту систему нужно рассмотреть два случая:

1а) $\begin{cases}x<0,\\ -2x-a^2<0,\\ x-a=2(2x+a^2);\end{cases}$ $\begin{cases}x<0,\\ -2x-a^2<0,\\ x=\frac{1}{3}(-2a^2-a).\end{cases}$

Подставим полученное значение ***x*** в неравенство системы. Будем иметь:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(-2a^2-a)<0, \\ -\frac{2}{3}(-2a^2-a)-a^2<0, \\ x=\frac{1}{3}(-2a^2-a); \end{cases} \quad \begin{cases} a<-\frac{1}{2},\ a>0, \\ -2<a<0, \\ x=\frac{1}{3}(-2a^2-a). \end{cases}$$ Отсюда следует, что при $-2<a<-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{3}(-2a^2-a)$.

1б) $$\begin{cases} x<0, \\ -2x-a^2\geq 0, \\ x-a=2(-2x-a^2); \end{cases} \quad \begin{cases} x<0, \\ -2x-a^2\geq 0, \\ x=\frac{1}{5}(a-2a^2). \end{cases}$$

Подставим полученное значение $\boldsymbol{x}$ в неравенство системы. Будем иметь:

$$\begin{cases} \frac{1}{5}(a-2a^2)<0, \\ -\frac{2}{5}(a-2a^2)-a^2<0, \\ x=\frac{1}{5}(a-2a^2); \end{cases} \quad \begin{cases} a<0,\ a>\frac{1}{2}, \\ -2\leq a\leq 0, \\ x=\frac{1}{5}(a-2a^2). \end{cases}$$ Отсюда следует, что при $-2\leq a<0$, $x=\frac{1}{5}(a-2a^2)$.

<u>2)</u>Пусть $x\geq 0$, тогда будем иметь систему $\begin{cases} x\geq 0, \\ x-a=2|2x-a^2|. \end{cases}$ Чтобы решить эту систему нужно рассмотреть два случая:

2а) $$\begin{cases} x\geq 0, \\ 2x-a^2<0, \\ x-a=-2(2x-a^2); \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq 0, \\ 2x-a^2<0, \\ x=\frac{1}{5}(2a^2+a). \end{cases}$$

Подставим полученное значение $\boldsymbol{x}$ в неравенство системы. Будем иметь:

$$\begin{cases} \frac{1}{5}(2a^2+a)\geq 0, \\ \frac{2}{5}(2a^2+a)-a^2<0, \\ x=\frac{1}{5}(2a^2+a); \end{cases} \quad \begin{cases} a\leq -\frac{1}{2},\ a\geq 0, \\ a<0,\ a>2, \\ x=\frac{1}{5}(2a^2+a). \end{cases}$$ Отсюда следует, что при $a\leq -\frac{1}{2}, a>2$, $x=\frac{1}{5}(2a^2+a)$.

2б) $$\begin{cases} x\geq 0, \\ 2x-a^2\geq 0, \\ x-a=2(2x-a^2); \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq 0, \\ 2x-a^2\geq 0, \\ x=\frac{1}{3}(2a^2-a). \end{cases}$$

Подставим полученное значение $\boldsymbol{x}$ в неравенство системы. Будем иметь:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(2a^2-a)\geq 0, \\ \frac{2}{3}(2a^2-a)-a^2<0, \\ x=\frac{1}{3}(2a^2-a); \end{cases} \quad \begin{cases} a\leq 0,\ a\geq\frac{1}{2}, \\ a\leq 0,\ a\geq 2, \\ x=\frac{1}{3}(2a^2-a). \end{cases}$$ Отсюда следует, что при $a\leq 0, a\geq 2$, $x=\frac{1}{3}(2a^2-a)$.

Ответ: если $-2<a<-\frac{1}{2}$, то $x=\frac{1}{3}(-2a^2-a)$;

если $-2 \le a < 0$, то $x = \frac{1}{5}(a - 2a^2)$;

если $a \le -\frac{1}{2}$, $a > 2$, то $x = \frac{1}{5}(2a^2 + a)$;

если $a \le 0, a \ge 2$, то $x = \frac{1}{3}(2a^2 - a)$.

!!!!!! Уравнение при решении которых меняем формулировку условия после выполнения замены

Пример 7. При каких значениях параметра ***a*** уравнение $9^x - 2(3a-2)\cdot 3^x + 5a^2 - 4a = 0$ имеет два различных решения?

Решение. Уравнение квадратное относительно 3^x. Пусть $3^x = t$. Тогда $t - 2(3a-2)t + 5a^2 - 4a = 0$. Так как уравнение $3^x = t$ имеет решение только при $t > 0$, то решение исходной задачи можно свести к решению следующей задачи: «При каких значениях параметра ***a*** уравнение $t - 2(3a-2)t + 5a^2 - 4a = 0$ имеет два различных положительных корня?»

(1 способ) $t^2 - 2(3a-2)t + 5a^2 - 4a = 0$, $D = 4(a-1)^2$, $t_1 = a$, $t_2 = 5a - 4$.

Уравнение $t^2 - 2(3a-2)t + 5a^2 - 4a = 0$ имеет два различных положительных корня, если:

$$\begin{cases} a > 0, \\ 5a - 4 > 0, \\ a \ne 5a - 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0{,}8, \\ a \ne 1. \end{cases}$$

(2 способ) $t^2 - 2(3a-2)t + 5a^2 - 4a = 0$. Уравнение имеет два различных положительных корня, если:

$$\begin{cases} D > 0, \\ t_1 + t_2 > 0, \\ t_1 \cdot t_2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 - 8a + 4 > 0, \\ 2(3a-2) > 0, \\ 5a^2 - 4a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0{,}8, \\ a \ne 1. \end{cases}$$

Ответ: $a \in (0{,}8; 1) \cup (1; +\infty)$.

Пример 8. При каких значениях параметра ***a*** уравнение $\frac{2x - x^2 - \log_a 2}{2x - x^2 - 3} > \log_a \frac{1}{2}$ выполняется при любых значениях $x \in R$?

Решение.

Исследуем квадратный трехчлен $2x - x^2 - 3$. $-x^2 + 2x - 3$, $D = -8$, следовательно, $2x - x^2 - 3 < 0$ при всех x. Умножим обе части неравенства на $-x^2 + 2x - 3$ и сгруппируем по степеням x. Получим $(1 + \log_a 2)x^2 - 2(1 + \log_a 2)x + 4\log_a 2 > 0$. Для удобства выполним замену $\log_a 2 = t$, тогда $(1+t)x^2 - 2(1+t)x + 4 > 0$. Последнее неравенство выполняется при всех $x \in R$, если:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 + t > 0, \\ D < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 1 + t < 0, \\ D < 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 + t > 0, \\ 4(1+t)(1-3t) < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 1 + t < 0, \\ 4(1+t)(1-3t) < 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 + t > 0, \\ 1 - 3t < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 1 + t < 0, \\ 1 - 3t > 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t > \frac{1}{3}, \\ t < -1. \end{array}\right.$$

Выполняя обратную подстановку получим:

$\left[\begin{array}{l} \log_a 2 > \frac{1}{3}, \\ \log_a 2 < -1. \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a \in (1; 8), \\ a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right). \end{array}\right.$ Исходное уравнение выполняется при всех $x \in R$ при $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; 8)$.

Ответ: $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; 8)$.

Пример 9. При каких значениях параметра ***a*** для любого значения параметра $b > 0$ существуют решения уравнения $\log_2(1 - x - x^2) = a\log_{1-x-x^2} 2 + b$ удовлетворяющие условию $0 < x < \frac{1}{2}$?

Решение.

Введем обозначения $z=\log_2(1-x-x^2)$ для которого найдем множество значений. Т.к. $0<x<\frac{1}{2}$, то $\frac{1}{4}<1-x-x^2<1$, следовательно $-2<z<0$. Учитывая введенное обозначение исходное уравнение запишем виде $z^2-bz-a=0$.

Тогда задача формулируется следующим образом: «Найдите значение параметра ***a***, при которых для любого значения параметра $b>0$ существует корень квадратного трехчлена $f(z)=z^2-bz-a$ принадлежащий интервалу $(-2;0)$».

Так как ветви параболы направлены вверх и абсцисса вершины параболы $x_0=\frac{b}{2}>0$ при $b>0$, то квадратный трехчлен имеет корень на интервале $(-2;0)$ при условии:

$$\begin{cases} f(-2)>0, \\ f(0)<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+2b-a>0, \\ -a<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<4+2b, \\ a>0; \end{cases} \Leftrightarrow 0<a<4+2b.$$

Так как решения удовлетворяющие требованиям задачи, должны существовать для любого значения параметра $b>0$, то $0<a\le 4$.

Ответ: $0<a\le 4$.

Пример 10. В зависимости от значений параметра ***a*** решить уравнение $\frac{\sin x-1}{\sin x-2}+a=\frac{\sin x-2}{\sin x-3}$.

Решение.

Пусть $\sin x=y$, где $|y|\le 1$, тогда $\frac{y-1}{y-2}+a=\frac{y-2}{y-3}$. После преобразования получим $ay^2-5ay+6a-1=0$.

Если $a\ne 0$, то $y_{1,2}=\frac{5a\pm\sqrt{a^2+4a}}{2a}$.

Учитывая $|y|\le 1$ и решая неравенства $-1\le\frac{5a+\sqrt{a^2+4a}}{2a}\le 1$ и $-1\le\frac{5a-\sqrt{a^2+4a}}{2a}\le 1$ находим, что в первом случае нет решений, а во втором случае $a\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

Допустим, что $a=0$, тогда уравнение $ay^2-5ay+6a-1=0$ не имеет решений, значит и исходное не имеет решений.

Получили, что при $a\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ $y=\frac{5a-\sqrt{a^2+4a}}{2a}$, значит и $\sin x=\frac{5a-\sqrt{a^2+4a}}{2a}$, т.е. $x=(-1)^n\arcsin\left(\frac{5a-\sqrt{a^2+4a}}{2a}\right)+\pi n,\ n\in Z$, ***а*** при других значений параметра а нет решений.

Ответ: если $a\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, то $x=(-1)^n\arcsin\left(\frac{5a-\sqrt{a^2+4a}}{2a}\right)+\pi n,\ n\in Z$;

если $a\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$, то нет решений.

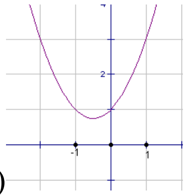
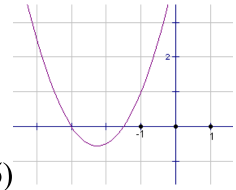
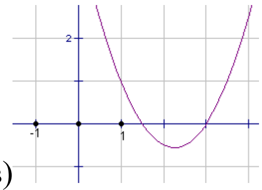
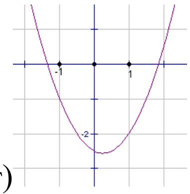
Пример 11. При каких значениях параметра ***a*** уравнение $\sin^2 x+(a+2)\sin x+3a+1=0$ не имеет корней.

Решение.

Пусть $\sin x=t$, где $|t|\le 1$, тогда $t^2+(a+2)t+3a+1=0$. **(*)**

Задачу можно сформулировать следующим образом: при каких значениях параметра ***a*** уравнение $t^2+(a+2)t+3a+1=0$ не имеет корней на отрезке $[-1;1]$.

Графиком функции $f(t)=t^2+(a+2)t+3a+1$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Рассмотрим возможные расположения графика так, чтобы на отрезке $[-1;1]$ не было нулей функции.

а)  б)  в)  г) 

а)Парабола лежит выше оси Ох, уравнение (*) корней не имеет, т.е $D<0$, т.е. $a(a-8)<0$, $0<a<8$.

б)парабола пересекает ось Ох левее -1, т.е. корни уравнения не входят в отрезок $[-1;1]$. Это выполняется при условии:

$$\begin{cases} D\ge 0, \\ f(-1)>0, \\ t_0<-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a-8)\ge 0, \\ 2a>0, \\ -\dfrac{a+2}{2}<-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in(-\infty;\,0]\cup[8;\,+\infty), \\ a>0, \\ a>0; \end{cases} \Leftrightarrow\ a\ge 8.$$

в)парабола пересекает ось Ох правее 1, т.е. корни уравнения не входят в отрезок $[-1;1]$. Это выполняется при условии:

$$\begin{cases} D\ge 0, \\ f(1)>0, \\ t_0>1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a-8)\ge 0, \\ 4a+4>0, \\ -\dfrac{a+2}{2}>1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in(-\infty;\,0]\cup[8;\,+\infty), \\ a>-1, \\ a<-4; \end{cases} \Leftrightarrow \text{нет решений.}$$

г)Парабола пересекает ось Ох, но нули функции лежат по разные стороны отрезка $[-1;1]$. Это выполняется при условии:

$$\begin{cases} D\ge 0, \\ f(1)<0, \\ f(-1)<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a-8)\ge 0, \\ 4a+4<0, \\ 2a<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in(-\infty;\,0]\cup[8;\,+\infty), \\ a<-1, \\ a<0; \end{cases} \Leftrightarrow\ a<-1.$$

Объединяя, получим, что уравнение не имеет решений при $a\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$.

Ответ: $a\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$.

!!111!! Уравнения решаемые с помощью свойств функции

Пример 12. Найти все значения параметра ***a***, при которых уравнение $3^{x^2+x}+\sqrt[3]{x^2+x}=3^{a-x}+\sqrt[3]{a-x}$ имеет ровно один корень.

Решение.

Левую и правую части уравнения можно рассмотреть как функции $f(t)=3^t+\sqrt[3]{t}$, которая является возрастающей на ***R***. Поэтому исходное уравнение можно записать так $f(x^2+x)=f(a-x)$, которое (*по теореме 3*) равносильно уравнению $x^2+x=a-x$, или $x^2+2x-a=0$. Согласно условию исходное уравнение должен иметь ровно один корень, то и уравнение $x^2+2x-a=0$ тоже должен иметь один корень, т.е. $D=4+4a=0$, $a=-1$.

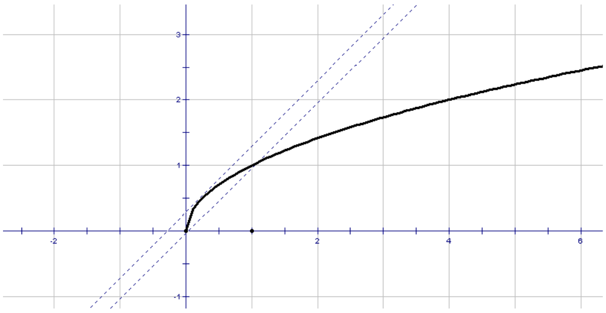
Ответ: $a=-1$.

Пример 13. Найти все значения параметра ***a***, при которых уравнение $\sqrt{\sqrt{x}+a}=x-a$ имеет два различных корня.

Решение.

Перепишем уравнении в следующем виде $\sqrt{\sqrt{x}+a}+a=x$. Так как функция $f(x)=\sqrt{x}+a$ возрастает на всей области определения функции $D(f)=[0;+\infty)$, а уравнение $\sqrt{\sqrt{x}+a}=x-a$ можно представить в виде $f\big(f(x)\big)=x$, то *(по теореме 7)* оно равносильно уравнению $\sqrt{x}+a=x$. Для полученного уравнения $\sqrt{x}=x-a$ найдем все значения параметра ***a***, при которых уравнении имеет два различных корня.

Решим уравнение $\sqrt{x}=x-a$ графически. Построим в одной системе координат графики функций: $y=\sqrt{x}$ и $y=x-a$.



Графики имеют две точки пересечения, когда прямая проходит через начала координат, т.е. $a=0$ и смещаясь проходит как касательная к графику функции $y=\sqrt{x}$.

$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}=1$, $x_0=\dfrac{1}{4}$, $y_0=\dfrac{1}{2}$, т.е. прямая

$y=x-a$ проходит через точку $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)$, значит $a=-\dfrac{1}{4}$.

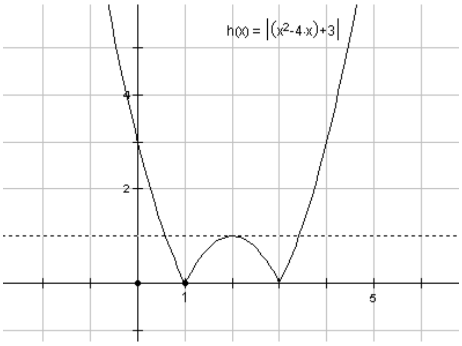
Получили, что графики функций имеют две точки пересечения, а значит и исходное уравнение два решения при $a\in\left(-\dfrac{1}{4};0\right]$.

Ответ: $a\in\left(-\dfrac{1}{4};0\right]$.

Пример 14. Найти все значения параметра ***a***, при которых уравнение $3^{\left|x^2-4x+3\right|+1}\cdot\log_2\left(\left|x^2-4x+3\right|+1\right)=3^{1+3a-2a^2}\cdot\log_2\left(1+3a-2a^2\right)$ имеет ровно три корня.

Решение.

Данное уравнении запишем в следующем виде $f(\left|x^2-4x+3\right|+1)=f\left(1+3a-2a^2\right)$, где $f(t)=3^t\cdot\log_2 t$, является возрастающей *(по теореме 2)*, т.к. $\left|x^2 4x+3\right|+1\geq 1$, то $t\geq 1$, а значит и $\log_2 t\geq 0$. Таким образом уравнение $f(\left|x^2-4x+3\right|+1)=f\left(1+3a-2a^2\right)$ равносильно *(по теореме 3)* следующему уравнению $\left|x^2-4x+3\right|+1=1+3a-2a^2$, т.е. $\left|x^2-4x+3\right|=3a-2a^2$. Полученное уравнение решим графически: $y=\left|x^2-4x+3\right|$, $y=3a-2a^2$.



По графику видно графики функций пересекаются в трех точках, когда прямая $y=3a-2a^2$ проходит через точку с ординатой 1, т.е. $3a-2a^2=1$. Решая полученное уравнение имеем, что $a=\dfrac{1}{2}$ или $a=1$.

Ответ: $a=\dfrac{1}{2}$, $a=1$.

(назад к оглавлению)