Различные приемы решения заданий высокого уровня сложности

ОГЭ

ЗАДАНИЕ № 25

учитель математики
гимназии имени Ф.К. Салманова
Бочкарева О.А.

Задание высокого уровня сложности

Решение не алгоритмизировано:

- выбор методов решения;
- комбинация методов решения.

Большой объем известных фактов:

- отбор необходимых теорем и определений.

Работа с рисунком:

- много взаимосвязанных объектов;
- дополнительные построения.

Задание высокого уровня сложности

Решение не алгоритмизировано:

- выбор методов решения;
- комбинация методов решения.

Большой объем известных фактов:

- отбор необходимых теорем и определений.

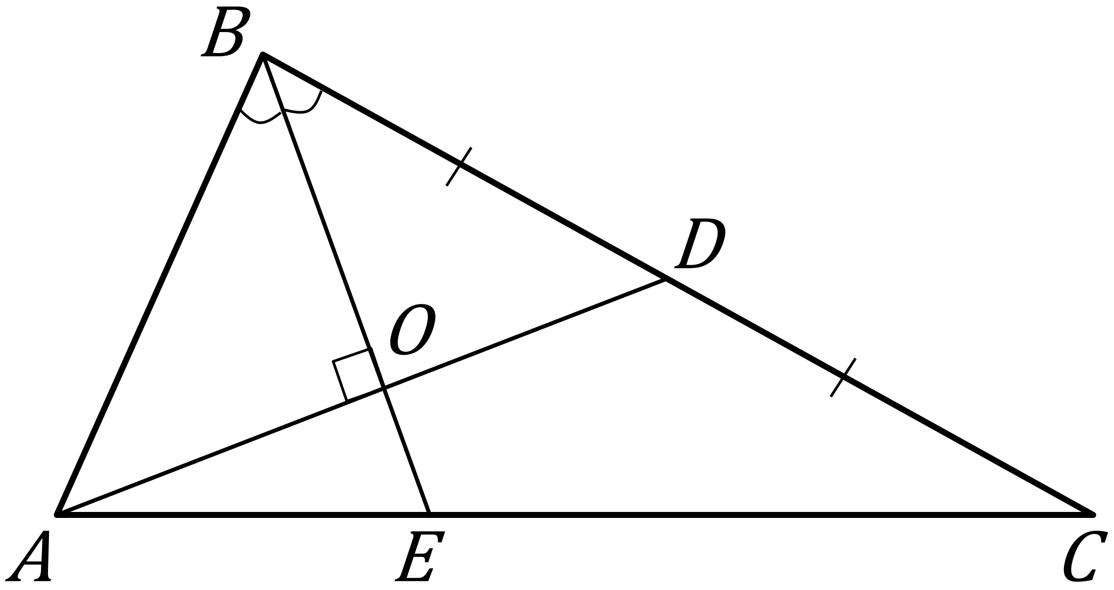
Работа с рисунком:

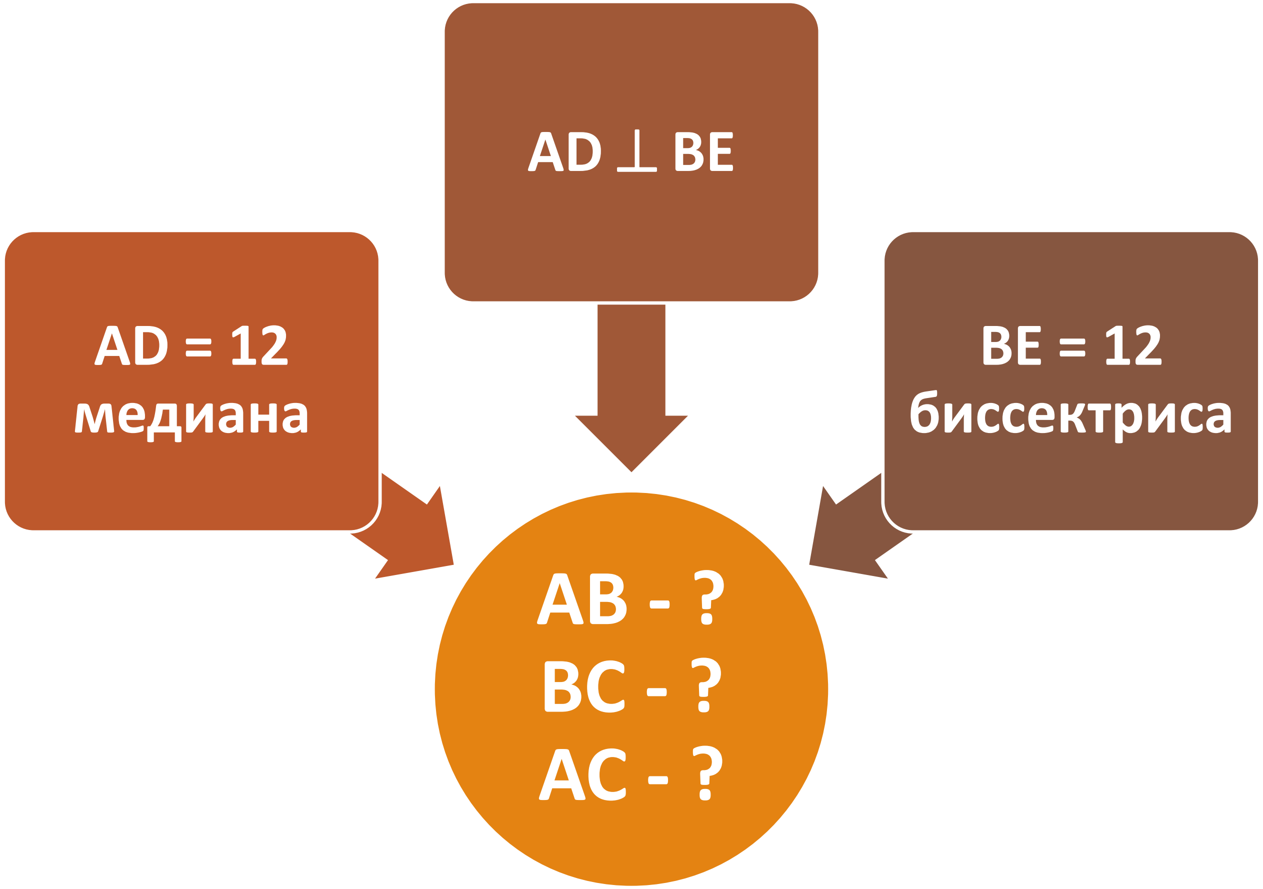
- много взаимосвязанных объектов;
- дополнительные построения.

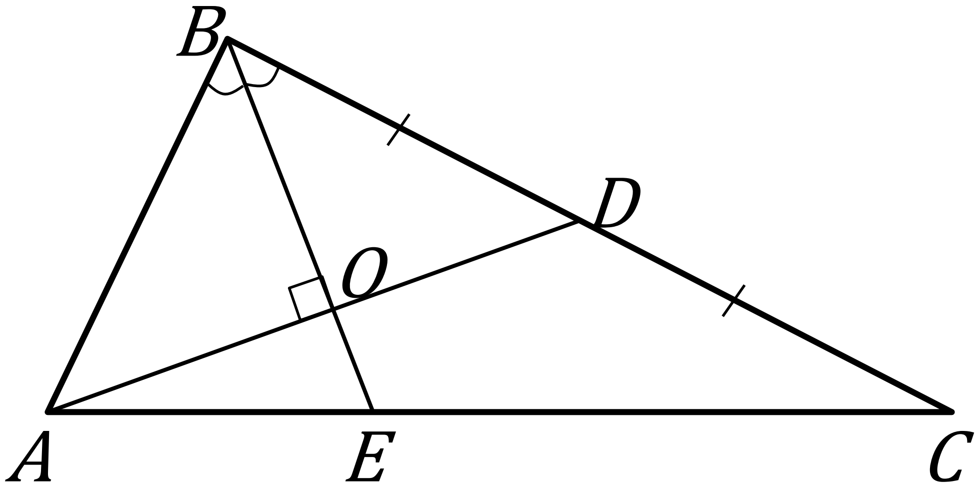
ПОИСК РЕШЕНИЯ

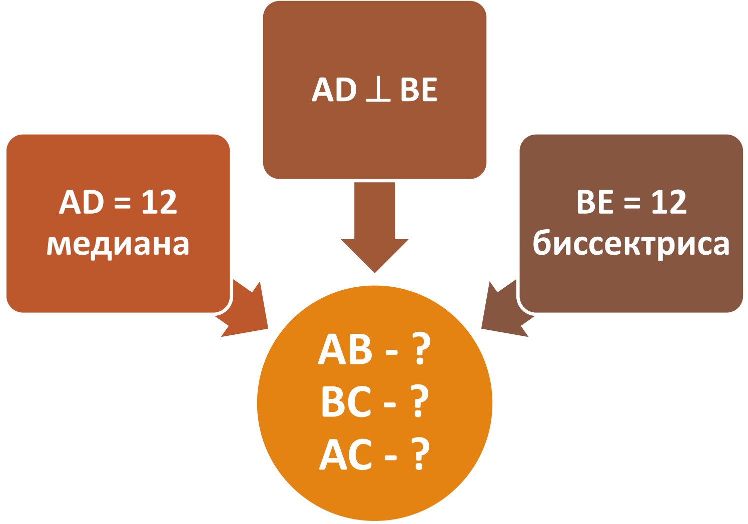
В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 12. Найдите стороны треугольника ABC.

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 12. Найдите стороны треугольника ABC.





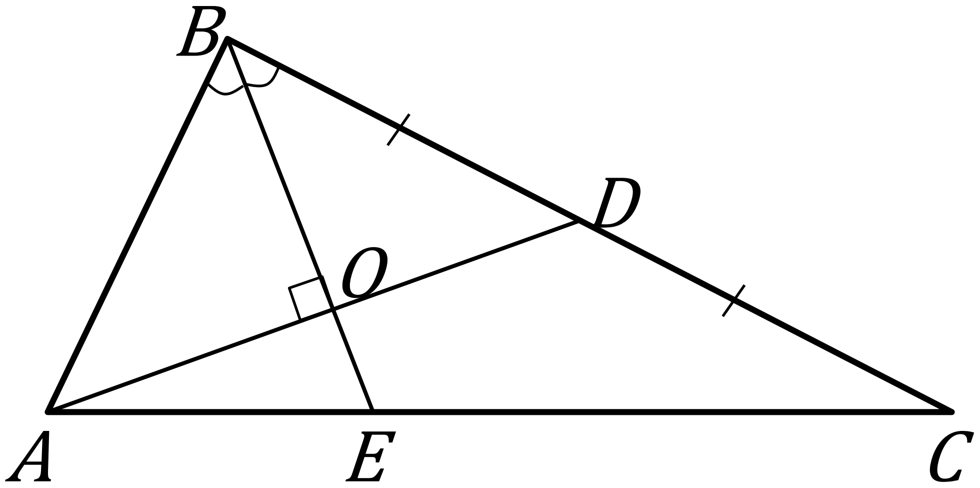




AC - ?

AB - ?

BC-?



AD = 12 медиана

AD ⊥ BE

BE = 12 биссектриса

AB - ?
BC - ?
AC - ?

AC - ?

AB - ?

BC-?

BE - биссектриса

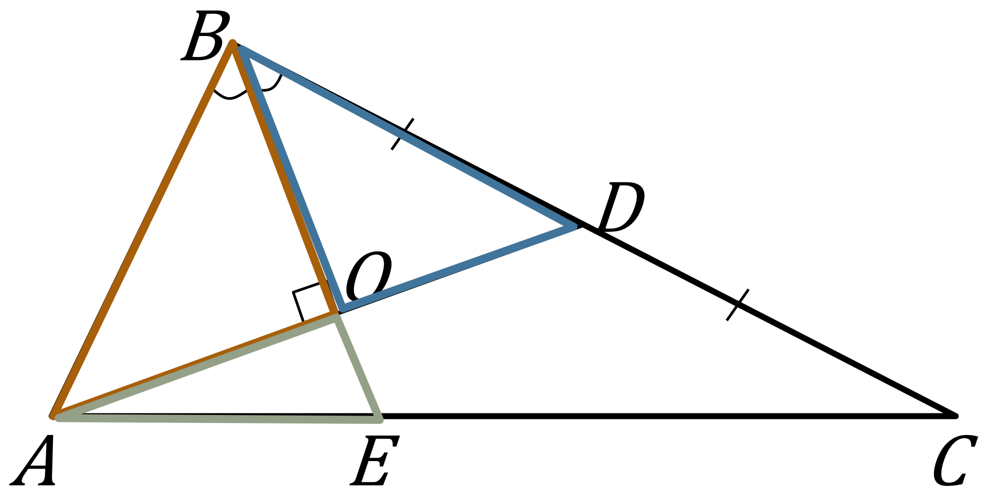
$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC}$$

ПОДОБИЕ

AD – медиана
BD = DC

$$S_{\Delta ABD} = S_{\Delta ACD}$$

ПЛОЩАДИ



AD = 12
медиана

AD ⊥ BE

BE = 12
биссектриса

AB - ?
BC - ?
AC - ?

AC - ?

BE - биссектриса

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC}$$

ПОДОБИЕ

AB - ?

AD ⊥ BE

Δ BOD – прямоугольный

$$BD^2 = OD^2 + BO^2$$

Δ ABO – прямоугольный

$$AB^2 = AO^2 + BO^2$$

Δ AOE – прямоугольный

$$AE^2 = AO^2 + OE^2$$

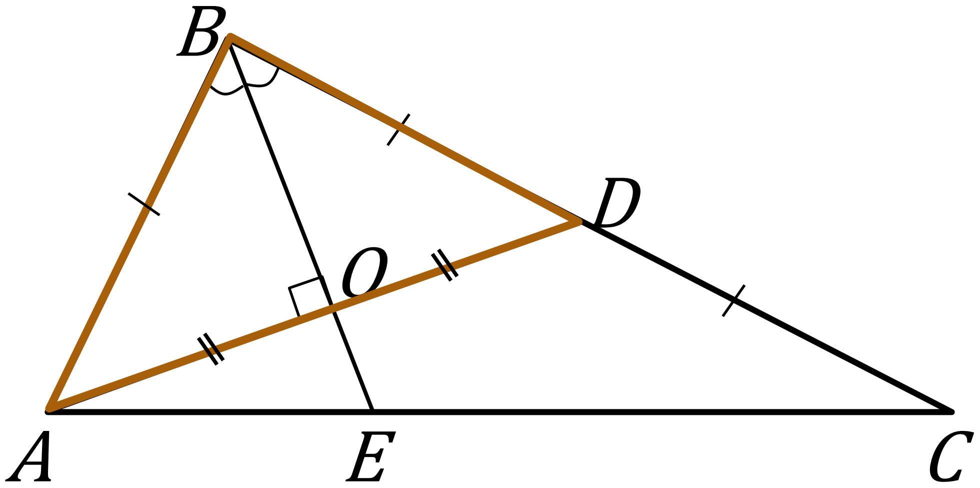
BC-?

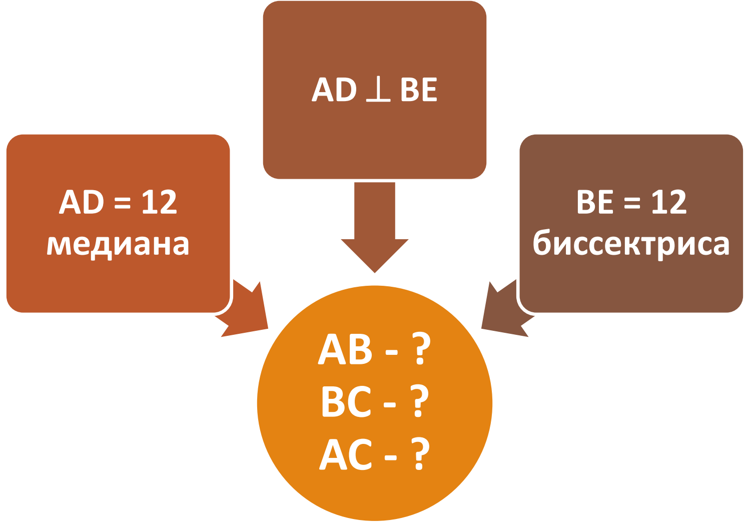
AD – медиана

BD = DC

$$S_{\Delta \text{ ABD}} = S_{\Delta \text{ ACD}}$$

ПЛОЩАДИ





AC - ?

AB - ?

BC-?

BE - биссектриса

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$$

ПОДОБИЕ

AD ⊥ BE

BE - биссектриса

AD – медиана

BD = DC

$$S_{\Delta ABD} = S_{\Delta ACD}$$

ПЛОЩАДИ

Δ BOD – прямоугольный

$$BD^2 = OD^2 + BO^2$$

Δ ABD – равнобедренный

Δ ABO – прямоугольный

$$AB^2 = AO^2 + BO^2$$

AB = BD.

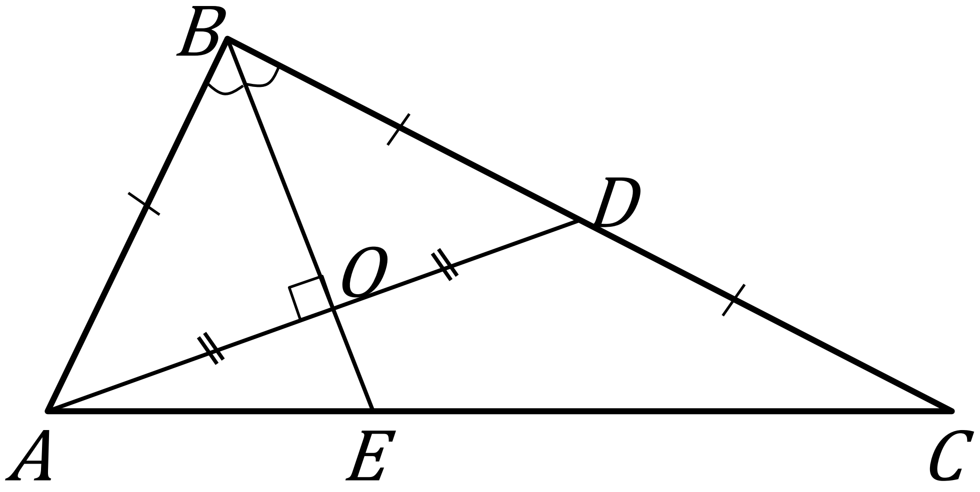
BO – медиана

AO = OD

$$S_{\Delta ABO} = S_{\Delta BOD}$$

Δ AOE – прямоугольный

$$AE^2 = AO^2 + OE^2$$



AD = 12
медиана

$AD \perp BE$

BE = 12
биссектриса

AB - ?
BC - ?
AC - ?

AC - ?

AB - ?

BC-?

BE - биссектриса

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$$

ПОДОБИЕ

$AD \perp BE$

BE - биссектриса

AD – медиана

BD = DC

$$S_{\Delta\, ABD} = S_{\Delta\, ACD}$$

ПЛОЩАДИ

Δ BOD – прямоугольный

$$BD^2 = OD^2 + BO^2$$

Δ ABD – равнобедренный

Δ ABO – прямоугольный

$$AB^2 = AO^2 + BO^2$$

AB = BD.

BO – медиана

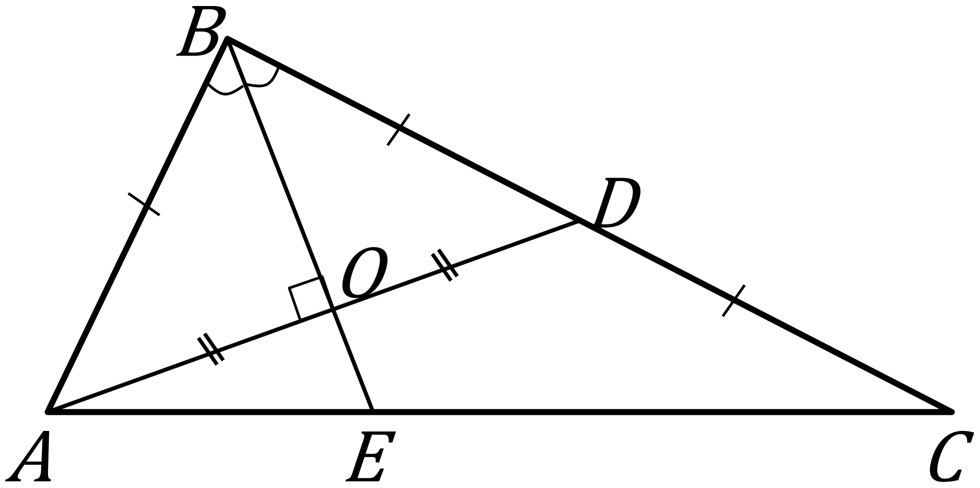
AO = OD

$$S_{\Delta\, ABO} = S_{\Delta\, BOD}$$

Δ AOE – прямоугольный

$$AE^2 = AO^2 + OE^2$$

AB - ?, AE - ?



AD ⊥ BE

AD = 12
медиана

BE = 12
биссектриса

AB - ?
BC - ?
AC - ?

AC - ?

BE - биссектриса

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$$

ПОДОБИЕ

AB - ?

BC-?

AD – медиана

BD = DC

$$S_{\Delta\,ABD} = S_{\Delta\,ACD}$$

ПЛОЩАДИ

AD ⊥ BE

BE - биссектриса

Δ BOD – прямоугольный

$$BD^2 = OD^2 + BO^2$$

Δ ABD – равнобедренный

Δ ABO – прямоугольный

$$AB^2 = AO^2 + BO^2$$

AB = BD.

BO – медиана

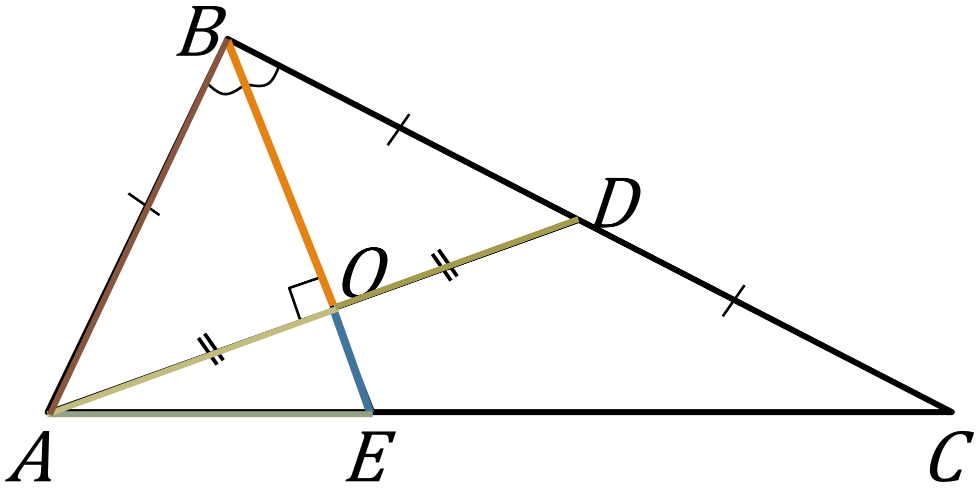
AO = OD = 6

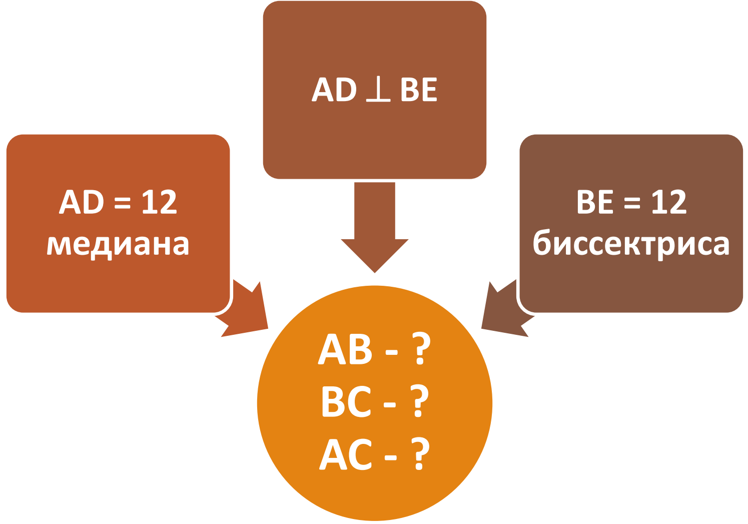
$$S_{\Delta\,ABO} = S_{\Delta\,BOD}$$

Δ AOE – прямоугольный

$$AE^2 = AO^2 + OE^2$$

AB - ?, AE - ?





AC - ?

AB - ?

BC-?

BE - биссектриса

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$$

ПОДОБИЕ

AD – медиана

BD = DC

$$S_{\Delta\ ABD} = S_{\Delta\ ACD}$$

ПЛОЩАДИ

AD ⊥ BE

BE - биссектриса

Δ BOD – прямоугольный

$$BD^2 = OD^2 + BO^2$$

Δ ABD – равнобедренный

Δ ABO – прямоугольный

$$AB^2 = AO^2 + BO^2$$

AB = BD.

BO – медиана

AO = OD = 6

$$S_{\Delta\ ABO} = S_{\Delta\ BOD}$$

Δ AOE – прямоугольный

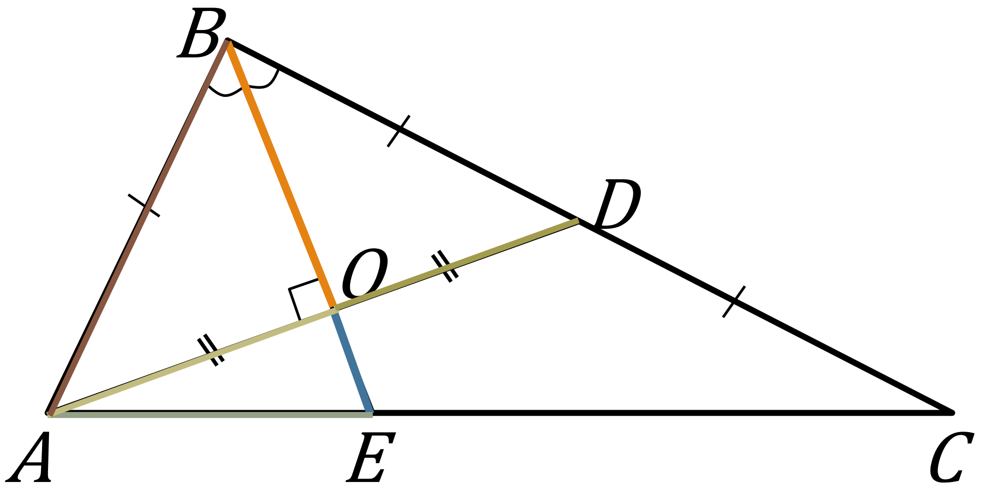
$$AE^2 = AO^2 + OE^2$$

AB - ?, AE - ? ⇒ BO - ?, OE - ?

Дополнительное построение

ПОДОБИЕ

ПЛОЩАДИ

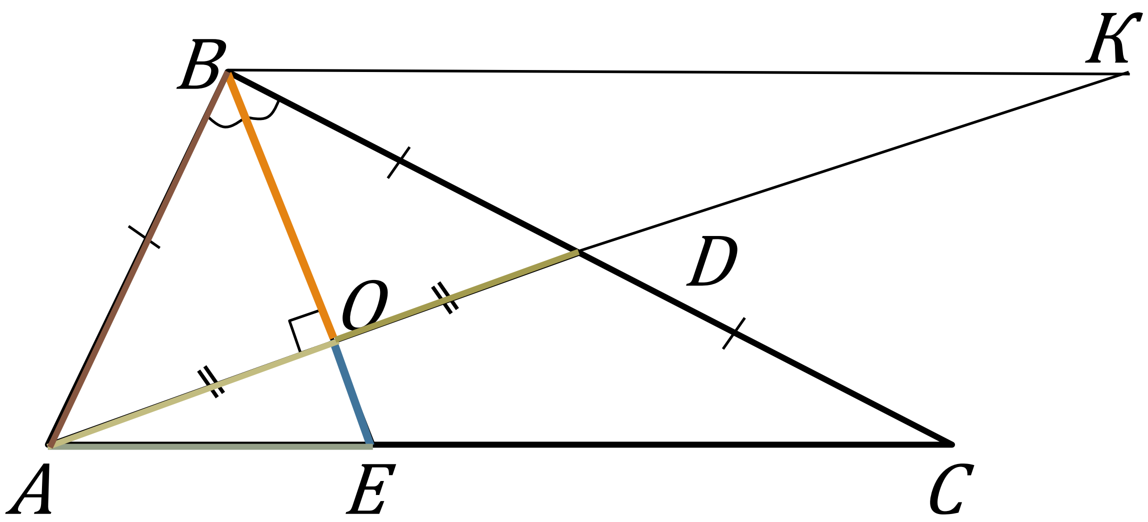


AB - ?, AE - ? ⇒ BO - ?, OE - ?

Дополнительное построение

ПОДОБИЕ

ПЛОЩАДИ



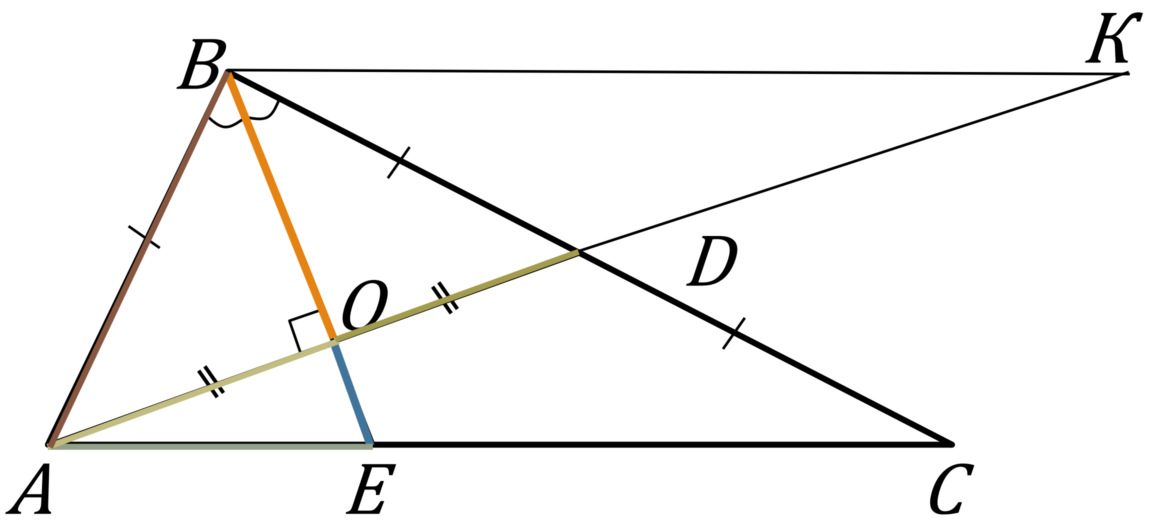
AD = DK

AB - ?, AE - ? $\Rightarrow$ BO - ?, OE - ?

Дополнительное построение

ПОДОБИЕ

ПЛОЩАДИ



AD = DK

АВКС – параллелограмм
АС = ВК
$\angle$ К = $\angle$ ОАЕ

$\Delta\, AOE \sim \Delta\, KOB$
$$\frac{AO}{KO} = \frac{OE}{OB} = \frac{AE}{BK}$$

АО = 6
ОК = 18

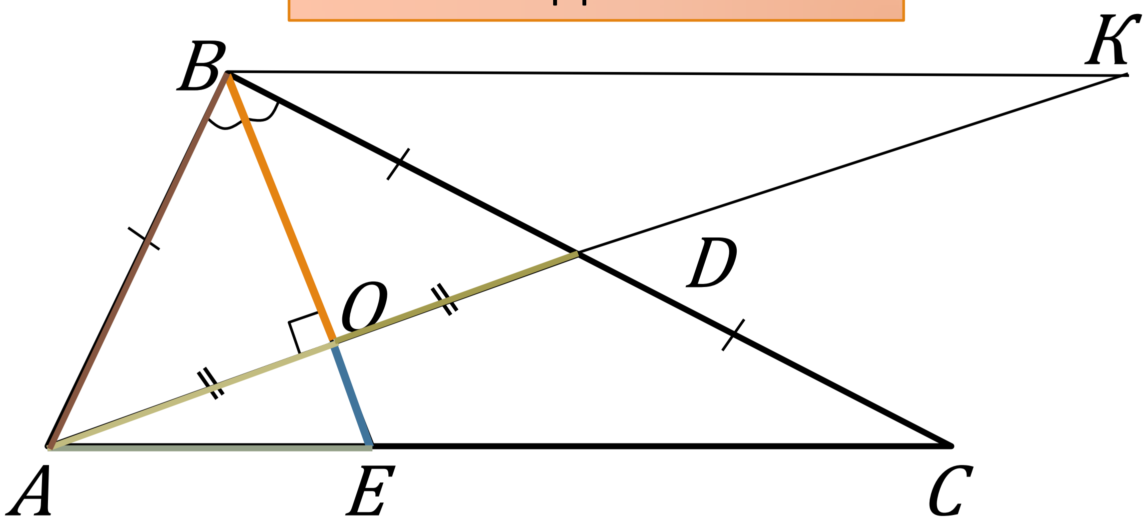
ОВ = 3ОЕ
АС = 3АС

ОВ = 9
ОЕ = 3

AB - ?, AE - ? $\Rightarrow$ BO - ?, OE - ?

Дополнительное построение

ПОДОБИЕ



AD = DK

АВКС – параллелограмм
AC = BK
∠ K = ∠ OAE

AO = 6
OK = 18

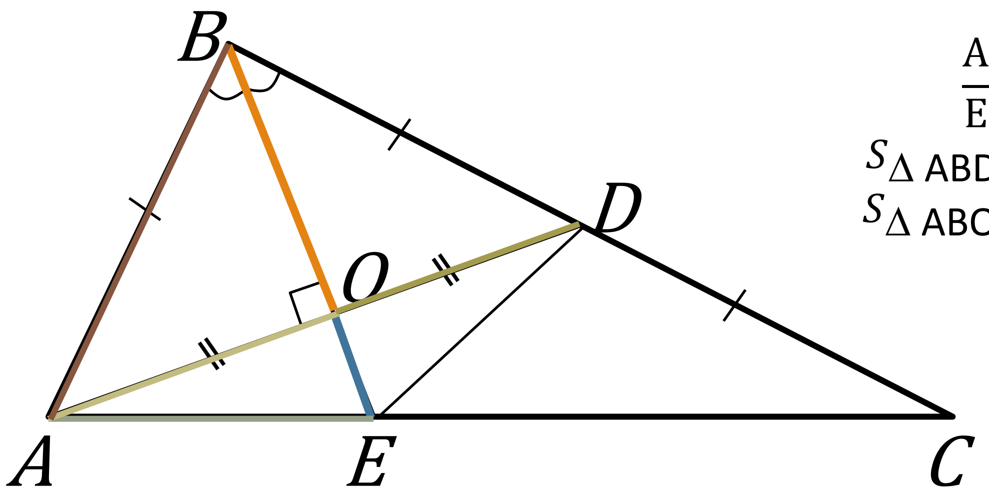
Δ AOE ~ Δ KOB

$$\frac{AO}{KO} = \frac{OE}{OB} = \frac{AE}{BK}$$

OB = 3OE
AC = 3AE

OB = 9
OE = 3

ПЛОЩАДИ



$$\frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$$

$S_{\Delta\ ABD} = S_{\Delta\ ACD}$

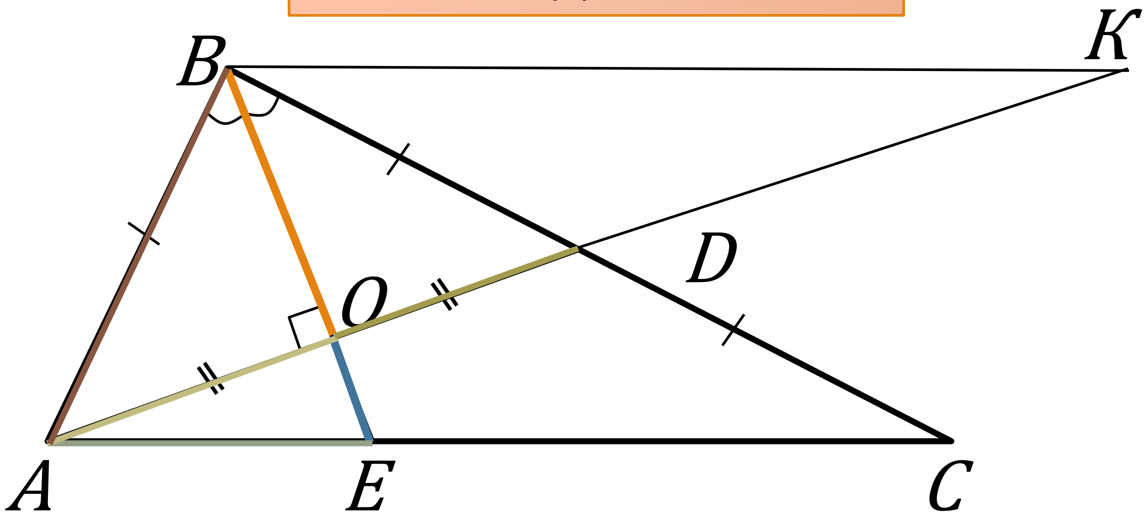
$S_{\Delta\ ABO} = S_{\Delta\ BOD}$

DE

AB - ?, AE - ? ⇒ BO - ?, OE - ?

Дополнительное построение

ПОДОБИЕ



AD = DK

АВКС – параллелограмм
AC = BK
$\angle$ K = $\angle$ OAE

AO = 6
OK = 18

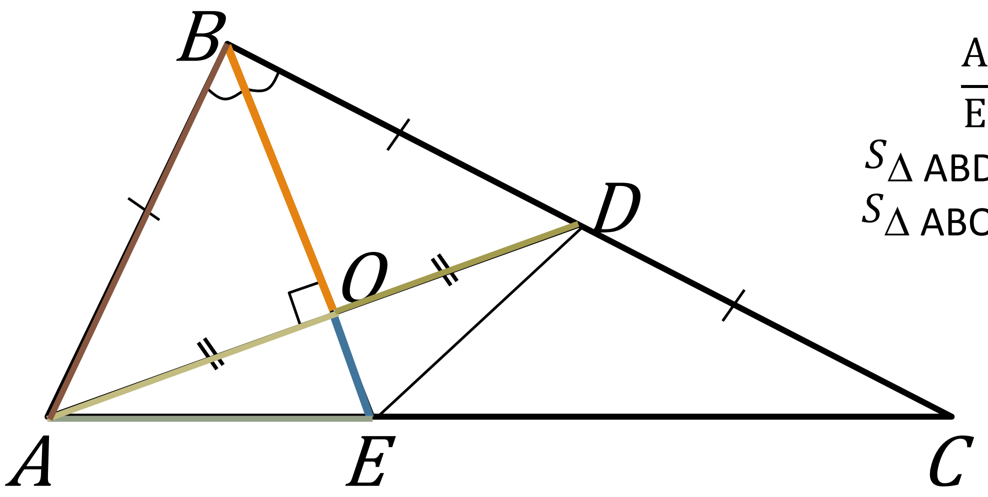
$\Delta\, AOE \sim \Delta\, KOB$

$$\frac{AO}{KO} = \frac{OE}{OB} = \frac{AE}{BK}$$

OB = 3OE
AC = 3AE

OB = 9
OE = 3

ПЛОЩАДИ



$$\frac{\text{AE}}{\text{EC}} = \frac{1}{2}$$

$$S_{\Delta\ \text{ABD}} = S_{\Delta\ \text{ACD}}$$

$$S_{\Delta\ \text{ABO}} = S_{\Delta\ \text{BOD}}$$

DE

Δ ADE – равнобедренный
OE - медиана

$$S_{\Delta\ \text{AOE}} = S_{\Delta\ \text{DOE}}$$

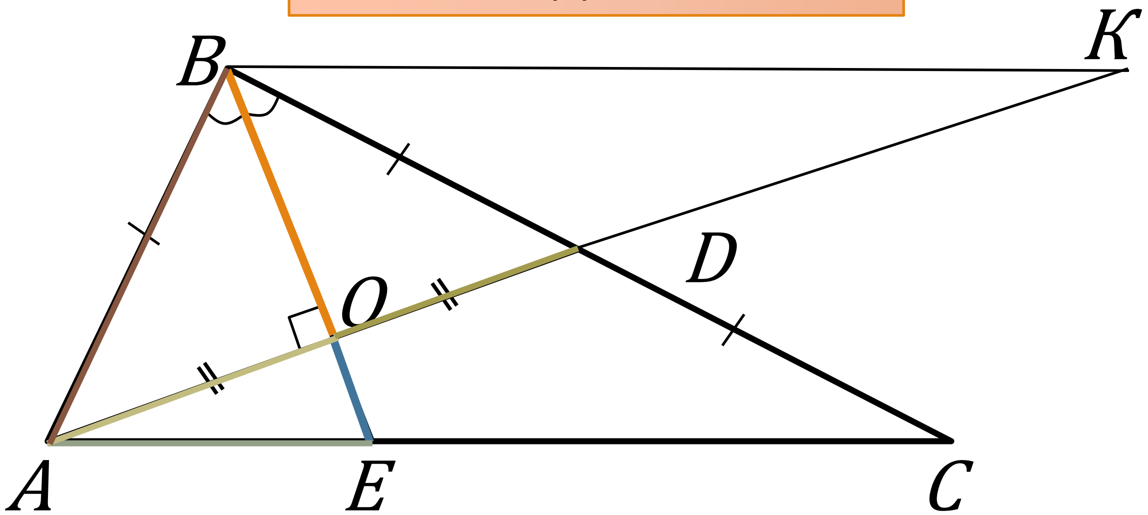
Δ ADC и Δ EDC
общий $\angle$C

$$\frac{S_{\Delta\ \text{ADC}}}{S_{\Delta\ \text{EDC}}} = \frac{AC \cdot DC}{EC \cdot DC} = \frac{3}{2}$$

AB - ?, AE - ? $\Rightarrow$ BO - ?, OE - ?

Дополнительное построение

ПОДОБИЕ



AD = DK

АВКС – параллелограмм
АС = ВК
$\angle$ К = $\angle$ ОАЕ

АО = 6
ОК = 18

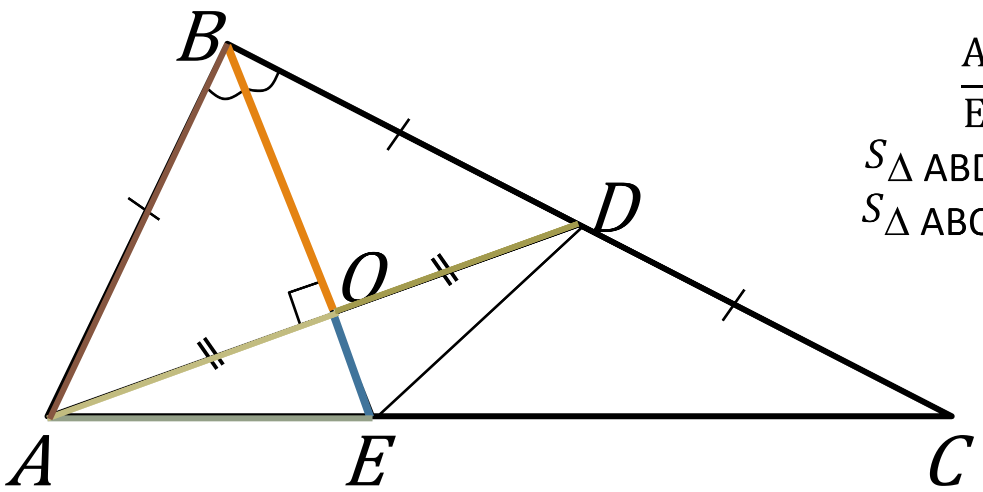
$\Delta AOE \sim \Delta KOB$

$$\frac{AO}{KO} = \frac{OE}{OB} = \frac{AE}{BK}$$

ОВ = 3ОЕ
АС = 3АЕ

ОВ = 9
ОЕ = 3

ПЛОЩАДИ



$$\frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$$

$$S_{\Delta\ ABD} = S_{\Delta\ ACD}$$

$$S_{\Delta\ ABO} = S_{\Delta\ BOD}$$

DE

Δ ADE – равнобедренный
OE - медиана

$S_{\Delta\ AOE} = S_{\Delta\ DOE}$

Δ ADC и Δ EDC
общий $\angle$C

$$\frac{S_{\Delta\ ADC}}{S_{\Delta\ EDC}} = \frac{AC \cdot DC}{EC \cdot DC} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} S_{\Delta\ EDC} = 2S_{\Delta\ AOE} + S_{\Delta\ EDC} \Leftrightarrow S_{\Delta\ EDC} = 4S_{\Delta\ AOE}$$

$$S_{\Delta\ ABD} = S_{\Delta\ ACD} = 6S_{\Delta\ AOE} \Rightarrow S_{\Delta\ ABO} = S_{\Delta\ BOD} = 3S_{\Delta\ AOE}$$

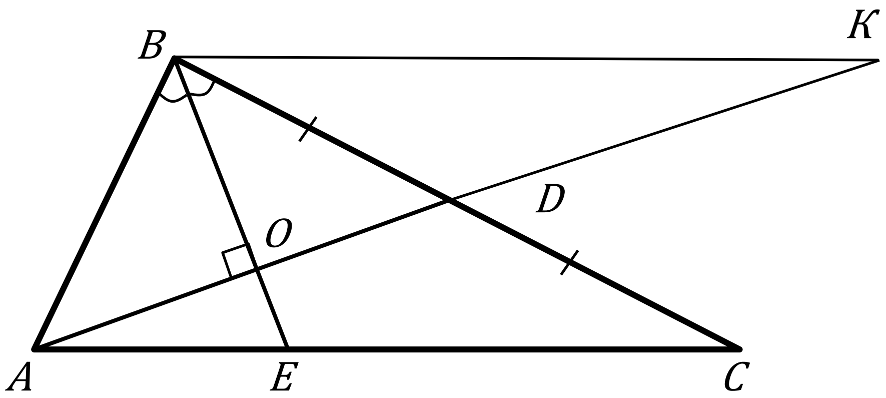
$$\frac{S_{\Delta\ ABO}}{S_{\Delta\ AOE}} = \frac{AO \cdot OB}{AO \cdot OE} = \frac{3}{1}$$

ОВ = 9
ОЕ = 3

АВ - ?, АЕ - ? $\Rightarrow$ ВО - ?, ОЕ - ?

Дополнительное построение

ПОДОБИЕ



Дополнительное построение: на продолжении медианы AD построим отрезок DK = AD.

AD – медиана ΔABC ⇒ BD = DC.

Значит, ABKC – параллелограмм ⇒ AC = BK, ∠ K = ∠ OAE.

AD ⊥ BE ⇒ ∠ AOE = ∠ KOB.

Значит, Δ AOE ~ Δ KOB ⇒ $\frac{AO}{KO} = \frac{OE}{OB} = \frac{AE}{BK}$.

AD ⊥ BE и BE – биссектриса ∠ ABC ⇒ Δ ABD – равнобедренный, BO – медиана ⇒ AB = BD, AO = OD = 6. Поэтому OK = 18.

Значит, $\frac{OE}{OB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$ ⇒ OE = 3, OB = 9.

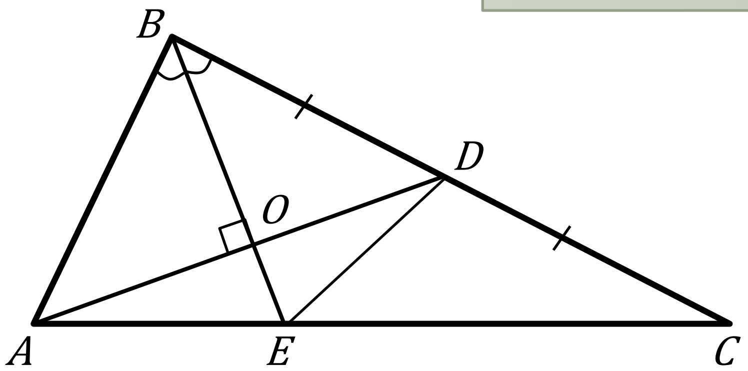
AD ⊥ BE , следовательно:

1) Δ ABO – прямоугольный, по теореме Пифагора $AB^2 = AO^2 + BO^2, AB = 3\sqrt{13}$.

Так как AB = BD, BD = DC ⇒ BC $= 6\sqrt{13}$.

2) Δ AOE – прямоугольный, по теореме Пифагора $AE^2 = AO^2 + OE^2\ AE = 3\sqrt{5} \Rightarrow AC = 9\sqrt{5}$.

ПЛОЩАДИ



Дополнительное построение: отрезок DE.

AD – медиана ΔABC ⇒ BD = DC, $S_{\Delta\ ABD} = S_{\Delta\ ACD}$.

AD ⊥ BE и BE – биссектриса ∠ ABC ⇒ Δ ABD – равнобедренный, BO – медиана ⇒ AB = BD, AO = OD = 6, $S_{\Delta\ ABO} = S_{\Delta\ BOD}$.

BE – биссектриса ΔABC ⇒ $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AC}{EC} = \frac{3}{2}$.

AO = OD ⇒ OE – медиана Δ ADE ⇒ $S_{\Delta\ AOE} = S_{\Delta\ DOE}$.

Δ ADC и Δ EDC - общий ∠C ⇒ $\frac{S_{\Delta\ ADC}}{S_{\Delta\ EDC}} = \frac{AC\cdot DC}{EC\cdot DC} = \frac{3}{2}$.

$$S_{\Delta\ ADC} = S_{\Delta\ AOE} + S_{\Delta\ DOE} + S_{\Delta\ EDC} \Leftrightarrow \frac{3}{2} S_{\Delta\ EDC} = 2S_{\Delta\ AOE} + S_{\Delta\ EDC} \Leftrightarrow S_{\Delta\ EDC} = 4S_{\Delta\ AOE}.$$

Значит, $S_{\Delta\ ABD} = S_{\Delta\ ACD} = 6S_{\Delta\ AOE} \Rightarrow S_{\Delta\ ABO} = S_{\Delta\ BOD} = 3S_{\Delta\ AOE} \Rightarrow \frac{S_{\Delta\ ABO}}{S_{\Delta\ AOE}} = \frac{AO\cdot OB}{AO\cdot OE} = \frac{3}{1}$ ⇒ OE = 3, OB = 9.

AD ⊥ BE , следовательно:

1) Δ ABO – прямоугольный, по теореме Пифагора $AB^2 = AO^2 + BO^2, AB = 3\sqrt{13}$.

Так как AB = BD, BD = DC ⇒ BC $= 6\sqrt{13}$.

2) Δ AOE – прямоугольный, по теореме Пифагора $AE^2 = AO^2 + OE^2\ AE = 3\sqrt{5} \Rightarrow AC = 9\sqrt{5}$.

Ответ: $AB = 3\sqrt{13}$, BC $= 6\sqrt{13}$, $AC = 9\sqrt{5}$.