

Особенности решения задач
раздела «Геометрическая оптика»,
включенных в ЕГЭ по физике.

Мальгина Галина Васильевна,
учитель физики МБОУ СТШ
2021г.

Задача 1

2. Постройте изображение точки S , создаваемое двумя линзами L_1 и L_2 . Положение точки S и фокусов F_1 и F_2 линз задано (рис. 5.13).

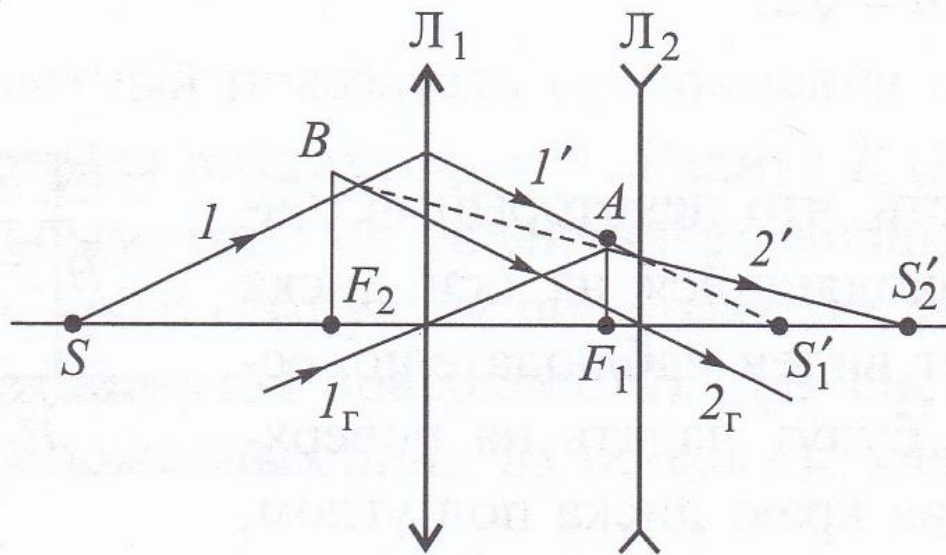


Рис. 5.13

Задача 2

На экране с помощью тонкой линзы получено изображение стержня с пятикратным увеличением. Стержень расположен перпендикулярно главной оптической оси, и плоскость экрана также перпендикулярна этой оси. Экран передвинули на 30 см вдоль главной оптической оси линзы. Затем, при неизменном положении линзы, передвинули стержень так, чтобы изображение снова стало резким. В этом случае получено изображение с трехкратным увеличением. Определите фокусное расстояние линзы.

На рисунке схематически изображено положение линзы, предмета и изображения на экране, образованного лучами, прошедшими через линзу.

Дано:

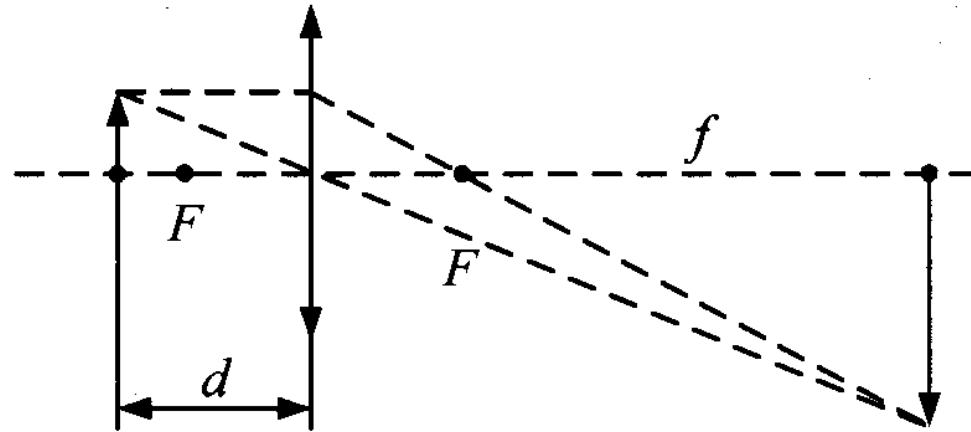
$$\Gamma = 5$$

$$\Delta f = 30 \text{ см}$$

$$\Gamma_1 = 3$$

Найти:

$$F$$



Лучи, проходящие через оптический центр не преломляются. Световой луч, падающий перпендикулярно на линзу, после преломления проходит через фокус.

Используя формулу для тонкой линзы $\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d}$,

где d — расстояние от линзы до предмета, f — расстояние от линзы до экрана, определяем фокусное расстояние линзы

$$F = \frac{fd}{f + d}.$$

Как следует из подобия треугольников (см. рис.), увеличение

Γ , даваемое линзой, определяется отношением $\Gamma = \frac{f}{d}$, что

позволяет записать фокусное расстояние линзы в виде

$$F = \frac{f \cdot f}{\Gamma(f + f/\Gamma)} = \frac{f}{\Gamma + 1} \quad (1)$$

После перемещения экрана на расстояние Δf для нового положения предмета и изображения можно записать выражение для фокусного расстояния:

$$F = \frac{f_1}{\Gamma_1} \quad \Gamma_1 = \frac{f_1}{d_1} \quad f_1 = f - \Delta f \quad F = \frac{f - \Delta f}{\Gamma_1 + 1} \quad (2)$$

где $\Gamma_1 = \frac{f_1}{d_1}$ — увеличение, даваемое линзой после перемещения экрана. Здесь $f_1 = f - l$ — расстояние от линзы до экрана, а d_1 — расстояние от линзы до предмета после перемещения экрана.

$$(1)=(2)$$

$$\frac{f}{\Gamma + 1} = \frac{f - \Delta f}{\Gamma_1 + 1}$$

$$f(\Gamma_1 - \Gamma) = -\Delta f(\Gamma + 1)$$

$$f = \frac{-\Delta f(\Gamma + 1)}{\Gamma_1 - \Gamma} \quad f = \frac{\Delta f(\Gamma + 1)}{\Gamma - \Gamma_1}$$

$$F = \frac{\Delta f(\Gamma - 1)}{(\Gamma - \Gamma_1)(\Gamma + 1)} = \frac{\Delta f}{\Gamma - \Gamma_1}$$

$$F = \frac{30 \text{ см}}{5 - 3} = 15 \text{ см}$$

Ответ: 15 см

Задача 3

На оси Ox в точке $x_1 = 0$ находится оптический центр тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 20$ см, а в точке $x_2 = 20$ см — тонкой собирающей линзы. Главные оптические оси обеих линз лежат на оси x . На рассеивающую линзу по оси x падает параллельный пучок света из области $x < 0$. Пройдя данную оптическую систему, лучи собираются в точке с координатой $x_3 = 60$ см. Найдите фокусное расстояние собирающей линзы F_2 .

Дано:

$$F_1 = 20\text{см}$$

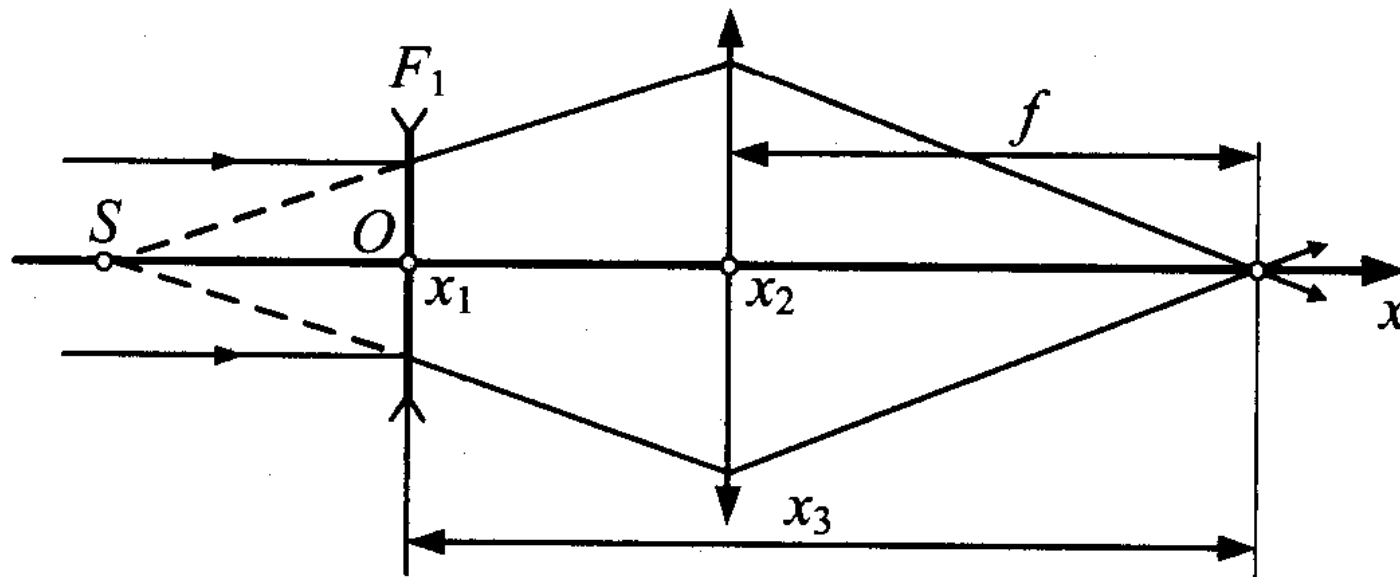
$$X_2 = 20\text{см}$$

$$X_3 = 60\text{см}$$

Найти:

$$F_2$$

Ход лучей через систему линз изображен на рисунке:



Согласно формуле рассеивания линзы: $-\frac{1}{|F_1|} = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{|f_1|}$

d_1 -расстояние от источника до рассеивающей линзы, f_1 -расстояние от изображения до рассеивающейся линзы.

Так как лучи падают на рассеивающую линзу параллельным пучком то:

$$d_1 \rightarrow \infty, \frac{1}{d_1} = 0$$

Тогда: $|F_1| = |f_1|$

Из рисунка видно, что: $OS = -f_1 = -F_1 = 20\text{см}$

Расстояние от источника до собирающей линзы: $d_2 = -f_1 + (x_2 - x_1)$

Расстояние от второй линзы до изображения: $f_2 = x_3 - x_2$

Согласно формуле собирающей линзы: $\frac{1}{F_2} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2}$ $F_2 = \frac{d_2 f_2}{d_2 + f_2}$

$$F_2 = \frac{(-f_1 + x_2 - x_1)(x_3 - x_2)}{-f_1 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2} = \frac{(-f_1 + x_2 - x_1)(x_3 - x_2)}{-f_1 - x_1 + x_3}$$

$$F_2 = \frac{(20\text{см} + 20\text{см})(60\text{см} - 20\text{см})}{20\text{см} + 60\text{см}} = 20\text{см}$$

Задачи для самостоятельного решения

На экране с помощью тонкой линзы получено изображение предмета с четырехкратным увеличением. Предмет передвинули на 1 см вдоль главной оптической оси линзы. Затем при неизменном положении линзы передвинули экран, чтобы изображение снова стало резким. В этом случае получено изображение с трехкратным увеличением. На сколько пришлось передвинуть экран относительно его первоначального положения?

Ответ: $\Delta f = 12\text{ см}$

На оси Ox в точке $x_1 = 15$ см находится оптический центр тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = -15$ см, а в точке $x_2 = 27,5$ см – тонкой собирающей линзы. Главные оптические оси обеих линз совпадают с осью Ox . Свет от точечного источника, расположенного в точке $x = 0$, пройдя данную оптическую систему, распространяется параллельным пучком. Найдите фокусное расстояние собирающей линзы F_2 .

Ответ: $F_2 = 20\text{ см}$

На оси Ox в точке $x_1 = 0$ находится оптический центр тонкой рассеивающей линзы, с фокусным расстоянием $F_1 = -30$ см, а в точке $x_2 = 30$ см – тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_2 = 30$ см. Главные оптические оси обеих линз лежат на оси Ox . На рассеивающую линзу по оси x падает параллельный пучок света из области $x < 0$. Найдите координату x точки (в см), в которой соберется этот пучок, пройдя данную оптическую систему.

Ответ: $x = 90\text{ см}$

Линза, фокусное расстояние которой 20 см, дает на экране изображение предмета с четырехкратным увеличением. Экран подвинули к линзе вдоль ее главной оптической оси на 40 см. Затем при неизменном положении линзы передвинули предмет, чтобы изображение снова стало резким. Определите увеличение Γ во втором случае.

$$\Gamma = 2$$

Линза, фокусное расстояние которой 12 см, дает на экране изображение предмета с четырехкратным увеличением. Экран передвинули вдоль главной оптической оси линзы. Затем при неизменном положении линзы передвинули предмет, чтобы изображение снова стало резким. В этом случае получено изображение с трехкратным увеличением. На сколько пришлось сдвинуть предмет относительно его первоначального положения?

$$\Delta d = 1 \text{ см}$$

Линза, фокусное расстояние которой 15 см, дает на экране изображение предмета с пятикратным увеличением. Экран пододвинули к линзе вдоль ее главной оптической оси на 30 см. Затем при неизменном положении линзы передвинули предмет так, чтобы изображение снова стало резким. На какое расстояние сдвинули предмет относительно его первоначального положения?

Ответ: $\Delta d = 2 \text{ см}$

Задача 4

1. В кювете с жидкостью на глубине $h = 3$ см находится точечный источник света, который начинает смещаться по вертикали со скоростью $v = 10^{-3}$ м/с. На дне кюветы находится плоское зеркало, а на поверхности жидкости, на высоте $H = 4$ см от дна, плавает непрозрачный диск радиуса $R = 6$ см. Центр диска расположен на одной вертикали с источником света. Через какое время t источник света станет виден внешнему наблюдателю? Показатель преломления жидкости $n = \sqrt{2}$.

Дано:

$$h = 3 \text{ см}$$

$$V = 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$H = 4 \text{ см}$$

$$R = 6 \text{ см}$$

$$n = \sqrt{2}$$

СИ

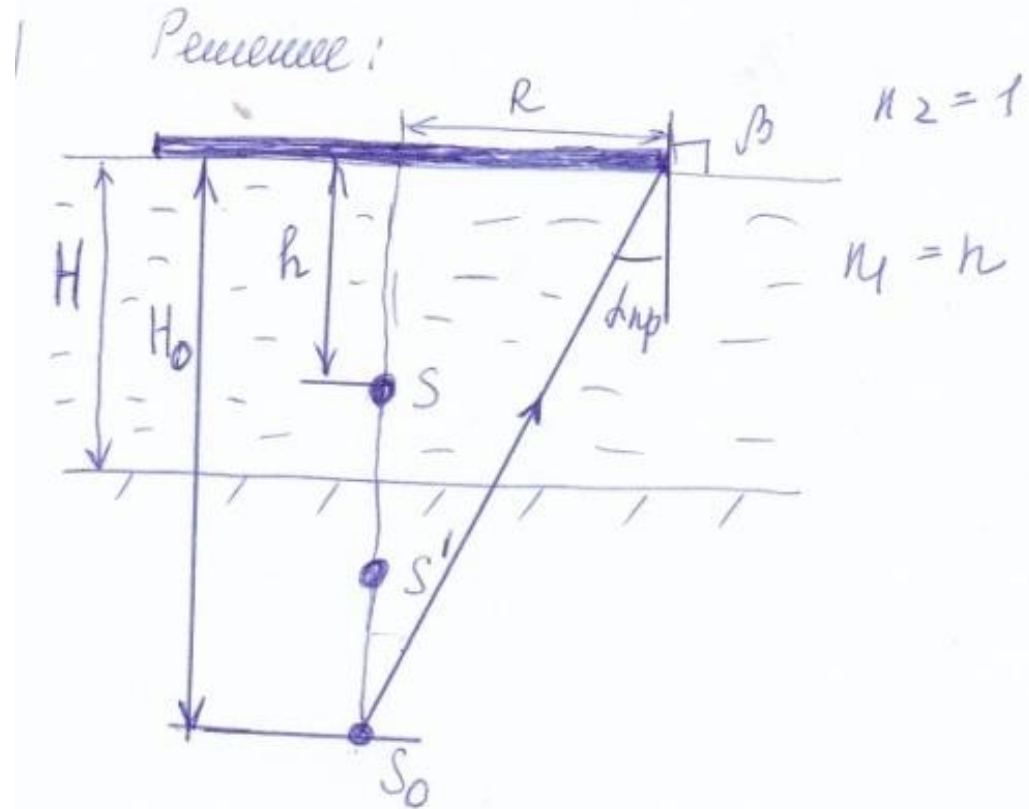
$$3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$6 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

Найти:

t



Учтем, что некоторый источник света S_0 , находящийся на оси диска, станет виден наблюдателю, если лучи от него будут падать на поверхность жидкости на краю Диска под углом, меньшим α_{np} - угла полного внутреннего отражения.

Так как закон преломления света:

$$\frac{\sin \alpha_{np}}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} \quad \sin \beta = 1 \quad \text{Т,К: } \beta = 90^\circ \quad \sin \alpha_{np} = \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ТО } \alpha_{np} = 45^\circ$$

Источник станет виден наблюдателю, если глубина его изображения будет не меньше

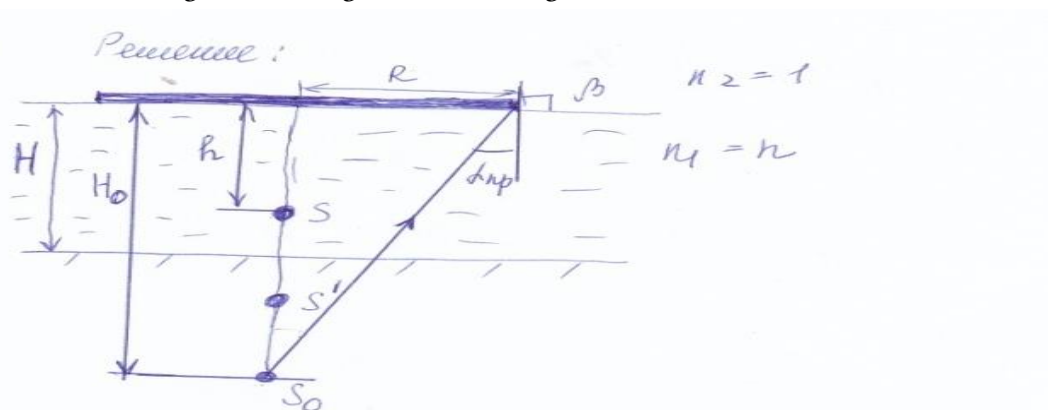
$$\operatorname{tg} \alpha_{np} = \frac{R}{H_0}, H_0 = \frac{R}{\operatorname{tg} \alpha_{np}} = R$$

На рис. видно, что в начальном положении S источника ни он сам, ни его зеркальное изображение S' не будут видны наблюдателю. Наблюдатель сможет увидеть изображение источника тогда, когда оно совпадет с S_0 . Для этого источник S должен двигаться вверх и пройти расстояние $S'S_0$ $S'S_0 = H_0 - (h + SS')$, $SS' = 2(H - h)$

$$S'S_0 = H_0 - (h + 2(H - h)) = H_0 - h - 2H + 2h = H_0 - 2H + h$$

время, через которое будет виден источник: $t = \frac{S'S_0}{v} = \frac{H_0 - 2H + h}{v} = \frac{R - 2H + h}{v}$

$$t = \frac{6 \cdot 10^{-2} \text{ м} - 2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \text{ м} + 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}}{10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{с}}} = \frac{10^{-2}}{10^{-3}} (6 - 8 + 3) \text{ с} = 10 \text{ с}$$



Ответ: $t=10\text{с}$

Задача 5

4. Лучи, идущие от предмета AB , проходят через линзы 1 и 2 (рис. 5.15). Если оставить только линзу 1 , то получим увеличение $\Gamma_1 = 2$, если оставить только линзу 2 , то увеличение станет $\Gamma_2 = 3$. Какое увеличение Γ создают эти линзы вместе? Предмет AB находится левее главных фокусов линз 1 и 2 .

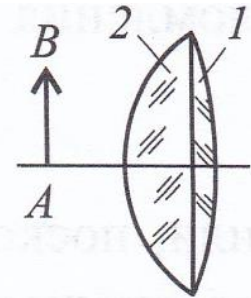


Рис. 5.15

Дано:

$$\Gamma_1 = 2$$

$$\Gamma_2 = 3$$

Найти:

Γ

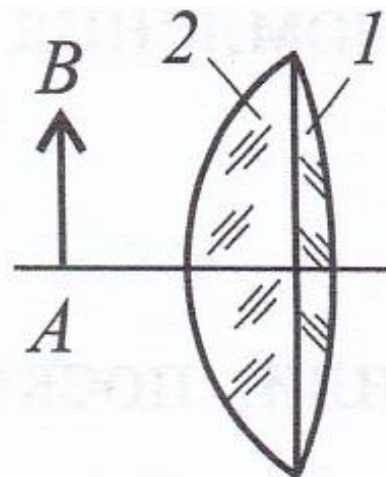


Рис. 5.15

Для линзы 1 из формулы линзы: $\frac{1}{F_1} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f_1}, D_1 = \frac{1}{F_1}$

F_1 -фокусное расстояние линзы 1

D_1 -оптическая сила линзы 1, d-расстояние от предмета до линзы 1; f1- расстояние до изображения в линзе 1.

$$D_1 = \frac{1}{d} + \frac{1}{f_1}$$

Увеличение линзы $\Gamma_1 = \frac{f_1}{d} \Rightarrow f_1 = d \cdot \Gamma_1$

Аналогичное выражение можно записать для линзы 2

$$D_2 = \frac{1}{d} + \frac{1}{f_2} \quad f_2 = d \cdot \Gamma_2$$

Подставим f1 и f2 в формулы линзы $D_1 = \frac{1}{d} + \frac{1}{d \cdot \Gamma_1} = \frac{1}{d} \left(1 + \frac{1}{\Gamma_1}\right)$ $D_2 = \frac{1}{d} \left(1 + \frac{1}{\Gamma_2}\right)$

Если обе линзы стоят вместе, то формула линзы принимает вид: $D_{12} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}, f = \Gamma \cdot d$

Γ - определяемое увеличение, D12 общая оптическая система двух линз.

$$D_{12} = D_1 + D_2 = \frac{1}{d} \left(1 + \frac{1}{\Gamma_1}\right) + \frac{1}{d} \left(1 + \frac{1}{\Gamma_2}\right) = \frac{1}{d} \left(1 + \frac{1}{\Gamma_1} + 1 + \frac{1}{\Gamma_2}\right) = \frac{1}{d} \left(2 + \frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2}\right)$$
$$D_{12} = \frac{1}{d} + \frac{1}{\Gamma \cdot d} = \frac{1}{d} \left(1 + \frac{1}{\Gamma}\right)$$
$$\frac{1}{d} \left(1 + \frac{1}{\Gamma}\right) = \frac{1}{d} \left(2 + \frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2}\right)$$
$$1 + \frac{1}{\Gamma} = 2 + \frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2}$$
$$\frac{1}{\Gamma} = 1 + \frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2}$$

$$\Gamma = \frac{1}{1 + \frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{6+3+2}{6}} = \frac{6}{11} \approx 0,55$$

Ответ: $\approx 0,55$

Задача 6

5. Две собирающие линзы с фокусными расстояниями $F_1 = F$ и $F_2 = \frac{F}{2}$ расположены на расстоянии $L = 2F$ друг от друга так, что их главные оптические оси совпадают. Предмет расположен на расстоянии $d_1 = \frac{3F}{2}$ слева от первой линзы L_1 . На каком расстоянии f_2 будет находиться изображение предмета и каково будет его увеличение? Определите положение главных фокусов Φ_1 и Φ_2 этой оптической системы.

Дано:

$$F_1 = F$$

$$F_2 = \frac{F}{2}$$

$$L = 2F$$

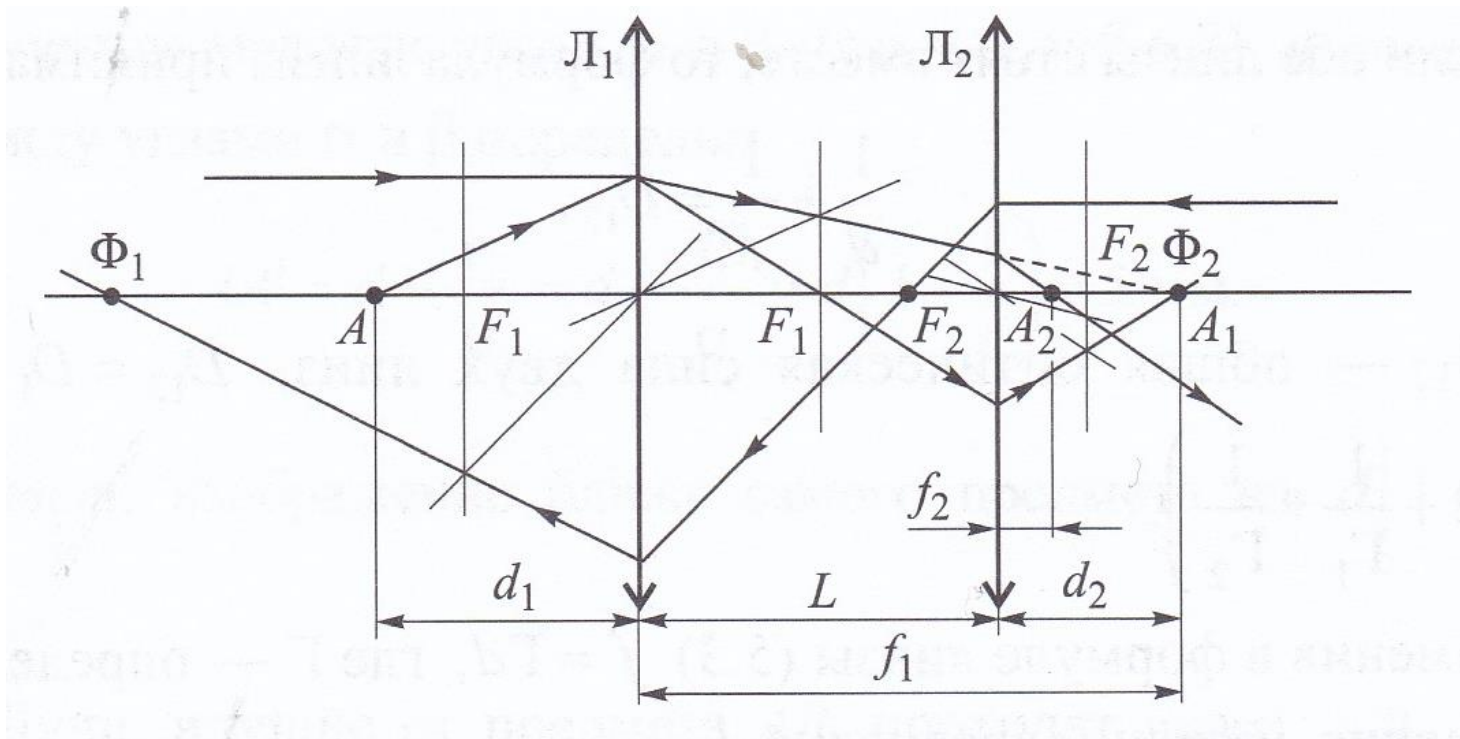
$$d_1 = \frac{3F}{2}$$

Найти:

$$f_2$$

$$\Gamma$$

$$\Phi_1, \Phi_2$$



Считаем, что предмет находится в т. А, тогда его изображение (точка А1) после линзы Л1 будет находиться на расстоянии f_1 , согласно формуле такой линзы:

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}; \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_1} - \frac{1}{d_1} = \frac{d_1 - F_1}{F_1 \cdot d_1}; f_1 = \frac{F_1 d_1}{d_1 - F_1} = \frac{F \frac{3F}{2}}{\frac{3F}{2} - F} = \frac{\frac{3}{2}F}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{\frac{3}{2}F}{\frac{1}{2}} = 3F$$

Увеличение линзы Л1:

$$\Gamma_1 = \frac{f_1}{d_1} = \frac{3F}{\frac{3}{2}F} = 2; \Gamma_1 = 2$$

Теперь определим положение изображение предмета А2 после второй линзы Л2. При этом точка А1 является мнимым предметом для линзы Л2

$$d_2 = L - f_1 = 2F - 3F = -F$$

Запишем формулу линзы $\frac{1}{F_2} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2}$

Найдем положение изображение (точку А2):

$$f_2 = \frac{F_2 d_2}{d_2 - F_2} = \frac{\frac{F}{2}(-F)}{-F - \frac{F}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}F}{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}F; f_2 = \frac{1}{3}F$$

Увеличение линзы 2:

$$\Gamma_2 = \frac{f_2}{d_2} = \frac{1}{3}$$

Общее увеличение системы

$$\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}; \Gamma = \frac{2}{3}$$

Для определения положения фокусов всей оптической системы рассмотрим ход лучей, Параллельных главной оптической оси, падающих на систему линз слева и справа. Луч, Падающий слева на линзу Л1, пересечет оптическую ось в ее фокусе F1 изображение Этой точки в линзе Л2 и будет одним из фокусов Ф2 системы:

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{d_2'} + \frac{1}{\Phi_2}; \Phi_2 = \frac{F_2 d_2'}{d_2' - F_2}$$

d_2' - расстояние от точки F1 до линзы Л2

$$d_2' = L - F_1 = 2F - F = F; d_2' = F$$

$$\Phi_2 = \frac{\frac{F}{F} \cdot F}{F - \frac{F}{2}} = \frac{F}{\frac{F}{2}} = 2 = F; \Phi_2 = F$$

т.е фокус совпадает с точкой А1

Положение второго фокуса системы определим из хода луча, параллельного главной оптической оси, падающего на линзу Л2 справа. Тогда в обратном ходе лучей этот луч Пересечет оптическую ось в точке F2, т.е для линзы Л1:

$$d_2' = L - F_1 = 2F - \frac{F}{2} = \frac{3}{2}F; d_1' = \frac{3}{2}F$$

$$\Phi_1 = \frac{F_1 d_1'}{d_1' - F_1} = \frac{F \cdot \frac{3}{2}F}{\frac{3}{2}F - F} = \frac{\frac{3}{2}F^2}{\frac{1}{2}F} = 3F; \Phi_1 = 3F$$

Ответ: $\Phi_2 = F$ $\Phi_1 = 3F$ $\Gamma = \frac{2}{3}$ $f_2 = \frac{1}{3}F$

Задача 7

Груз массой $0,1$ кг, прикрепленный к пружине жесткостью $0,4$ Н/м, совершает гармонические колебания с амплитудой $0,1$ м. При помощи собирающей линзы с фокусным расстоянием $0,2$ м изображение колеблющегося груза проецируется на экран, расположенный на расстоянии $0,5$ м от линзы. Главная оптическая ось линзы перпендикулярна траектории груза и плоскости экрана. Определите максимальную скорость изображения груза на экране.

Дано:

$$m = 0,1 \text{ кг}$$

$$K = 0,4 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

$$A = 0,1 \text{ м}$$

$$F = 0,2 \text{ м}$$

$$f = 0,5 \text{ м}$$

Найти:

V

V - максимальная скорость изображения груза на экране

U - максимальная скорость груза

Согласно закону сохранения энергии: $E_k = E_n$

E_k - кинетическая энергия груза

E_n - потенциальная энергия груза

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \quad (1)$$

$$v = \sqrt{\frac{kA^2}{m}}; v = A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Максимальная скорость груза прямо пропорциональна d , максимальная скорость изображения груза V прямо пропорциональна f .

$$\frac{v}{V} = \frac{d}{f} \quad (2) \quad d - \text{расстояние от линзы до груза}$$

Согласно формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d}; \frac{1}{d} = \frac{1}{F} - \frac{1}{f} = \frac{f - F}{Ff};$$

$$d = \frac{Ff}{f - F} \quad (3) \quad (3)-(2)$$

$$\frac{v}{V} = \frac{Ff}{(f - F)f} = \frac{F}{f - F}$$

$$V = \frac{(f - F)v}{F} = \left(\frac{f}{F} - 1\right)v$$

$$V = \left(\frac{f}{F} - 1\right) \cdot A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$V = \left(\frac{0,5 \text{ м}}{0,2 \text{ м}} - 1\right) \cdot 0,1 \text{ м} \sqrt{\frac{0,4 \frac{\text{Н}}{\text{м}}}{0,1 \text{ кг}}} = 0,3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$\text{Ответ: } V = 0,3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Задача 8

Небольшой груз, подвешенный на нити длиной $2,5$ м, совершает гармонические колебания, при которых его максимальная скорость достигает $0,2$ м/с. При помощи собирающей линзы с фокусным расстоянием $0,2$ м изображение колеблющегося груза проецируется на экран, расположенный на расстоянии $0,5$ м от линзы. Главная оптическая ось линзы перпендикулярна плоскости колебаний маятника и плоскости экрана. Определите максимальное смещение изображения груза на экране от положения равновесия.

Дано: Запишем закон сохранения энергии для груза

$l = 2,5 м$ $E_k = E_l$ E_k - максимальная кинетическая энергия груза

$v = 0,2 \frac{м}{с}$ E_l - максимальная потенциальная энергия груза

$F = 0,2 м$ $\frac{mv^2}{2} = mgh$ h - максимальная высота подъема груза

$f = 0,5 м$

Найти: $v = \sqrt{2gh}; (1)$ α - максимальный угол отклонения груза

A_1 $l - h = l \cdot \cos \alpha$ $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$

$h = l \cdot (1 - \cos \alpha)$ $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$

$h = 2 \cdot l \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$

$\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}; \sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha^2}{4}$ $(2) \Rightarrow (1)$ $v = \sqrt{2gl \frac{\alpha^2}{2}}; v = \alpha \sqrt{gl}; \alpha = \frac{v}{\sqrt{gl}}; (4)$

$h = 2 \cdot l \cdot \frac{\alpha^2}{4}; h = l \cdot \frac{\alpha^2}{2} (2)$

Амплитуда колебаний груза

$$A = \alpha \cdot l = \frac{v}{\sqrt{gl}} l = v \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Амплитуда A_1 колебаний изображения груза на экране, расположенном на расстоянии f от плоскости тонкой линзы, пропорциональна амплитуде A колебаний груза, движущегося на расстоянии d от плоскости линзы

$$\frac{A_1}{A} = \frac{f}{d}; A_1 = \frac{Af}{d}$$

$$A_1 = v \frac{f}{d} \sqrt{\frac{l}{g}} (5)$$

Согласно формуле тонкой линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}; \frac{1}{d} = \frac{1}{F} - \frac{1}{f} = \frac{f - F}{Ff};$$

$$d = \frac{Ff}{f - F} \quad (6)$$

$$(5) \Rightarrow (6)$$

$$A_1 = v \frac{f(f - F)}{Ff} \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$A_1 = v \left(\frac{f}{F} - 1 \right) \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$A_1 = 0,2 \frac{m}{c} \left(\frac{0,5m}{0,2m} - 1 \right) \sqrt{\frac{2,5m}{10 \frac{m}{c^2}}} = 0,15m$$

Ответ: 0,15м

Примеры оформления задач
3 балла

32. Дано:

$$A = 1 \text{ см}$$

$$\Delta x = 2 \text{ см}$$

$$D = 50 \text{ гнр}$$

$l = ?$

Решение:

Оптическая сила линзы: $D = \frac{1}{F}$, где F - фокусное
расстояние линзы $\Rightarrow F = \frac{1}{D}$, $F = \frac{1}{50 \text{ гнр}} = 0,02 \text{ м} = 2 \text{ см}$

Согласно формуле тонкой линзы.

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{F_1}, \quad \frac{1}{F} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{F_2}$$

d_1 - расстояние ^{от линзы} до ^{дальнего} крайнего положения предмета,
 d_2 - расстояние ^{от линзы} до ^{ближнего} крайнего положения предмета
 F_1 - ^{расстояние от линзы до} изображения ^{дальнего} крайнего положения
 F_2 - расстояние от линзы до ^{ближнего} изображения ^{дальнего} положения

$$\Rightarrow F_1 = \frac{d_1 F}{d_1 - F}, \quad F_2 = \frac{d_2 F}{d_2 - F}$$

Согласно условию $F_1 - F_2 = \Delta x$

$$\Rightarrow -\frac{d_2 F}{d_2 - F} + \frac{d_1 F}{d_1 - F} = \Delta x \Rightarrow (d_2 - d_1) F^2 = \Delta x (d_1 - F)(d_2 - F)$$

$$\Rightarrow d_2 F^2 - d_1 F^2 = \Delta x F^2 - \Delta x F d_1 - \Delta x F d_2 + \Delta x d_1 d_2$$

Так как d_2 и d_1 это расстояние от линзы до крайних положений, то

$$d_2 - d_1 = 2A \Rightarrow d_2 = (d_1 + 2A)$$

$$(d_1 + 2A) F^2 - d_1 F^2 = \Delta x F^2 - \Delta x F d_1 - \Delta x F (d_1 + 2A) + \Delta x d_1 (d_1 + 2A)$$

$$\Rightarrow \Delta x d_1^2 + (2\Delta x A - 2\Delta x F) d_1 + \Delta x F^2 - 2\Delta x F^2 - 2\Delta x F A = 0$$

$$D = (2\Delta x A - 2\Delta x F)^2 - 4\Delta x (\Delta x F^2 - 2\Delta x F^2 - 2\Delta x F A)$$

$$d_1 = \frac{2\Delta x (F - A) \pm \sqrt{4\Delta x^2 (A - F)^2 - 4\Delta x (\Delta x F^2 - 2\Delta x F^2 - 2\Delta x F A)}}{2\Delta x}$$

$$d_1 = \frac{2 \cdot 2 \text{ см} (2 \text{ см} - 1 \text{ см}) \pm \sqrt{4 \cdot (2 \text{ см})^2 (2 \text{ см} - 2 \text{ см})^2 - 4 \cdot 2 \text{ см} (2 \text{ см} \cdot (2 \text{ см})^2 - 2 \cdot 2 \text{ см} \cdot (2 \text{ см})^2 - 2 \cdot 2 \text{ см} \cdot 2 \text{ см} \cdot 1 \text{ см})}}{2 \cdot 2 \text{ см}}$$

$$= 1 \pm \sqrt{5} \text{ см}, \quad d_1 > 0 \Rightarrow d_1 = (1 + \sqrt{5}) \text{ см}$$

$$\Rightarrow d_2 = 1 + \sqrt{5} \text{ см} + 2 \cdot 1 \text{ см} = (3 + \sqrt{5}) \text{ см}$$

$$l = \frac{d_1 + d_2}{2} - F \Rightarrow l = \frac{(1 + \sqrt{5}) \text{ см} + (3 + \sqrt{5}) \text{ см}}{2} - 2 \text{ см} \approx 2,24 \text{ см}$$

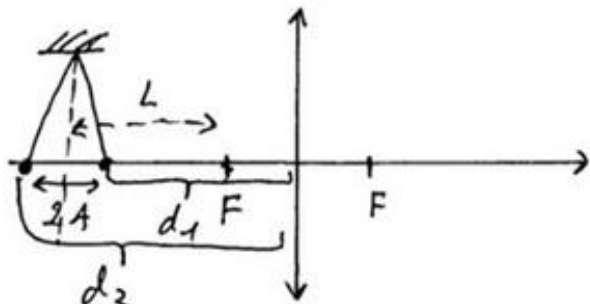
Ответ. $l \approx 2,24 \text{ см}$

Примеры оформления задач
2 балла

$L = \sqrt{5}$ см 1) $D = \frac{1}{F}$, где F - расстояние между мизом:

$D = 50$ гуны. $50 \text{ гуны} = \frac{1}{F'}$, $F = 0,02 \text{ м} = 2 \text{ см}$:

Намн:
 $|t_2 - t_1| = ?$



2) Волна поперечна мизомы сохрывает мизом: $\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}$,
 $\frac{1}{F} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2}$, где d_1, d_2 - расстояние между крайним паронешем и мизом, f_1, f_2 - расстояние между крайним паронешем и мизом.

3) $d_1 = L - A + F$; $d_2 = L - A + F + A = L + F$

4) $\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} \Rightarrow f_1 = \frac{F d_1}{d_1 - F}$, $f_2 = \frac{F d_2}{d_2 - F}$

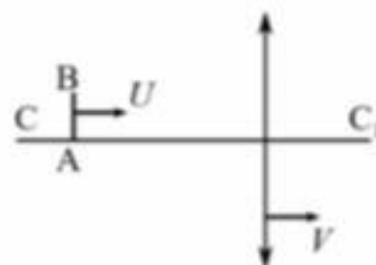
5) $|t_2 - t_1| = \left| \frac{F d_2}{d_2 - F} - \frac{F d_1}{d_1 - F} \right| = \left| \frac{F(L+F)}{L+F-F} - \frac{F(L-A+F)}{L-A+F-F} \right| =$
 $= \left| \frac{F(L+F)}{L} - \frac{F(L-A+F)}{L-A} \right|$

6) Поглемавим мизоме гуны: $t_2 - t_1 = \left| \frac{2 \text{ см} (\sqrt{5} \text{ см} + 2 \text{ см})}{\sqrt{5} \text{ см} - 1 \text{ см}} - \frac{2 \text{ см} (\sqrt{5} \text{ см} - 1 \text{ см} + 2 \text{ см})}{\sqrt{5} \text{ см} - 1 \text{ см}} \right| = \left| 3,788 \text{ см} - 5,236 \text{ см} \right| \approx 1,448 \text{ см}$

Ответ: $\approx 1,448 \text{ см}$.

Олимпиадные задачи по
геометрической оптике физтеха,
Ломоносова и Покори Воробьевы
горы

5. Линза с фокусным расстоянием $F = 20$ см движется со скоростью $V = 1$ мм/с (см. рис.). Стержень АВ длиной $h = 1$ см, расположенный перпендикулярно главной оптической оси линзы CC_1 , движется со скоростью $U = 3V/2$. Все движения поступательные вдоль главной оптической оси линзы. В некоторый момент стержень находится на расстоянии $d = 3F/2$ от линзы.



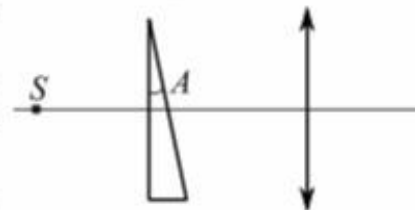
- 1) На каком расстоянии от линзы будет изображение стержня в этот момент?
- 2) Какой длины будет изображение стержня в этот момент?
- 3) С какой скоростью будет двигаться изображение точки А стержня в этот момент?

5. 1) $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$. $f = \frac{dF}{d-F} = \boxed{3F = 60}$ см.

2) Поперечное увеличение $\Gamma = \frac{f}{d} = 2$. Длина изображения $H = \Gamma h = \boxed{2h = 2}$ см.

3) Скорость стержня относительно линзы $V_{отн} = U - V = \frac{1}{2}V$. Скорость изображения точки А относительно линзы $V'_{отн} = \Gamma^2 V_{отн} = 2V$. Скорость изображения точки А $V_A = V'_{отн} + V = \boxed{3V = 3}$ мм/с.

5. Тонкая линза с фокусным расстоянием $F = 20$ см создает действительное изображение точечного источника света S , находящегося на главной оптической оси на расстоянии $d = 60$ см от линзы. Между источником и линзой на расстоянии $L = 30$ см от линзы помещают (см. рис.) тонкую стеклянную призму с малым преломляющим углом $A = 0,04$ радиан при вершине. Призма изготовлена из стекла с показателем преломления $n = 1,5$.



1) Найти расстояние f между линзой и изображением до помещения призмы.

2) На какой угол δ отклонится после прохождения призмы луч, идущий от источника вдоль главной оптической оси линзы?

3) Найти смещение изображения после помещения призмы.

Указание: при малых углах α справедливо $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$.

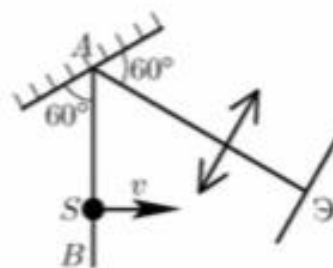
$$5. 1) f = \frac{dF}{d-F} = 30 \text{ см.}$$

$$2) \delta = (n-1)A = 0,02 \text{ рад.}$$

3) Смещение источника $h = (d-L)\delta$. Смещение изображения

$$H = h \frac{f}{d} = \frac{(d-L)\delta f}{d} = \frac{(d-L)(n-1)AF}{d-F} = 0,3 \text{ см.}$$

5. Оптическая система состоит из тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 18$ см, небольшого плоского зеркала и экрана Э (см. рис.). Плоскость зеркала составляет угол 60° с главной оптической осью линзы. Расстояние между линзой и зеркалом 20 см. Муха S пересекает линию AB , находясь на расстоянии 52 см от зеркала, двигаясь перпендикулярно AB и имея скорость $v = 9$ см/с.



- 1) На каком расстоянии от линзы надо поместить экран для наблюдения резкого изображения мухи?
- 2) Найдите скорость изображения на экране.

5. Обозначим $b = 52$ см, $c = 20$ см.

1) Изображение S_1 мухи в зеркале будет на расстоянии $b = 52$ см от зеркала, попадает на главную оптическую ось линзы, находится на расстоянии $d = b + c = 72$ см от линзы. Изображение в линзе попадает на экран на расстоянии $f = \frac{dF}{d - F} = 24$ см от линзы. Итак, расстояние между линзой и экраном $f = 24$ см.

2) Скорость изображения в зеркале равна скорости мухи v . Скорость изображения в линзе (на экране) $u = \Gamma v$. Здесь $\Gamma = \frac{f}{d}$ — поперечное увеличение. У нас $\Gamma = \frac{1}{3}$. Скорость на экране $u = \frac{1}{3}v = 3$ см/с.

5. Точечный источник света лежит на главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F . Расстояние от источника до центра линзы равно $2F$. На какое расстояние x сместится изображение источника, если линзу повернуть на угол α так, чтобы центр линзы остался неподвижным?

Решение. Когда линза не повернута, изображение находится от нее на расстоянии, равном $2F$. Ход лучей при построении изображения, даваемого повернутой линзой, приведен на рисунке штриховыми линиями. Так как один из лучей совпадает с главной оптической осью не повернутой линзы, изображение источника при повороте линзы останется

на той же прямой. Введем следующие обозначения (см. рисунок): $OA = a$, $OB = b$, $OD = y$. Тогда $x = y - 2F$.

Из подобия треугольников имеем:

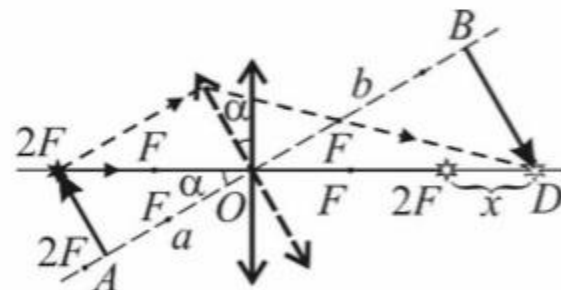
$\frac{2F}{a} = \frac{y}{b}$, откуда $y = \frac{2bF}{a}$, причем

$a = 2F \cos \alpha$. Из формулы тонкой линзы следует, что $b = \frac{aF}{a - F}$.

Объединяя записанные

выражения, находим, что $y = \frac{2F}{2 \cos \alpha - 1}$.

Ответ: $x = \frac{4F(1 - \cos \alpha)}{2 \cos \alpha - 1}$.



4. Дайте определения фокусного расстояния и оптической силы

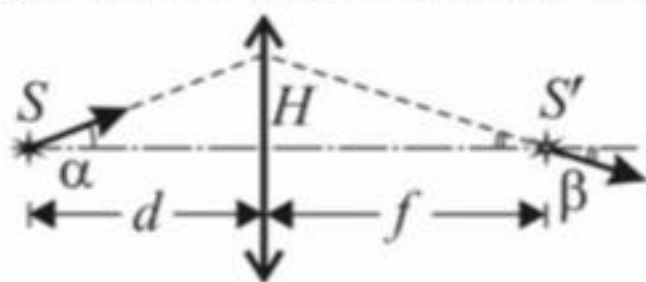
т

о **Задача.** Светящаяся точка S приближается к собирающей тонкой линзе и пересекает ее главную оптическую ось на расстоянии $d = 30$ см от линзы. В этот момент скорость точки составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с осью линзы. Найдите угол β между скоростью изображения S' точки S и главной оптической осью линзы в тот же момент времени. Фокусное расстояние линзы $F = 20$ см.

л **Решение.** При прямолинейном движении светящейся точки её изображение будет двигаться также по прямой. Из рисунка видно, что

н $\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{d}$; $\operatorname{tg} \beta = \frac{H}{f}$. Отсюда $\operatorname{tg} \beta = \frac{d}{f} \operatorname{tg} \alpha$.

н Применив формулу тонкой линзы $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$, находим, что $\operatorname{tg} \beta = \frac{d-F}{F} \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

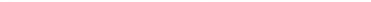


Ответ:

$\beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{d-F}{F} \cdot \operatorname{tg} \alpha \right) \approx \operatorname{arctg}(0,29) \approx 16^\circ$; изображение удаляется от линзы.

1. «Подводная оптика»

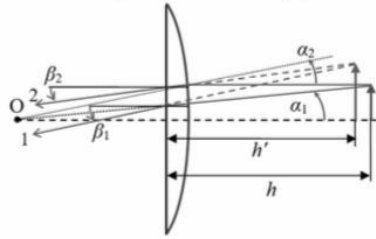
Однажды профессор Челленджер производил наблюдения за обитателями пруда с чистой водой. При этом он использовал плосковыпуклую тонкую линзу, фокусное расстояние которой в воздухе равнялось $F = 30$ см. Линза размещалась на поверхности воды (см. рисунок). Профессор рассматривал мелкий объект, находившийся точно под центром линзы на глубине $h = 63$ см. С каким поперечным увеличением был виден объект? Известно,



что показатель преломления стекла, из которого изготовлена линза $n_{\text{л}} = 2$, показатель преломления воды $n \approx \sqrt{2} \approx 1,414$. С каким поперечным увеличением был виден объект? Известно, что показатель преломления стекла, из которого изготовлена линза $n_{\text{л}} = 2$, показатель преломления воды $n \approx \sqrt{2} \approx 1,414$.

Решение: Рассмотрим два луча, падающей от крайней точки наблюдаемого объекта на линзу. Первый луч – идущий по радиусу сферической поверхности линзы. Он не преломляется на сферической поверхности линзы, и падает

под углом $\alpha_1 \approx \frac{l}{R+h}$ на ее плоскую поверхность. Здесь l – размер объекта, а R – радиус сферической поверхности (в этой и последующих выкладках мы считаем все углы малыми, а



27

толщиной линзы везде будем пренебрегать). После преломления на границе раздела стекло-воздух этот луч будет направлен под углом $\beta_1 \approx n_{\text{л}}\alpha_1 \approx \frac{n_{\text{л}}l}{R+h}$ к главной оптической оси линзы. Второй луч – идущий параллельно главной оптической оси линзы. Угол его падения на сферическую поверхность равен $\alpha_2 \approx \frac{l}{R}$, и после преломления на границе раздела вода-стекло он будет идти под углом $\alpha'_2 \approx \frac{l}{R} - \frac{n}{n_{\text{л}}} \frac{l}{R} = \frac{n_{\text{л}} - n}{n_{\text{л}}} \frac{l}{R}$ к главной оптической оси. После преломления на плоской поверхности этот угол станет равным $\beta_2 \approx n_{\text{л}}\alpha'_2 \approx \frac{(n_{\text{л}} - n)l}{R}$. Численный анализ позволяет заметить, что $\beta_1 > \beta_2$, и поэтому пересекаются продолжения этих лучей (то есть изображение объекта – мнимое). Обозначив h' расстояние от линзы до изображения, запишем два выражения для величины изображения: $l' \approx \frac{Rl}{R+h} + \beta_1 h' \approx l + \beta_2 h'$. Используя полученное соотношение как

уравнение для h' , находим: $h' = \frac{Rh}{nR - (n_{\text{л}} - n)h}$. Подставляя это

значение во второе выражение, определяем размер изображения $l' \approx l \cdot \left(1 + \frac{(n_{\text{л}} - n)h}{nR - (n_{\text{л}} - n)h}\right) = l \cdot \frac{nR}{nR - (n_{\text{л}} - n)h}$. Следовательно,

увеличение изображения $\Gamma = \frac{l'}{l} \approx \frac{nR}{nR - (n_{\text{л}} - n)h}$. Отметим, что для

плоско-выпуклой линзы с показателем преломления стекла $n_{\text{л}}$ в воздухе фокусное расстояние $F = \frac{R}{n_{\text{л}} - 1} \Rightarrow R = (n_{\text{л}} - 1)F$. Поэтому

$$\text{окончательно } \Gamma = \frac{l'}{l} \approx \frac{n(n_{\text{л}} - 1)F}{n(n_{\text{л}} - 1)F - (n_{\text{л}} - n)h} \approx 7,7.$$

Примечание: В этой задаче есть целый ряд «альтернативных» путей: можно мысленно добавить «над» линзой бесконечно тонкий слой воды.

28

Как известно, бесконечно тонкая параллельная пластина не вызовет смещения или преломления лучей, и задача сводится к анализу комбинации «линза в воде + преломление на границе раздела вода-воздух

(в этом случае ключевые формулы – это $\Gamma = n \frac{h'}{h}$, формула линзы

$$\frac{1}{h} - \frac{1}{nh'} = \frac{1}{F'}$$

и формулы для оптической силы линзы в воде $\frac{1}{F'} = \frac{n_{\text{л}} - n}{nR}$ и в воздухе $\frac{1}{F} = \frac{n_{\text{л}} - 1}{R}$). Также можно использовать

«обобщенную формулу линзы» для системы преломляющих поверхностей $-\frac{1}{h'} + \frac{n}{h} = \frac{n_{\text{л}} - n}{R}$ вместе с анализом хода одного из рассмотренных лучей. Но все эти пути должны приводить к тому же

ответу.

Ответ: $\Gamma = \frac{l'}{l} \approx \frac{n(n_{\text{л}} - 1)F}{n(n_{\text{л}} - 1)F - (n_{\text{л}} - n)h} \approx 7,7.$

Задание 4.

Вопрос: Пучок параллельных световых лучей падает на линзу с оптической силой $D_1 = -10$ дптр. На каком расстоянии за ней нужно поставить соосно линзу с оптической силой $D_2 = +2,5$ дптр, чтобы из второй линзы лучи пучка вышли параллельно?

Задача: Две тонкие линзы расположены на общей оптической оси на расстоянии L друг от друга. На той же оси на таком же расстоянии L от одной из них расположен точечный источник света. Если ближе к источнику размещена линза с большей оптической силой, то изображение источника находится на расстоянии $2L$ за дальней линзой. Если, не перемещая источник, переставить линзы, то изображение будет находиться на расстоянии $3L/2$ за дальней линзой. Найти фокусные расстояния обеих линз.

Ответ на вопрос: После прохождения первой (рассеивающей) линзы пучок станет расходящимся – продолжения лучей будут пересекаться в точке, лежащей в фокальной плоскости первой линзы. Эта точка будет играть роль точечного источника для второй (собирающей) линзы. Пучок выходящей из второй линзы лучей будет параллельным, если эта точка будет находиться в фокальной плоскости и второй линзы тоже. Поэтому расстояние между линзами должно равняться разности величин фокусного расстояния линз: $L = F_2 - |F_1| = \frac{1}{D_2} - \frac{1}{|D_1|} = 30$ см.

Решение задачи: В качестве первого шага получим общее соотношение, связывающее параметры системы из двух тонких линз, имеющих общую оптическую ось, с расстояниями до источника и изображения. Пусть F_1 и F_2 – фокусные расстояния линз, L – расстояние между ними, $a_{1,2}$ – расстояния до источников от каждой из линз, $b_{1,2}$ – расстояния до изображений. Расстояние от источника до системы есть расстояние до 1-ой линзы. Изображение, создаваемое 1-ой линзой, находится от нее на расстоянии, определяемом формулой линзы:

$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{F_1} \Rightarrow b_1 = \frac{a_1 F_1}{a_1 - F_1}$. Это изображение является источником для

второй линзы: $a_2 = L - b_1 = L - \frac{a_1 F_1}{a_1 - F_1} = \frac{L a_1 - F_1(L + a_1)}{a_1 - F_1}$. Вторично

применяя формулу линзы, получим:

$$b_2 = \frac{a_2 F_2}{a_2 - F_2} = \frac{F_2 [L a_1 - F_1(L + a_1)]}{L a_1 - F_1(L + a_1) - F_2 a_1 + F_1 F_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (L + a_1 + b_2) F_1 F_2 - (L + a_1) b_2 F_1 - (L + b_2) a_1 F_2 + L a_1 b_2 = 0$$

Теперь запишем это соотношение для двух ситуаций, описанных в условии задачи, обозначив фокусное расстояние линзы с большей оптической силой F_1 (т.е. считаем $F_1 < F_2$):

$$\begin{cases} 4 F_1 F_2 - 4 L F_1 - 3 L F_2 + 2 L^2 = 0 \\ \frac{7}{2} F_1 F_2 - \frac{5}{2} L F_1 - 3 L F_2 + \frac{3}{2} L^2 = 0 \end{cases}$$

Получена система двух уравнений относительно двух неизвестных F_1 и F_2 . Она имеет два решения: $F_1 = L$, $F_2 = 2L$ и $F_1 = 3L/8$, $F_2 = L/3$. Поскольку условию задачи удовлетворяет только первое из них, оно и дает правильный ответ.

Ответ: $F_1 = L$, $F_2 = 2L$.