К НОВОЙ ОФИЦИАЛЬНОЙ ВЕРСИИ

ЕГЭ 2019

Ю. В. Садовничий

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

100 БАЛЛОВ

эффективный тренинг

- Все типы задач с параметром
- Систематизация по типам
- Основные методы решения
- Разбор решений примеров
- Ответы к задачам для самостоятельного решения

Издательство ЭКЗАМЕН®

Ю. В. Садовничий

ЕГЭ 100 БАЛЛОВ

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

Все типы задач с параметром
Систематизация по типам
Основные методы решения
Разбор решений примеров
Ответы к задачам
для самостоятельного решения

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА, 2019

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
С14

Садовничий Ю. В.

С14 ЕГЭ 2019. 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Задачи с параметром / Ю. В. Садовничий. — М. : Издательство «Экзамен», 2019. — 126, [2] с. (Серия «ЕГЭ. 100 баллов»)

ISBN 978-5-377-13612-5

Данная книга посвящена задачам ЕГЭ по математике (задачи с параметром). Рассматриваются различные методы решения таких задач, также большое внимание уделяется графическим иллюстрациям. Книга необходима учащимся старших классов, учителям математики, репетиторам.

Приказом № 699 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Формат 60x90/16.
Гарнитура «Таймс». Бумага газетная. Уч.-изд. л. 4,38.
Усл. печ. л. 8. Тираж 6000 экз. Заказ № 5040.

ISBN 978-5-377-13612-5

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данная книга посвящена задачам, аналогичным задаче 18 ЕГЭ по математике (задача с параметром). Наряду с задачей 19 (задача, при решении которой используются свойства целых чисел) задача 18 является наиболее сложной в варианте. Тем не менее в книге предпринята попытка систематизировать задачи данного типа по различным методам их решения.

Несколько параграфов посвящены, казалось бы, такой популярной теме, как исследование квадратного трехчлена. Однако подчас подобные задачи требуют разных, порой самых неожиданных подходов к их решению. Один из таких нестандартных подходов продемонстрирован в примере 7 параграфа 2.

Часто при решении задачи с параметром необходимо исследовать данную в условии функцию. В книге формулируются некоторые утверждения, касающиеся таких свойств функций, как ограниченность, четность, непрерывность; после на примерах демонстрируется применение этих свойств к решению задач.

Отдельный параграф посвящен задачам с параметром, которые решаются перебором всех логически возможных вариантов. Как правило, такая задача имеет в своем условии фразу «решить при всех значениях параметра» и подразумевает развернутый ответ.

В последних двух параграфах рассказывается о применении графических иллюстраций для решения задач с параметром. При этом используются как иллюстрации на плоскости Oxy, так и метод «*Оха*», которому посвящен последний параграф.

Каждый параграф книги содержит теоретический материал, несколько разобранных примеров, в которых демонстрируются различные методы решения задач по данной теме, а также задачи для самостоятельного решения, снабженные ответами.

Автор надеется, что данная книга будет полезна учащимся старших классов для самостоятельной подготовки к ЕГЭ, а также учителям математики, репетиторам и всем тем, кто интересуется данной темой.

Желаем успехов!

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дано уравнение $ax = b$, где a и b — параметры. Это уравнение имеет единственное решение $x = \frac{b}{a}$, если $a \neq 0$. Если $a = 0$, а $b \neq 0$, то данное уравнение решений не имеет. И, наконец, если $a = b = 0$, то решений бесконечно много (решением является любое число $x \in R$).

При исследовании системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными возможен как алгебраический, так и геометрический подход. Можно выразить какую-либо переменную из одного уравнения и подставить в другое, тогда задача сведется к исследованию линейного уравнения с одной переменной. Можно также сопоставить линейному уравнению с двумя переменными прямую на плоскости, для этого необходимы некоторые сведения из аналитической геометрии.

Общее уравнение прямой линии на плоскости записывается в виде $Ax + By + C = 0$, где хотя бы одно из чисел A и B отлично от нуля. Если $B \neq 0$, то такую прямую можно записать уравнением с угловым коэффициентом $y = kx + b$, если же $B = 0$, то эта прямая имеет вид $x = p$ и параллельна оси Oy. Сформулируем несколько утверждений о взаимном расположении двух прямых на плоскости.

Теорема 1. Пусть прямые l_1 и l_2 на координатной плоскости Oxy заданы соответственно уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тогда прямые l_1 и l_2 параллельны, но не совпадают в том и только в том случае, когда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

При этом равенство $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ понимается как пропорция, то есть если, например, $A_2 = 0$, то и $A_1 = 0$.

Теорема 2. Прямые l_1 и l_2, заданные на координатной плоскости Oxy соответственно уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, совпадают тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Теорема 3. Прямые l_1 и l_2, заданные на координатной плоскости Oxy соответственно уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. При каких значениях параметра b уравнение $b^4x+b^2+\left(2+\sqrt{2}\right)b+2\sqrt{2}=b^2\left(b+\sqrt{2}\right)+4x$ имеет бесконечно много корней?

Решение: Перепишем данное уравнение следующим образом:

$$b^4x+b^2+\left(2+\sqrt{2}\right)b+2\sqrt{2}=b^2\left(b+\sqrt{2}\right)+4x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(b^4-4\right)x=b^3+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2-\left(2+\sqrt{2}\right)b-2\sqrt{2}.$$

Последнее уравнение имеет бесконечно много корней тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\begin{cases}b^4-4=0,\\ b^3+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2-\left(2+\sqrt{2}\right)b-2\sqrt{2}=0.\end{cases}$$

Уравнение $b^4-4=0$ имеет два решения: $b=\sqrt{2}$ или $b=-\sqrt{2}$. Если $b=\sqrt{2}$, то

$$b^3+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2-\left(2+\sqrt{2}\right)b-2\sqrt{2}=2\sqrt{2}+2\left(\sqrt{2}-1\right)-\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{2}-2\sqrt{2}=$$
$$=-4\neq 0,$$

если $b=-\sqrt{2}$, тогда

$$b^3+\left(\sqrt{2}-1\right)b^2-\left(2+\sqrt{2}\right)b-2\sqrt{2}=-2\sqrt{2}+2\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{2}-$$
$$-2\sqrt{2}=0.$$

Следовательно, решением системы является $b=-\sqrt{2}$.

Ответ: $-\sqrt{2}$.

Пример 2. Найти все значения параметра b, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} bx+2y=b+2, \\ 2bx+(b+1)y=2b+4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение: **1-й способ (алгебраический).** Выразив из первого уравнения y через x, получим: $y=\frac{1}{2}(b+2-bx)$. Подставим это значение y во второе уравнение и сделаем необходимые преобразования:

$$2bx+\frac{1}{2}(b+1)(b+2-bx)=2b+4 \Leftrightarrow (3b-b^2)x=6+b-b^2.$$

Если $3b-b^2\neq 0$, т.е. $b\neq 0$ и $b\neq 3$, то это уравнение, а значит, и исходная система, будет иметь единственное решение $x=\frac{b+2}{b}$. Если $b = 0$, то уравнение примет вид $0 \cdot x = 6$ и не будет иметь решений. Если $b = 3$, то уравнение примет вид $0 \cdot x = 0$ и будет иметь бесконечно много решений. Значит, условию задачи удовлетворяют все $b\neq 0$.

2-й способ (геометрический). Найдем те b, при которых данная в условии задачи система не имеет решений. Это эквивалентно тому, что прямые, задаваемые уравнениями системы, параллельны, но не совпадают. Согласно теореме 1 должны выполняться соотношения:

$$\frac{2b}{b}=\frac{b+1}{2}\neq\frac{2b+4}{b+2}.$$

Если $b = 0$, то

$\frac{0}{0}=\frac{1}{2}\neq\frac{4}{2}$ (отношение $\frac{0}{0}=\frac{1}{2}$ понимается как пропорция, т.е. $0 \cdot 2 = 0 \cdot 1$), что удовлетворяет условию задачи.

Если $b = 3$, то

$$\frac{6}{3}=\frac{4}{2}\neq\frac{10}{5},$$

что не удовлетворяет условию задачи. Если же $b\neq 0$ и $b\neq 3$, тогда

$$2=\frac{b+1}{2}\neq\frac{2b+4}{b+2},$$

что также не удовлетворяет условию задачи. Таким образом, система не имеет решений при $b = 0$. Остальные b запишем в ответ.

Ответ: $b \neq 0$.

Пример 3. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} ax - 4y = 1 + a, \\ 2x + (a+6)y = 3 + a \end{cases}$$

не имеет решений?

Решение: **1-й способ (алгебраический).** Выразив y через x из первого уравнения, получим: $y = \frac{1}{4}(ax - a - 1)$. Подставим найденное значение y во второе уравнение системы и преобразуем полученное уравнение:

$$2x + \frac{1}{4}(a+6)(ax - a - 1) = 3 + a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + 6a + 8)x = a^2 + 11a + 18.$$

Данное уравнение, а значит, и исходная система, не имеет решений, если выполняются условия

$$\begin{cases} a^2 + 6a + 8 = 0, \\ a^2 + 11a + 18 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow a = -4.$$

2-й способ (геометрический). Согласно теореме 1 прямые, задаваемые уравнениями системы, параллельны и не совпадают (система не имеет решений) тогда и только тогда, когда

$$\frac{a}{2} = \frac{-4}{a+6} \neq \frac{1+a}{3+a}.$$

Равенство $\frac{a}{2} = \frac{-4}{a+6}$ перепишем в виде $a^2 + 6a + 8 = 0$. Если $a = -4$, то

$$\frac{-4}{2} = \frac{-4}{2} \neq \frac{-3}{-1},$$

что является решением задачи. Если $a = -2$, тогда

$$\frac{-2}{2} = \frac{-4}{4} \neq \frac{-1}{1},$$

что не является решением задачи. Таким образом, ответом к задаче будет служить $a = -4$.

Ответ: -4.

Пример 4. Найти все пары значений $(a,\ b)$, при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases}(a+b)x+26y=2,\\ 8x+\left(a^2-ab+b^2\right)y=4\end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Решение: **1-й способ (алгебраический).** Выразим y через x из первого уравнения и подставим во второе уравнение. Имеем:

$$\begin{cases}y=\dfrac{1}{26}\left(2-(a+b)x\right),\\ 8x+\dfrac{1}{26}\left(a^2-ab+b^2\right)\left(2-(a+b)x\right)=4.\end{cases}$$

Второе уравнение после преобразований примет следующий вид:

$$\left(\frac{1}{26}\left(a^3+b^3\right)-8\right)x=\frac{1}{13}\left(a^2-ab+b^2\right)-4.$$

Данное уравнение, а значит, и исходная система, имеет бесконечное множество решений, если выполняются условия:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{26}\left(a^3+b^3\right)-8=0,\\ \dfrac{1}{13}\left(a^2-ab+b^2\right)-4=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^3+b^3=208,\\ a^2-ab+b^2=52;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=208,\\ a^2-ab+b^2=52;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=4,\\ a^2-ab+b^2=52;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=4-a,\\ a^2-a(4-a)+(4-a)^2=52;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=4-a,\\ a^2-4a-12=0;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=-2,\ b=6\ \text{ или }\ a=6,\ b=-2.$$

2-й способ (геометрический). Согласно теореме 2 прямые, задаваемые уравнениями системы, совпадают (система имеет бесконечно много решений) тогда и только тогда, когда

$$\frac{a+b}{8}=\frac{26}{a^2-ab+b^2}=\frac{2}{4}.$$

Отсюда получаем ту же самую систему

$$\begin{cases}a+b=4,\\ a^2-ab+b^2=52.\end{cases}$$

Ответ: $a=-2$, $b=6$ *или* $a=6$, $b=-2$.

Пример 5. Числа a и b таковы, что система

$$\begin{cases} a^2x - ay = 1 - a, \\ bx + (3 - 2b)y = 3 + a \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = y = 1$. Найти числа a и b.

Решение: Подставим $x = y = 1$ в исходную систему. Имеем:

$$\begin{cases} a^2 - a = 1 - a, \\ b + (3 - 2b) = 3 + a. \end{cases}$$

Полученная система имеет две пары решений: $a = 1$, $b = -1$ и $a = -1$, $b = 1$. Подставив первую из этих пар в исходную систему, получим систему

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ -x + 5y = 4, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение. Если мы подставим вторую пару значений a и b в исходную систему, то получим систему

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = 2, \end{cases}$$

которая имеет бесконечно много решений. Поэтому условию задачи удовлетворяет только первая пара чисел.

Ответ: $a = 1$, $b = -1$.

Пример 6. Найти все значения параметра a, при каждом их которых не найдется ни одной такой пары (u, v), чтобы функция $f(x) = vx^4 + a(au - 1)x^3 - 2u - 2$ удовлетворяла одновременно условиям $f(-1) = -2u$ и $f(1) = -2$.

Решение: Условия $f(-1) = -2u$ и $f(1) = -2$ запишем в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} v - a^2u + a - 2u - 2 = -2u, \\ v + a^2u - a - 2u - 2 = -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v - a^2u + a - 2 = 0, \\ v + (a^2 - 2)u - a = 0. \end{cases}$$

Полученная система не имеет ни одной пары решений (u, v) тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{1} = \frac{-a^2}{a^2 - 2} \neq \frac{a - 2}{-a}.$$

Легко получаем, что эти условия выполняются только при $a = -1$.

Ответ: -1.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Для каждого значения a решить систему

$$\begin{cases} ax+y=a^2, \\ x+ay=1. \end{cases}$$

2. При каких a система

$$\begin{cases} x+2y=2-a, \\ -x+ay=a-2a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

3. Найти максимальное значение величины $x + y$, если числа x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} ax-by=1, \\ bx+ay=2 \end{cases}$$

при некоторых a и b таких, что $a^2 + b^2 = 1$.

4. Найти все значения a, при которых для любого b система

$$\begin{cases} bx-4y=a^2, \\ x+(b-4)y=a+\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

имеет по крайней мере одно решение (x, y).

5. При каких значениях параметров a и b система

$$\begin{cases} y=a|x-3a|, \\ |x|=b-|y| \end{cases}$$

имеет относительно неизвестных x и y бесконечно много решений?

6. Точка $M(x, y)$, декартовы координаты которой удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} a^2x-y=2a^2-2b, \\ x-by=2-2a^2, \end{cases}$$

лежит на прямой $y = 2 - x$. При каких действительных a и b эта точка наиболее близко расположена к точке $N(3; -1)$?

§ 2. ИССЛЕДОВАНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА С ПОМОЩЬЮ ДИСКРИМИНАНТА

Квадратным трехчленом называется выражение вида $f(x)=ax^2+bx+c$, где $a\neq 0$. *Дискриминантом* квадратного трехчлена называется число $D = b^2 - 4ac$. Если $D > 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных решения, если $D = 0$ — одно решение (два совпадающих корня), если $D < 0$, то уравнение решений не имеет на множестве действительных чисел ($x \in R$). Корни квадратного уравнения находятся по формуле

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

Если b — четное число, то эта формула имеет более простой вид

$$x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{a},\ \text{где}\ \frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac.$$

Сформулируем несколько утверждений, касающихся неравенств вида $f(x)>0$, $f(x)\geq 0$, $f(x)<0$, $f(x)\leq 0$, где $f(x)$ — квадратный трехчлен. Для определенности будем считать, что ветви параболы направлены вверх, то есть $a > 0$ (в противном случае всегда можно умножить обе части неравенства на (-1)). Поэтому квадратный трехчлен мы будем далее записывать в виде $f(x) = x^2 + px + q$.

Теорема 1. Неравенство $x^2 + px + q > 0$ выполнено при всех значениях переменной $x\in R$ тогда и только тогда, когда $D = p^2 - 4q < 0$.

Теорема 2. Неравенство $x^2 + px + q \geq 0$ выполнено при всех значениях переменной $x\in R$ тогда и только тогда, когда $D \leq 0$.

Теорема 3. Неравенство $x^2 + px + q < 0$ имеет решение тогда и только тогда, когда $D > 0$.

Теорема 4. Неравенство $x^2 + px + q \leq 0$ имеет решение тогда и только тогда, когда $D \geq 0$.

Теоремы 1–4 проиллюстрированы на рисунках 1–4 соответственно.

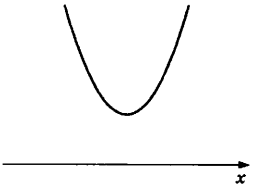

Рис. 1

Рис. 2

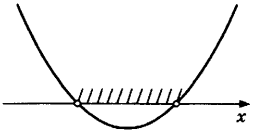

Рис. 3

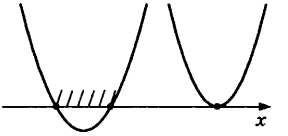

Рис. 4

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. При каких значениях параметра a уравнение $(3a - 1)x^2 + 2ax + 3a - 2 = 0$ имеет два различных действительных корня?

Решение: Если $3a - 1 = 0$, то есть $a = \frac{1}{3}$, уравнение принимает вид $\frac{2}{3}x - 1 = 0$ и имеет единственное решение $x = \frac{3}{2}$. Следовательно, $a = \frac{1}{3}$ не является решением задачи. Пусть $a \neq \frac{1}{3}$. Тогда для того, чтобы квадратное уравнение имело два различных решения, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант этого уравнения был положителен. Имеем:

$$\frac{D}{4} = a^2 - (3a - 1)(3a - 2) > 0 \Leftrightarrow 8a^2 - 9a + 2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{16}, \frac{9 + \sqrt{17}}{16}\right).$$

Так как $a = \frac{1}{3}$ принадлежит полученному промежутку, окончательно получаем ответ $a \in \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{16}, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{9 + \sqrt{17}}{16}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{9 - \sqrt{17}}{16}, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{9 + \sqrt{17}}{16}\right)$.

Пример 2. При каких значениях a система

$$\begin{cases} 2axy+2x-2y+3=0, \\ x+2y+xy+1=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение: Преобразуем данную систему следующим образом:

$$\begin{cases} 2axy+2x-2y+3=0, \\ x+2y+xy+1=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2axy+2x-2y+3=0, \\ x(y+1)=-2y-1. \end{cases}$$

Пусть $y = -1$. Тогда исходная система примет вид

$$\begin{cases} -2ax+2x+5=0, \\ -1=0 \end{cases}$$

и решений иметь не будет. Пусть $y \neq -1$. Тогда исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} 2axy+2x-2y+3=0, \\ x=-\dfrac{2y+1}{y+1}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ay\cdot\dfrac{2y+1}{y+1}+2\cdot\dfrac{2y+1}{y+1}+2y-3=0, \\ x=-\dfrac{2y+1}{y+1}. \end{cases}$$

Первое уравнение после преобразований принимает следующий вид:

$$(4a + 2)y^2 + (2a + 3)y - 1 = 0.$$

Это уравнение, а значит, и исходная система, имеет единственное решение в двух случаях:

а) коэффициент при y^2 равен нулю, т.е. $4a+2=0 \Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{2}$;

б) дискриминант равен нулю, т.е.

$$D=(2a+3)^2+4(4a+2)=0 \Leftrightarrow 4a^2+28a+17=0 \Leftrightarrow a=\frac{-7\pm4\sqrt{2}}{2}.$$

Кроме того, необходимо рассмотреть случай, когда один из корней квадратного уравнения будет равен -1. Так как значению $y = -1$ не будет соответствовать ни одно значение x, то в этом случае исходная система также будет иметь единственное решение. Подставив $y = -1$ в квадратное уравнение, получим, что $(4a + 2) - (2a + 3) - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

Ответ: $1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{-7\pm4\sqrt{2}}{2}$.

Пример 3. Найти наибольшее из значений z, для которых существуют числа x, y, удовлетворяющие уравнению $2x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 4$.

Решение: Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно x:

$$2x^2 + (y + z)x + 2y^2 + yz + z^2 - 4 = 0.$$

Это уравнение будет иметь решение в том и только в том случае, когда его дискриминант больше либо равен нулю. Имеем:

$$D = (y+z)^2 - 8\left(2y^2 + yz + z^2 - 4\right) \geq 0 \Leftrightarrow 15y^2 + 6yz + 7z^2 - 32 \leq 0.$$

Согласно теореме 4 условие существования решений последнего неравенства (как квадратного относительного y) есть неотрицательность его дискриминанта:

$$\frac{D}{4} = 9z^2 - 15\left(7z^2 - 32\right) \geq 0 \Leftrightarrow z^2 \leq 5 \Leftrightarrow z \in \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right].$$

Значит, наибольшее возможное значение, которое может принимать z при данных условиях, — это $z = \sqrt{5}$.

Ответ: $\sqrt{5}$.

Пример 4. Найти все действительные значения c, для которых все числа из области значений функции

$$f(x) = \frac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2}$$

принадлежат интервалу $(-1, 2)$.

Решение: Сформулируем задачу следующим образом: «Найти все значения c, при которых система неравенств

$$-1 < \frac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2} < 2$$

выполнена при всех $x \in R$». Учитывая, что выражение $2x^2 - 3x + 2$ положительно при всех $x \in R$, преобразуем данную систему следующим образом:

$$-1 < \frac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2} > -1, \\ \dfrac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2} < 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + (c-3)x + 1 > 0, \\ 3x^2 - (c+6)x + 5 > 0. \end{cases}$$

Согласно теореме 1 выполнение условия задачи равносильно отрицательности каждого из дискриминантов. Имеем:

$$\begin{cases}(c-3)^2-12<0,\\(c+6)^2-60<0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-2\sqrt{3}<c<3+2\sqrt{3},\\-6-2\sqrt{15}<c<-6+2\sqrt{15};\end{cases}\Leftrightarrow c\in\left(3-2\sqrt{3},\,2\sqrt{15}-6\right).$$

Ответ: $\left(3-2\sqrt{3},\ 2\sqrt{15}-6\right)$.

Пример 5. Найти все значения параметра p, при каждом из которых множество значений функции

$$f(x)=\frac{3x+p}{x^2+5x+7}$$

содержит полуинтервал $(-1,\ 3]$. Определить при каждом таком p множество значений функции $f(x)$.

Решение: Заметим сначала, что выражение x^2+5x+7 положительно при всех значениях переменной x; отсюда, в частности, следует, что функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой. Тогда для того, чтобы область значений функции $f(x)$ содержала промежуток $(-1,\ 3]$, необходимо выполнение следующих двух условий: «Существует такое x, при котором $f(x)\geq 3$, и существует такое x, при котором $f(x)\leq -1$». Имеем:

$$\frac{3x+p}{x^2+5x+7}\geq 3\Leftrightarrow 3x^2+12x+21-p\leq 0$$

и

$$\frac{3x+p}{x^2+5x+7}\leq -1\Leftrightarrow x^2+8x+7+p\leq 0.$$

Существование решений каждого из неравенств равносильно неотрицательности его дискриминанта. Имеем:

$$\begin{cases}36-3(21-p)\geq 0,\\16-(7+p)\geq 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p\geq 9,\\p\leq 9;\end{cases}\Rightarrow p=9.$$

Следовательно, условие задачи может быть выполнено только при $p=9$. Проверим это и найдем при $p=9$ область значений функции $f(x)$. Имеем:

$$f(x)=\frac{3x+p}{x^2+5x+7}=\frac{3x+9}{x^2+5x+7}=y\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow yx^2+(5y-3)x+7y-9=0.$$

Необходимо найти все значения y, при которых последнее уравнение имеет решение. Если $y = 0$, то уравнение принимает вид $-3x - 9 = 0$ и имеет корень $x = -3$. Если $y \neq 0$, то наличие корней этого уравнения равносильно неотрицательности его дискриминанта. Имеем:

$$(5y-3)^2 - 4y(7y-9) \geq 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 \leq 0 \Leftrightarrow y \in [-1, 3].$$

Таким образом, при $p = 9$ область значений функции $y = f(x)$ представляет собой отрезок $[-1, 3]$.

Ответ: $p = 9$; $[-1, 3]$.

Пример 6. Найти все значения a, при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} bx - y - az^2 = 0, \\ (b-6)x + 2by - 4z - 4 = 0 \end{cases}$$

имеет по крайней мере одно решение (x, y, z).

Решение: Рассмотрим данную систему как линейную относительно переменных x и y. Согласно теореме 3 предыдущего параграфа эта система будет иметь единственное решение (независимо от значений a и z) тогда и только тогда, когда

$$\frac{b}{b-6} \neq \frac{-1}{2b} \Leftrightarrow 2b^2 + b - 6 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq -2 \quad \text{и} \quad b \neq \frac{3}{2}.$$

Пусть $b = -2$. Тогда исходная система примет вид

$$\begin{cases} -2x - y - az^2 = 0, \\ -8x - 4y - 4z - 4 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + az^2 = 0, \\ 2x + y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем уравнение $az^2 - z - 1 = 0$, которое должно иметь решение относительно z. Значит, $D = 1 + 4a \geq 0$, то есть $a \geq -\frac{1}{4}$.

Аналогично при $b = \frac{3}{2}$ получаем систему

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x - y - az^2 = 0, \\ -\frac{9}{2}x + 3y - 4z - 4 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 6y - 6az^2 = 0, \\ 9x - 6y + 8z + 8 = 0; \end{cases} \Rightarrow 3az^2 + 4z + 4 = 0.$$

Условие существования решения последнего уравнения есть $4 - 12a \geq 0$, откуда $a \leq \frac{1}{3}$. Таким образом, ответом к задаче будут служить $a \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$.

Пример 7. Найти все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $6x^2 + 4a^2 + 6ax - 3x - 24a + 35 < 0$ содержит хотя бы одно целое число.

Решение: Рассмотрим данное неравенство как квадратное относительно a:

$$4a^2 + (6x - 24)a + 6x^2 - 3x + 35 < 0.$$

Необходимым и достаточным условием существования его решений является положительность дискриминанта:

$$(3x - 12)^2 - 4(6x^2 - 3x + 35) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15x^2 + 60x - 4 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{-30 - 8\sqrt{15}}{15}, \frac{-30 + 8\sqrt{15}}{15}\right).$$

Полученному интервалу принадлежат всего пять целых значений x — это $x = -4$, $x = -3$, $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$. Требуется для каждого из этих значений x найти соответствующие значения параметра a.

а) Если $x = -4$, то неравенство принимает вид

$$4a^2 - 48a + 143 < 0 \Leftarrow a \in \left(\frac{11}{2}, \frac{13}{2}\right).$$

б) Если $x = -3$, получаем

$$2a^2 - 21a + 49 < 0 \Leftarrow a \in \left(\frac{7}{2}, 7\right).$$

в) При $x = -2$ имеем

$$4a^2 - 36a + 65 < 0 \Leftarrow a \in \left(\frac{5}{2}, \frac{13}{2}\right).$$

г) Для $x = -1$ получаем

$$2a^2 - 15a + 22 < 0 \Leftarrow a \in \left(2, \frac{11}{2}\right).$$

д) Если $x = 0$, то

$$4a^2 - 24a + 35 < 0 \Leftarrow a \in \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

Ответ выписывается как результат объединения всех полученных интервалов: $a \in (2, 7)$.

Ответ: $a \in (2, 7)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Из всех решений (x, y) уравнения $x^2y - x^2 + 4xy + 6y - 2x = 3$ найти те решения, для которых y принимает наименьшее значение.

2. Найти наибольшее из значений, которые принимает выражение $x + 3y$, если x и y удовлетворяют неравенству $x^2 + xy + 4y^2 \le 3$.

3. Определить, под каким углом видно из начала координат множество, заданное на координатной плоскости неравенством $14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0$.

4. Числа x, y, z таковы, что $x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$. Какое наибольшее значение может принять выражение $2x + y - z$?

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $25y^2 + \frac{1}{100} \ge x - axy + y - 25x^2$ выполняется для любых пар (x, y) таких, что $|x| = |y|$.

6. Найти все значения a, при каждом из которых существует единственная тройка чисел (x, y, z), удовлетворяющая равенствам $x + y + z = x^2 + 4y^2$ и $x + 2y + 3z = a$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значение выражения $x^2 + 2y^2$, если $x^2 - xy + 2y^2 = 1$.

8. Найти все целочисленные решения уравнения

$$x^2 + 5y^2 + 34z^2 + 2xy - 10xz - 22yz = 0.$$

9. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y + 2 = (3 - x)^3, \\ (2z - y)(y + 2) = 9 + 4y, \\ x^2 + z^2 = 4x, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $z \ge 0$.

§ 3. ТЕОРЕМА ВИЕТА

При исследовании квадратного трехчлена, а также знаков его корней большую роль играет теорема Виета. Сформулируем эту теорему, а также обратную к ней.

Теорема Виета. Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, а $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Обратная к теореме Виета. Если квадратное уравнение имеет корни x_1 и x_2 и известно, что $x_1 + x_2 = p$, а $x_1x_2 = q$, то это уравнение может быть записано как $x^2 - px + q = 0$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти минимальное значение произведения xy, где x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x+y=3a-1, \\ x^2+y^2=4a^2-2a+2. \end{cases}$$

Решение: Данная система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} x+y=3a-1, \\ x^2+y^2=4a^2-2a+2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3a-1, \\ (x+y)^2-2xy=4a^2-2a+2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3a-1, \\ (3a-1)^2-2xy=4a^2-2a+2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3a-1, \\ xy=\frac{5}{2}a^2-2a-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Согласно теореме, обратной теореме Виета, числа x и y являются корнями квадратного уравнения

$$t^2-(3a-1)t+\frac{5}{2}a^2-2a-\frac{1}{2}=0.$$

Существование корней данного уравнения равносильно выполнению неравенства $D \geq 0$:

$$(3a-1)^2-(10a^2-8a-2)\geq 0 \Leftrightarrow a^2-2a-3\leq 0 \Leftrightarrow -1\leq a\leq 3.$$

Так как $xy=\frac{5}{2}a^2-2a-\frac{1}{2}$, то

$$\min_{-1\leq a\leq 3}\left(\frac{5}{2}a^2-2a-\frac{1}{2}\right)=\min_{-1\leq a\leq 3}\left(\frac{5}{2}\left(a-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{9}{10}\right)=\left(\text{при } a=\frac{2}{5}\right)=-\frac{9}{10}.$$

Ответ: $-\frac{9}{10}$.

Пример 2. Найти все значения a, для которых система

$$\begin{cases} a(x-4)=3y+6, \\ y+\sqrt{x}=0 \end{cases}$$

имеет два различных решения.

Решение: Данная система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} a(x-4)=3y+6, \\ \sqrt{x}=-y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x-4)=3y+6, \\ x=y^2, \\ y\le 0. \end{cases}$$

Эта система будет иметь такое же количество решений, как и система

$$\begin{cases} a(y^2-4)=3y+6, \\ y\le 0. \end{cases}$$

Тогда условие задачи можно сформулировать следующим образом: «При каких a уравнение

$$a(y^2-4)=3y+6 \quad \Leftrightarrow \quad ay^2-3y-4a-6=0$$

имеет два различных неположительных корня?» При $a = 0$ уравнение имеет единственный корень. Пусть $a \neq 0$. Воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} D>0, \\ y_1\le 0, \\ y_2\le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D>0, \\ y_1\cdot y_2\ge 0, \\ y_1+y_2\le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9+4a(4a+6)>0, \\ \dfrac{-4a-6}{a}\ge 0, \\ \dfrac{3}{a}\le 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16a^2+24a+9>0, \\ -4a-6\le 0, \\ a<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ne -\dfrac{3}{4}, \\ a\ge -\dfrac{3}{2}, \\ a<0; \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left[-\frac{3}{2},-\frac{3}{4}\right)\cup\left(-\frac{3}{4},0\right).$$

Ответ: $\left[-\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{4}\right)\cup\left(-\dfrac{3}{4},0\right)$.

Пример 3. Найти все действительные значения a, при которых уравнение $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ имеет ровно четыре действительных корня, образующих арифметическую прогрессию.

Решение: Сделаем замену $x^4 = t$. Рассмотрим квадратное уравнение $t^2 + at + 1 = 0$. Чтобы выполнялось первое условие задачи, это уравнение должно иметь два различных положительных корня t_1 и t_2. Это означает выполнение неравенств

$$\begin{cases} D = a^2 - 4 > 0, \\ t_1 + t_2 = -a > 0, \\ t_1 t_2 = 1 > 0, \end{cases}$$

то есть $a < -2$. Пусть $t_1 < t_2$. Тогда числа $-\sqrt[4]{t_2}$, $-\sqrt[4]{t_1}$, $\sqrt[4]{t_1}$ и $\sqrt[4]{t_2}$ должны составлять арифметическую прогрессию, а это значит, что $\sqrt[4]{t_2} - \sqrt[4]{t_1} = \sqrt[4]{t_1} - (-\sqrt[4]{t_1})$, т.е. $\sqrt[4]{t_2} = 3\sqrt[4]{t_1}$ или $t_2 = 81t_1$. По теореме Виета $t_1 + t_2 = -a$ и $t_1 t_2 = 1$. Получаем систему:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -a, \\ t_1 t_2 = 1, \\ t_2 = 81t_1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 82t_1 = -a, \\ 81t_1^2 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{1}{9}, \\ a = -\dfrac{82}{9}; \end{cases} \vee \begin{cases} t_1 = -\dfrac{1}{9}, \\ a = \dfrac{82}{9}. \end{cases}$$

Решением, удовлетворяющим условию $a < -2$, будет служить пара $t_1 = \dfrac{1}{9}$ и $a = -\dfrac{82}{9}$.

Ответ: $-\dfrac{82}{9}$.

Пример 4. При каких значениях a система

$$\begin{cases} 2x + y = a - 1, \\ 2xy = a^2 - 3a + 1, \\ 4x^2 + y^2 \le -a^2 + 5a - 4 \end{cases}$$

имеет решение?

Решение: Согласно первым двум уравнениям системы, по теореме, обратной теореме Виета, числа $2x$ и y являются корнями квадратного уравнения

$$t^2 + (1 - a)t + a^2 - 3a + 1 = 0.$$

Условие существования решения этого уравнения есть

$$D = (1-a)^2 - 4(a^2 - 3a + 1) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} \le a \le 3.$$

С другой стороны, $4x^2 + y^2 = (2x + y)^2 - 4xy$. Тогда, согласно третьему неравенству системы,

$$4x^2 + y^2 = (a-1)^2 - 2(a^2 - 3a + 1) \le -a^2 + 5a - 4 \Leftrightarrow a \ge 3.$$

Следовательно, система имеет решение только при $a = 3$.

Ответ: 3.

Пример 5. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$ является наибольшей? Чему равна эта сумма?

Решение: Существование корней данного уравнения равносильно выполнению неравенства $D \geq 0$. Имеем:

$$\frac{D}{4} = a^2 - 2a^2 - 4a - 3 = -a^2 - 4a - 3 \geq 0,$$

откуда $a \in [-3, -1]$. Выразив при этом сумму квадратов корней данного уравнения через их сумму и произведение, получим:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 =$$

(по теореме Виета)

$$= (-2a)^2 - 2(2a^2 + 4a + 3) = -8a - 6.$$

Ясно, что

$$\max_{-3 \leq a \leq -1} (-8a - 6) = -8 \cdot (-3) - 6 = 18.$$

Ответ: *При* $a = -3$ эта сумма равна 18.

Пример 6. Уравнение $ax^2 + bx + 2 = 0$, где $a < 0$, имеет одним из своих корней число $x = 3$. Найдите действительные корни уравнения $ax^4 + bx^2 + 2 = 0$.

Решение: Рассмотрим уравнение $ax^4 + bx^2 + 2 = 0$. Сделаем замену $x^2 = t$, $t \geq 0$. Получим уравнение $at^2 + bt + 2 = 0$, которое, согласно условию задачи, имеет одним из своих корней число $t_1 = 3$. При обратной замене $x^2 = 3$ получаем, что $x = \pm\sqrt{3}$. Заметим, однако, что корни $t_{1,2}$ уравнения $at^2 + bt + 2 = 0$ удовлетворяют условию $t_1 \cdot t_2 = \frac{2}{a}$ (согласно теореме Виета). Так как $a < 0$, а $t_1 > 0$, то отсюда следует, что $t_2 < 0$. Значит, обратная замена $x^2 = t_2$ других решений уравнения $ax^4 + bx^2 + 2 = 0$ не дает. Таким образом, ответом к задаче будут служить $x = \pm\sqrt{3}$.

Ответ: $\pm\sqrt{3}$.

Пример 7. Найти все значения a, при которых уравнение $4^x + (a^2 + 5) \cdot 2^x - a^2 + 9 = 0$ не имеет решений.

Решение: Пусть $2^x = t$, $t > 0$. Тогда данное уравнение примет следующий вид:

$$t^2 + (a^2 + 5)t - a^2 + 9 = 0.$$

Заметим, что по теореме Виета сумма корней этого уравнения (если они существуют) равна $t_1+t_2=-a^2-5<0$ для любого a, а произведение $t_1 \cdot t_2 = 9-a^2$. Рассмотрим два случая.

а) Если $a \in [-3,3]$, то есть $9 - a^2 \geq 0$, то либо корней нет вообще, либо они есть и тогда $t_1 \leq 0$ и $t_2 \leq 0$. Ни в том ни в другом варианте исходное уравнение не имеет решений.

б) Если $|a|>3$, то корни квадратного уравнения существуют, так как

$$D=\left(a^2+5\right)^2+4\left(a^2-9\right)>0.$$

Кроме того, $t_1 \cdot t_2 = 9-a^2 < 0$, поэтому один из этих корней положительный, а другой отрицательный. Ясно, что положительный корень (t_1 или t_2) даст при обратной замене $2^x = t$ решение исходного уравнения $x = \log_2 t$.

Таким образом, ответом к задаче будут служить $a \in [-3,3]$.

Ответ: $a \in [-3,3]$.

Пример 8. Найти все значения a, при каждом из которых сумма длин интервалов, составляющих решение неравенства

$$\frac{x^2+a^2x-a^2+2a-3}{x^2-7x-a^2+2a-3}<0,$$

не меньше 11.

Решение: Пусть $f(x)=x^2+a^2x-a^2+2a-3$, а $g(x)=x^2-7x-a^2+2a-3$. Заметим, что $f(0)=g(0)=-a^2+2a-3<0$ при любом значении a. Кроме того, вершина параболы $y=f(x)$ имеет отрицательную абсциссу, а вершина параболы $y=g(x)$ — положительную. Поэтому корни уравнений $f(x)=0$ и $g(x)=0$ существуют и чередуются: то есть если $x_1 < x_2$ — корни уравнения $f(x)=0$, а $x_3<x_4$ — корни уравнения $g(x)=0$, то $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$, как показано на рисунке 5.

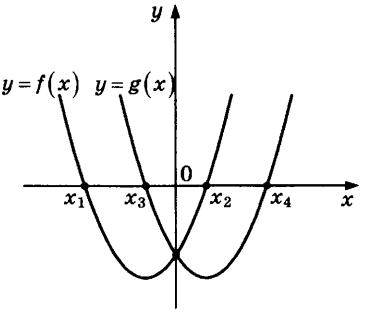

Рис. 5

Из этого же рисунка видно, что интервалы (x_1, x_3) и (x_2, x_4) составляют решение неравенства $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$. Тогда

$$(x_3 - x_1) + (x_4 - x_2) \geq 11 \Leftrightarrow (x_3 + x_4) - (x_1 + x_2) \geq 11 \Leftrightarrow$$

(по теореме Виета)

$$\Leftrightarrow 7 + a^2 \geq 11 \Leftrightarrow a \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty).$$

Ответ: $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. При каких значениях параметра a четыре корня уравнения $x^4 + (a - 5)x^2 + (a + 2)^2 = 0$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

2. При каких значениях параметра a уравнение $\log_a x + \log_x(17-10a) = 2$ имеет по крайней мере два корня и при этом произведение всех его корней не меньше $1/10000$?

3. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $25x^5 - 25(p-1)x^3 + 4(p+5)x = 0$ имеет ровно пять различных решений, а сами решения, упорядоченные по возрастанию, образуют арифметическую прогрессию.

4. Числа p и q подобраны так, что уравнение $2^{1+x} + p + q \cdot 2^{1-x} = 0$ имеет ровно два различных корня, а их сумма равна 4. Найти при этом условии произведение всех различных корней уравнения $(x^2 - 5x - 300)(x^2 - px - q) = 0$.

5. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения

$$(2\log_a|x-1| - \log_a x - 1)(2\log_{a^2}|x+5| - \log_a 3a + 1) = 0$$

больше, чем $8a + 1$?

6. Числа x, y, z таковы, что

$$\begin{cases} x + 1 = z + y, \\ xy + z^2 + 14 - 7z = 0. \end{cases}$$

При каких значениях z сумма $x^2 + y^2$ максимальна? Найти это максимальное значение.

7. Обозначим x_1 и x_2 корни квадратного трехчлена $(a-1)x^2 - (2a+1)x + 2 + 5a$. Найти все b, для каждого из которых величина $(x_1 - b)(x_2 - b)$ принимает постоянное значение при всех a, при которых она определена.

8. При каких значениях p уравнение

$$4\left(x-\sqrt{p\cdot 4^p}\right)x+4\left(4^p-1\right)+p=0$$

имеет корни и каковы знаки корней при различных значениях p?

9. Найти все значения параметра α, при которых больший корень уравнения $x^2+\frac{x+4}{\sqrt{3}}\sin 2\alpha-16=0$ на $\sqrt{\frac{2}{3}}$ больше, чем квадрат разности корней уравнения $x^2-x\sin\alpha+\frac{\cos^2\alpha}{4}-1=0$.

10. Для каждого положительного значения параметра c изобразить множество тех пар (b, a), для каждой из которых уравнение $bx^2+ax-\frac{b}{4}+c=0$ имеет два различных отрицательных корня, и указать все значения параметра a, при каждом из которых множество соответствующих значений b состоит из двух непересекающихся интервалов.

§ 4. РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

В настоящем параграфе будет показано, как можно исследовать расположение корней квадратного трехчлена без нахождения самих корней. Мы по-прежнему считаем, что ветви параболы направлены вверх и квадратичная функция записывается как $f(x)=x^2+px+q$. В противном случае всегда можно умножить обе части уравнения (или неравенства) на (−1). Напомним, что координаты вершины параболы (x_0, y_0) находятся по формулам $x_0=-\frac{p}{2}$, $y_0=f(x_0)$. Сформулируем несколько утверждений.

Теорема 1. Квадратный трехчлен $f(x)=x^2+px+q$ имеет два корня (возможно, совпадающих), и оба корня больше некоторого числа a тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} D\geq 0, \\ x_1>a, \\ x_2>a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D\geq 0, \\ x_0>a, \\ f(a)>0, \end{cases}$$

где D — дискриминант, а x_0 — абсцисса вершины параболы.

Теорема 2. Квадратный трехчлен $f(x)=x^2+px+q$ имеет два корня (возможно, совпадающих), и оба корня меньше некоторого числа a тогда и только тогда, когда:

$$\begin{cases} D\geq 0, \\ x_1<a, \\ x_2<a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D\geq 0, \\ x_0<a, \\ f(a)>0. \end{cases}$$

Теорема 3. Квадратный трехчлен $f(x)=x^2+px+q$ имеет два различных корня, и число a расположено строго между его корнями тогда и только тогда, когда $f(a)<0$.

Теоремы 1–3 проиллюстрированы на рисунках 6–8.

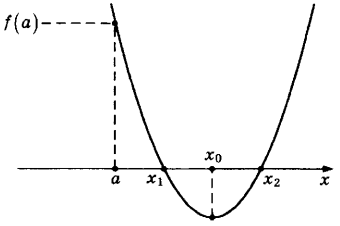

Рис. 6

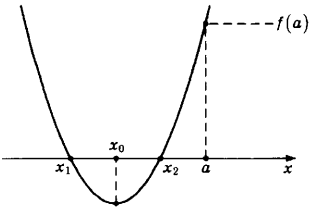

Рис. 7

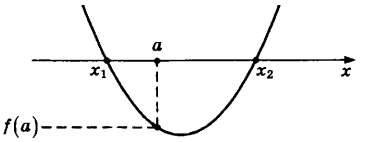

Рис. 8

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найдите все значения a, для каждого из которых система неравенств

$$\begin{cases} -x^2+12x-a\geq 0, \\ x\leq 2 \end{cases}$$

выполняется хотя бы при одном значении x.

Решение: Решение первого неравенства, если оно существует, есть отрезок $[x_1, x_2]$ (возможно, вырожденный в точку), где $x_{1,\,2}$ — корни квадратного уравнения

$$x^2 - 12x + a = 0.$$

Значит, условие задачи может быть сформулировано следующим образом: «Найти все значения параметра a, при которых корни квадратного уравнения $x^2 - 12x + a = 0$ существуют и хотя бы один из этих корней меньше либо равен двум» (рисунок 9).

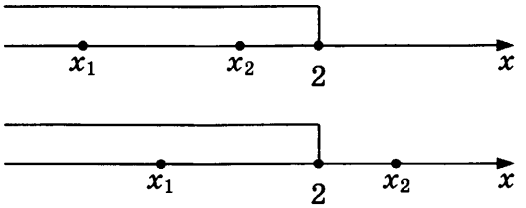

Рис. 9

Эти условия равносильны следующему неравенству:

$$x_1 = 6-\sqrt{36-a}\leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{36-a}\geq 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 36-a\geq 16 \Leftrightarrow a\leq 20.$$

Ответ: $(-\infty,\ 20]$.

Пример 2. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $9^x < 20\cdot 3^x + a$ не имеет ни одного целочисленного решения.

Решение: Обозначим $3^x = t > 0$, тогда данное неравенство принимает вид $t^2 - 20t - a < 0$. Рассмотрим функцию $y(t) = t^2 - 20t - a$. На координатной плоскости Oty графиком этой функции будет служить парабола, абсцисса вершины которой равна $t_0 = 10$. Тогда целочисленным решениям исходного неравенства $x = ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$ будут соответствовать $t = 3^x = ..., \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, ...$. Отсюда следует, что исходное неравенство не имеет ни одного целочисленного решения тогда и только тогда, когда число $t = 9$ не входит в промежуток, являющийся решением неравенства $y(t) < 0$ (или это неравенство вообще не имеет решений). И в том и в другом случае должно выполняться условие $y(9) \geq 0$ (рисунок 10).

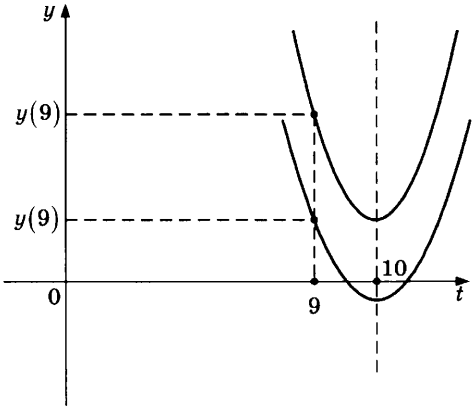

Рис. 10

В противном случае (то есть когда $y(9) < 0$) число $t = 9$ попадает в промежуток, являющийся решением неравенства $y(t) < 0$, и значит, $x = 2$ является решением исходного неравенства. Окончательно имеем:

$$y(9) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 81 - 20 \cdot 9 - a \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \leq -99.$$

Полученные значения a и будут служить ответом к задаче.

Ответ: $a \leq -99$.

Пример 3. Найти все значения a, при каждом из которых среди корней уравнения $ax^2 + (a + 4)x + a + 1 = 0$ имеется ровно один отрицательный.

Решение: При $a = 0$ данное уравнение принимает вид $4x + 1 = 0$ и имеет единственный отрицательный корень $x = -\frac{1}{4}$. Пусть $a \neq 0$. Разделим обе части квадратного уравнения на a. Имеем:

$$ax^2 + (a+4)x + a + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{a+4}{a}x + \frac{a+1}{a} = 0.$$

Пусть $f(x) = x^2 + \frac{a+4}{a}x + \frac{a+1}{a}$. Возможны три случая.

а) Квадратное уравнение имеет два различных корня, один из которых — положительный, другой — отрицательный. Согласно теореме 3 имеем $f(0) < 0$ (рисунок 11), откуда $a \in (-1, 0)$.

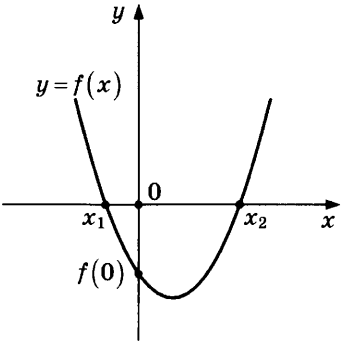

Рис. 11

б) Квадратное уравнение имеет два различных корня, один из которых равен нулю, другой — отрицательный. В этом случае получаем (рисунок 12):

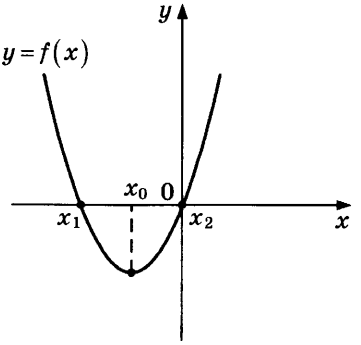

Рис. 12

$$\begin{cases} D>0, \\ x_1<0, \\ x_2=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0)=0, \\ x_0<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1, \\ -\dfrac{a+4}{2a}<0, \end{cases}$$

— нет решений (здесь x_0 — абсцисса вершины параболы).

в) Квадратное уравнение имеет два совпадающих корня, оба из которых отрицательны. Это равносильно выполнению следующих условий (рисунок 13):

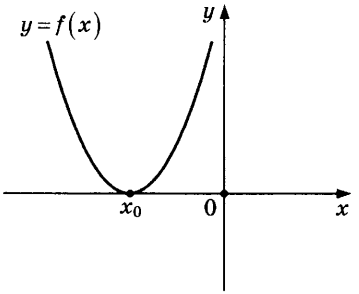

Рис. 13

$$\begin{cases} D=0, \\ x_0<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+4)^2-4a(a+1)=0, \\ -\dfrac{a+4}{2a}<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2-4a-16=0, \\ \left[\begin{array}{l} a<-4, \\ a>0; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{2+2\sqrt{13}}{3}.$$

Ответ получается как объединение всех разобранных случаев.

Ответ: $(-1,\ 0]\cup\left\{\dfrac{2+2\sqrt{13}}{3}\right\}$.

Пример 4. Найти все значения a, для которых неравенство $ax^2 + 1 > 4x - 3a$ выполняется для всех x из интервала $(-1,\ 0)$.

Решение: При $a = 0$ данное неравенство принимает вид $1 > 4x$ и имеет решением $x\in\left(-\infty, \dfrac{1}{4}\right)$, поэтому $a = 0$ является решением задачи. Пусть $a > 0$ и $f(x)=ax^2-4x+3a+1$. Возможны три случая.

а) Дискриминант квадратного трехчлена $f(x)=ax^2-4x+3a+1$ отрицателен, тогда парабола расположена целиком выше оси x (рисунок 14), неравенство $f(x)>0$ выполнено при всех $x\in R$, в том числе при $x\in(-1,0)$.

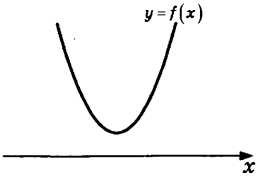

Рис. 14

Имеем:

$$4-a(3a+1)<0 \Leftrightarrow 3a^2+a-4>0 \Leftrightarrow a\in\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)\cup(1,+\infty).$$

Так как $a>0$, то $a\in(1,+\infty)$.

б) Квадратный трехчлен имеет два корня (возможно, совпадающих), и оба корня больше либо равны нулю. Имеем (рисунок 15):

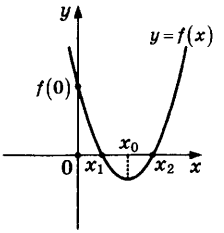

Рис. 15

$$\begin{cases} D\ge 0, \\ x_1\ge 0, \\ x_2\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D\ge 0, \\ f(0)\ge 0, \\ x_0\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3}\le a\le 1, \\ 3a+1\ge 0, \\ \frac{2}{a}\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow a\in(0,1].$$

Здесь x_0 — абсцисса вершины параболы. Все a из промежутка $a\in(0,1]$ являются решением задачи.

в) Квадратный трехчлен имеет два корня (возможно, совпадающих), и оба корня меньше либо равны (–1). В этом случае получаем (рисунок 16):

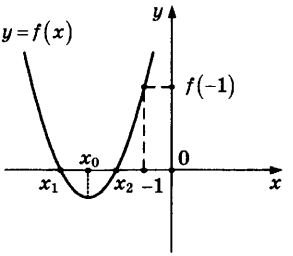

Рис. 16

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ x_1 \le -1, \\ x_2 \le -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D \ge 0, \\ f(-1) \ge 0, \\ x_0 \le -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} \le a \le 1, \\ 4a + 5 \ge 0, \\ \frac{2}{a} \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} \le a \le 1, \\ a \ge -\frac{5}{4}, \\ -2 \le a < 0. \end{cases}$$

Ясно, что нет положительных значений a, удовлетворяющих этой системе неравенств.

Пусть теперь $a < 0$. Тогда ветви параболы направлены вниз и условие задачи может быть выполнено в единственном случае, а именно, когда квадратный трехчлен имеет два различных корня, один из которых меньше либо равен (-1), а другой больше либо равен нулю. Имеем (рисунок 17):

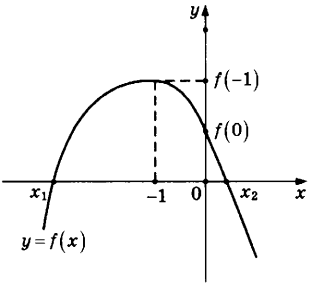

Рис. 17

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_1 \le -1, \\ x_2 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) \ge 0, \\ f(0) \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 5 \ge 0, \\ 3a + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right).$$

Так как $a < 0$, то $a \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right)$. Ответ получается как объединение всех разобранных случаев.

Ответ: $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

Пример 5. Найдите все значения a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства

$$x^2 + (-3a + 1)x + 2a^2 \le 2$$

удовлетворяет неравенству

$$ax(x - 5 + a) \ge 0.$$

Решение: Множество решений неравенства $x^2+(-3a+1)x+2a^2\le 2$, эквивалентного неравенству $(x-(2a-2))(x-(a+1))\le 0$, образует отрезок (возможно, вырожденный в точку) с концами $2a-2$ и $a+1$ (рисунок 18).

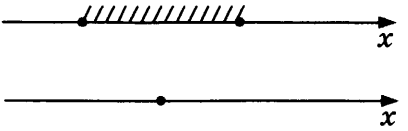

Рис. 18

Множество решений неравенства $ax(x-5+a)\ge 0$ образует при $a>0$ объединение двух лучей (направленных в противоположные стороны и, возможно, «склеенных» в одну прямую) с концами 0 и $5-a$; при $a<0$ — отрезок с теми же концами, а при $a=0$ — всю прямую (рисунок 19).

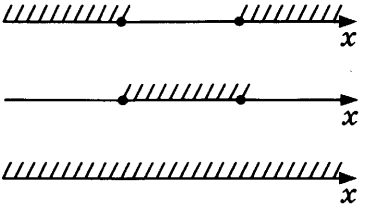

Рис. 19

Ровно одна точка первого множества может принадлежать второму, только когда первое вырождается в точку или один из его концов совпадает с концом второго множества, т.е. в следующих случаях:

а) $2a-2=a+1$, следовательно, $a=3$, тогда только одно решение ($x=4$) первого неравенства удовлетворяет второму;

б) $2a-2=0$, следовательно, $a=1$, тогда только одно решение ($x=0$) первого неравенства удовлетворяет второму;

в) $2a-2=5-a$, следовательно, $a=\frac{7}{3}$, тогда все числа отрезка $\left[\frac{8}{3},\frac{10}{3}\right]$, состоящего из решений первого неравенства, удовлетворяют второму;

г) $a+1=0$, следовательно, $a=-1$, тогда только одно решение ($x=0$) первого неравенства удовлетворяет второму;

д) $a + 1 = 5 - a$, следовательно, $a = 2$, тогда только одно решение ($x = 3$) первого неравенства удовлетворяет второму.

Ответ: $a = -1$, $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$.

Пример 6. Найти все значения a, для которых при каждом x из промежутка $[-2, -1)$ значение выражения $x^4 - 5$ не равно значению выражения $(3a + 2)x^2$.

Решение: Пусть $x^2 = t$. Тогда условие задачи можно сформулировать следующим образом: «Найти все значения a, при которых уравнение $t^2 - (3a + 2)t - 5 = 0$ не имеет решений на промежутке $t \in (1, 4]$». Пусть $f(t) = t^2 - (3a+2)t - 5$. Заметим, что дискриминант этого квадратного трехчлена всегда положителен, действительно, $D = (3a+2)^2 + 20 > 0$ при любом a. Возможны три случая.

а) Квадратный трехчлен $f(t) = t^2 - (3a+2)t - 5$ имеет два корня (возможно, совпадающих), причем оба корня больше 4. Имеем (рисунок 20):

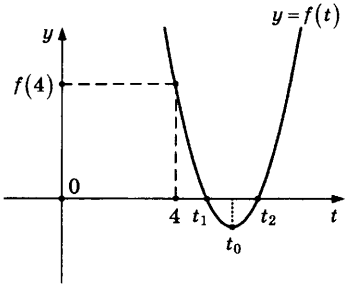

Рис. 20

$$\begin{cases} f(4) > 0, \\ t_0 > 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 4(3a+2) - 5 > 0, \\ \dfrac{3a+2}{2} > 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \dfrac{1}{4}, \\ a > 2, \end{cases}$$

— нет решений (здесь t_0 — абсцисса вершины параболы).

б) Квадратный трехчлен имеет два корня (возможно, совпадающих), причем оба корня меньше либо равны 1. В этом случае получаем (рисунок 21):

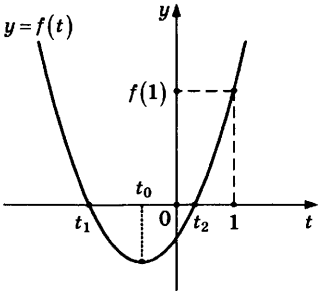

Рис. 21

$$\begin{cases} f(1) \ge 0, \\ t_0 \le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-(3a+2)-5 \ge 0, \\ \dfrac{3a+2}{2} \le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le -2, \\ a \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\infty, -2].$$

в) Квадратный трехчлен имеет два различных корня, один из которых больше 4, а другой меньше либо равен 1. Это эквивалентно выполнению следующих условий (рисунок 22):

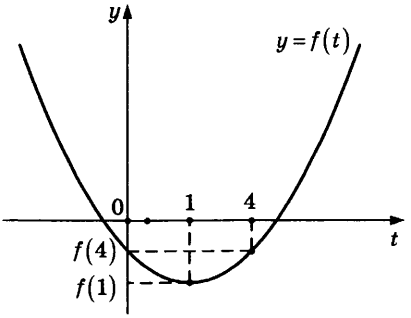

Рис. 22

$$\begin{cases} t_1 \le 1, \\ t_2 > 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \le 0, \\ f(4) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a-6 \le 0, \\ -12a+3 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right).$$

Ответ получается как объединение всех разобранных случаев.

Ответ: $(-\infty, -2] \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

Пример 7. При каких значениях a строго между двумя корнями уравнения $ax^2 + 2x + 2a^2 = 0$ находится ровно один корень уравнения $ax^2 + 2x - 2a^2 = 0$ и строго между двумя корнями второго уравнения находится ровно один корень первого уравнения?

Решение: Пусть $f(x)=ax^2+x+2a^2$ и $g(x)=ax^2+2x-2a^2$ и пусть x_0 — абсцисса точки пересечения графиков функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$. Имеем:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow ax^2+x+2a^2=ax^2+2x-2a^2\Leftrightarrow x_0=4a^2.$$

Если $a>0$, то условие задачи будет выполнено тогда и только тогда, когда $f(x_0)<0$ (рисунок 23).

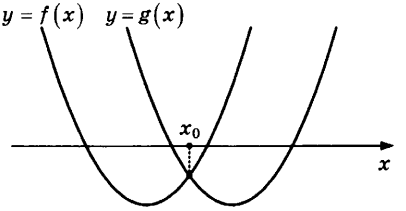

Рис. 23

Если же $a<0$, то необходимым и достаточным условием будет $f(x_0)>0$ (рисунок 24). Объединяя два разобранных случая, получаем

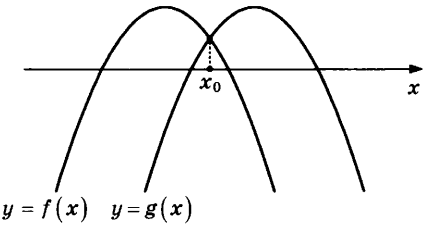

Рис. 24

$$af(x_0)<0\Leftrightarrow a\left(16a^5+6a^2\right)<0\Leftrightarrow a\left(8a^3+3\right)<0\Leftrightarrow a\in\left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{2},0\right).$$

Ответ: $\left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{2},0\right)$.

Пример 8. Найти все значения a, при каждом из которых все решения неравенства $x^2-(4a+4)x+3a^2+12a\le 0$ удовлетворяют неравенству $x(x+a+1)\ge 0$.

Решение: Множество решений неравенства

$$x^2-(4a+4)x+3a^2+12a\le 0\Leftrightarrow (x-3a)(x-a-4)\le 0$$

образует отрезок (возможно, вырожденный в точку) с концами $3a$ и $a+4$ (рисунок 25).

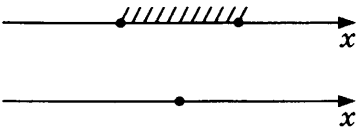

Рис. 25

Множество решений неравенства $x(x+a+1)\geq 0$ образует объединение двух лучей (направленных в противоположные стороны и, возможно, с общим началом) с концами 0 и $-a-1$ (рисунок 26).

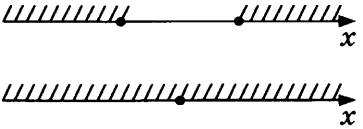

Рис. 26

Все точки первого множества принадлежат второму тогда и только тогда, когда:

а) оба конца первого множества попадают в один и тот же луч второго множества, т.е. когда

$$\begin{cases} 3a \geq 0, \\ a+4 \geq 0, \\ 3a \geq -a-1, \\ a+4 \geq -a-1; \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 0$$

или когда

$$\begin{cases} 3a \leq 0, \\ a+4 \leq 0, \\ 3a \leq -a-1, \\ a+4 \leq -a-1; \end{cases} \Leftrightarrow a \leq -4;$$

б) второе множество есть вся прямая, т.е. когда $0=-a-1 \Leftrightarrow a=-1$.

Ответ: $a \in (-\infty,-4] \cup \{-1\} \cup [0,+\infty)$.

Пример 9. Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству $(a+2)x^3-(1+2a)x^2-6x+(a^2+4a-5)>0$ хотя бы при одном значении a, принадлежащем отрезку $[-2,1]$.

Решение: Сформулируем задачу следующим образом: «Найти все значения параметра x, при которых неравенство

$$(a+2)x^3-(1+2a)x^2-6x+(a^2+4a-5)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2+(x^3-2x^2+4)a+2x^3-x^2-6x-5>0$$

имеет относительно переменной a решение, принадлежащее отрезку $a \in [-2,1]$». Будем искать те x, при которых данное неравенство не имеет решений на отрезке $[-2,1]$ (в ответ запишем все остальные x). Это произойдет тогда и только тогда, когда будут одновременно выполнены два условия: $f(-2) \le 0$ и $f(1) \le 0$, где

$$f(a) = a^2 + (x^3 - 2x^2 + 4)a + 2x^3 - x^2 - 6x - 5$$

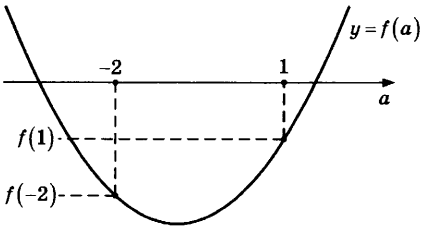

Рис. 27

Имеем:

$$\begin{cases} f(-2) \le 0, \\ f(1) \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2(x^3 - 2x^2 + 4) + 2x^3 - x^2 - 6x - 5 \le 0, \\ 1 + (x^3 - 2x^2 + 4) + 2x^3 - x^2 - 6x - 5 \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \le 0, \\ x(x^2 - x - 2) \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 3. \\ x \in (-\infty, -1] \cup [0,2]; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-1\} \cup [0,2].$$

Таким образом, ответом к задаче будут служить $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (2,+\infty)$.

Ответ: $(-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (2,+\infty)$.

Пример 10. Найти все значения b, при которых уравнение $3 \cdot \sqrt[5]{x+2} - 16b^2 \cdot \sqrt[5]{32x+32} = \sqrt[10]{x^2+3x+2}$ имеет единственное решение.

Решение: Согласно области определения уравнения $x \in (-\infty,-2] \cup [-1,+\infty)$. Заметим, что $x = -1$ не является решением ни при каком b, и рассмотрим промежуток $x \in (-1,+\infty)$. Разделив обе части уравнения на $\sqrt[5]{x+1}$, получим, что:

$$3 \cdot \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x+1}} - 32b^2 = \sqrt[10]{1 + \frac{1}{x+1}}.$$

Пусть $y=\sqrt[10]{1+\frac{1}{x+1}}$. Тогда уравнение принимает вид $3y^2-y-32b^2=0$. Для нахождения области значения функции $y = y(x)$ построим график функции $f(x)=1+\frac{1}{x+1}$ (рисунок 28).

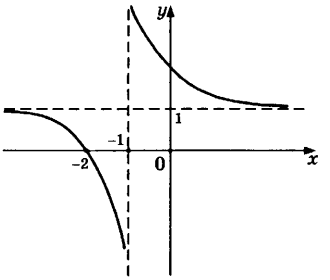

Рис. 28

Из этого графика видно, что при $x\in(-1,+\infty)$ значения функции $f(x)$, а значит, и $y(x)$, принадлежат промежутку $y(x)\in(1,+\infty)$.

Вернемся теперь к квадратному уравнению. Найдем такие b, при которых ровно один его корень будет больше единицы. Рассмотрим квадратный трехчлен $g(y)=3y^2-y-32b^2$. Так как абсцисса вершины параболы равна $y_0=\frac{1}{6}$, то это равносильно выполнению условия $g(1)<0$ (рисунок 29).

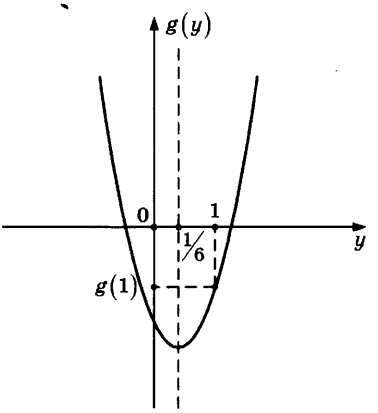

Рис. 29

Имеем:

$$g(1)=3-1-32b^2<0 \Leftrightarrow b^2>\frac{1}{16} \Leftrightarrow b\in\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4},+\infty\right).$$

При остальных b уравнение $g(y)=0$ на промежутке $y\in(1,+\infty)$ решений иметь не будет.

Пусть теперь $x \le -2$. Снова разделим обе части исходного уравнения на $\sqrt[5]{x+1}$. Имеем:

$$3\cdot\sqrt[5]{1+\frac{1}{x+1}}-32b^2=-\sqrt[10]{1+\frac{1}{x+1}}.$$

Обозначив $y=\sqrt[10]{1+\frac{1}{x+1}}$, получим уравнение $g(y)=3y^2+y-32b^2=0$. При этом на промежутке $x\in(-\infty,-2]$ функция $y = y(x)$ принимает значения $y\in[0,\ 1)$. Здесь абсцисса вершины параболы равна $y_0=-\frac{1}{6}$. Ровно один корень квадратного уравнения лежит в промежутке $y\in[0,\ 1)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия $g(0)\le 0$ и $g(1)>0$ (рисунок 30).

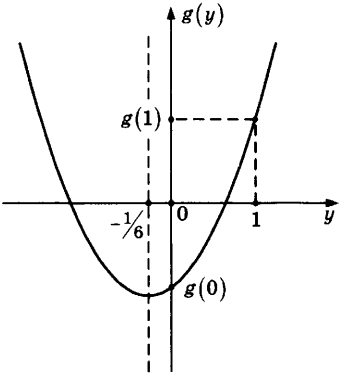

Рис. 30

Имеем:

$$\begin{cases} g(0)\le 0, \\ g(1)>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -32b^2\le 0, \\ 3+1-32b^2>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2\ge 0, \\ b^2<\frac{1}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2\sqrt{2}}<b<\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

При остальных b уравнение $g(y)=0$ на промежутке $y\in[0,\ 1)$ решений иметь не будет.

Таким образом, при $b\in\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}},-\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ исходное уравнение будет иметь два решения (одно на промежутке $x\in(-1,+\infty)$, другое на промежутке $x\in(-\infty,-2]$), а при остальных b будет иметь единственное решение. Эти b и запишем в ответ.

Ответ: $\left(-\infty,-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right]\cup\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]\cup\left[\frac{1}{2\sqrt{2}},+\infty\right)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти все значения a, при которых уравнение $(4\cos x-3-a)\cdot\cos x-2{,}5\cos 2x+1{,}5=0$ имеет хотя бы один корень.

2. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(\mathrm{tg}x+6)^2-(a^2+2a+8)(\mathrm{tg}x+6)+a^2(2a+8)=0$ имеет на отрезке $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ ровно два решения.

3. При всех значениях параметра a решить уравнение $25^x-(a-1)\cdot 5^x+2a+3=0$ и указать, при каких a оно имеет единственное решение.

4. Найти все значения параметра b, при каждом из которых уравнение $b\cdot 3^{-2x}+b+1=-3^{-4x-1}$ имеет ровно два корня, больший из которых не меньше $\frac{1}{2}$.

5. При каких значениях параметра a уравнение $(a-1)\cdot 4^x+(2a-3)\cdot 6^x=(3a-4)\cdot 9^x$ имеет единственное решение?

6. При каких значениях параметра a все числа из отрезка $-1\le x\le 3$ удовлетворяют неравенству $2ax+2\sqrt{2x+3}-2x+3a-5<0$?

7. Найти все значения параметра a, для которых неравенство $4^x-a\cdot 2^x-a+3\le 0$ имеет хотя бы одно решение.

8. Найти все те значения параметра s, при которых корни уравнений $x^2+\frac{3x}{s}+2s=0$ и $x^2+\frac{12x}{s}-s=0$ не перемежаются, т.е. оба уравнения имеют по два корня и между двумя корнями одного из уравнений нет ни одного корня другого уравнения.

9. Найти все значения параметра k, при каждом из которых существует хотя бы одно общее решение у неравенств $x^2+4kx+3k^2>1$ и $x^2+2kx\le 3k^2-8k+4$.

10. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $x-2=\sqrt{-2(p+2)x+2}$ имеет единственное решение.

11. Найти все значения b, при которых оба неравенства $2b\cos 2(x-y)+8b^2\cos(x-y)+8b^2(b+1)+5b<0$ и $x^2+y^2+1>$ $>2bx+2y+b-b^2$ выполняются при любых x и y.

12. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{4+\sin^2 x}=a-\cos x$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$.

§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИЧЕСКИХ ИЛЛЮСТРАЦИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

Рассмотрим несколько задач, связанных с исследованием квадратного трехчлена, при решении которых применяется графическая иллюстрация.

Пример 1. Найти все значения a, при каждом из которых функция $f(x)=x^2-4|x-a^2|-8x$ имеет более двух точек экстремума.

Решение: Если $x \geq a^2$, то $f(x)=x^2-12x+4a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 6$. Если же $x \leq a^2$, то $f(x)=x^2-4x-4a^2$, и в этом случае график функции $f(x)$ представляет собой часть параболы с осью симметрии $x = 2$, ветви которой также направлены вверх. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a^2, f(a^2))$. Все возможные положения графика функции $f(x)$ показаны на рисунках 31–33.

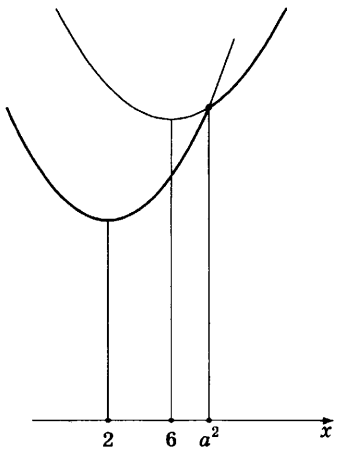

Рис. 31

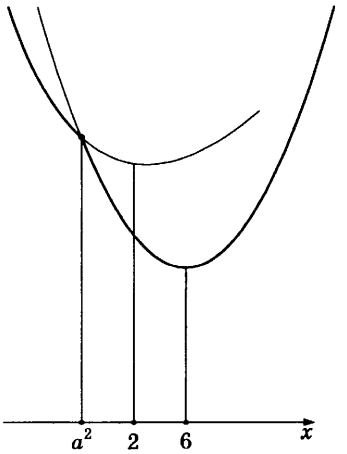

Рис. 32

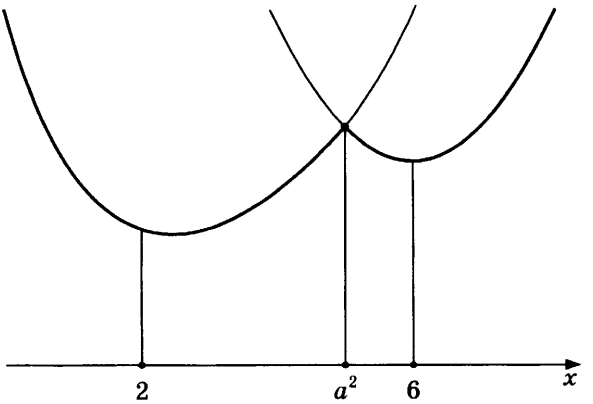

Рис. 33

Функция $y=f(x)$ имеет более двух точек экстремума, а именно — три, в единственном случае (рисунок 33): $2<a^2<6 \Leftrightarrow a\in\left(-\sqrt{6},-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},\sqrt{6}\right)$.

Ответ: $\left(-\sqrt{6},-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},\sqrt{6}\right)$.

Пример 2. Найти все значения a, при каждом из которых любая прямая, перпендикулярная оси ординат, имеет нечетное число общих точек с графиком функции $f(x)=(2a-3)x-(x+3)|x-a|$.

Решение: Если $x \geq a$, то $f(x)=(2a-3)x-(x+3)(x-a)=$ $=-x^2+(3a-6)x+3a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз, и осью симметрии $x=\frac{3}{2}a-3$. Если же $x \leq a$, то $f(x)=(2a-3)x+(x+3)(x-a)=$ $=x^2+ax-3a$, и в этом случае график функции $f(x)$ представляет собой часть параболы с осью симметрии $x=-\frac{1}{2}a$, ветви которой уже направлены вверх. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a,f(a))$. Все возможные положения графика функции $f(x)$ показаны на рисунках 34–37.

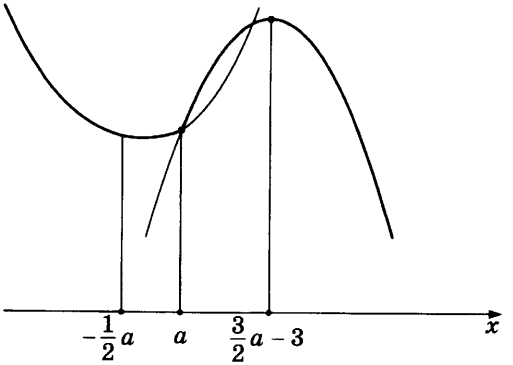

Рис. 34

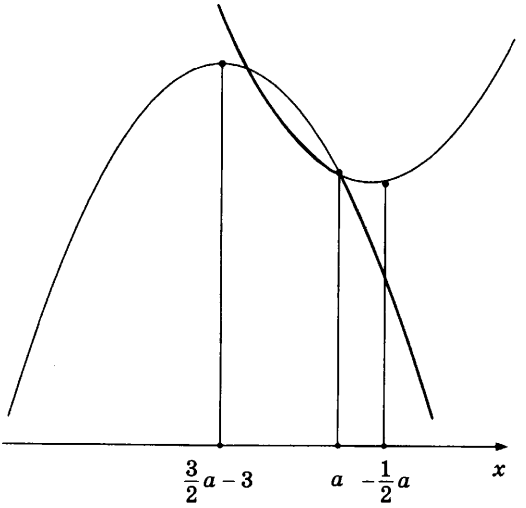

Рис. 35

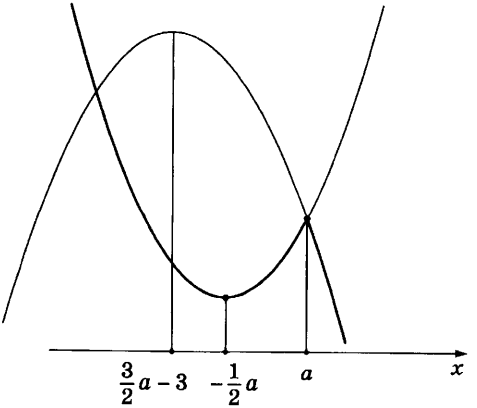

Рис. 36

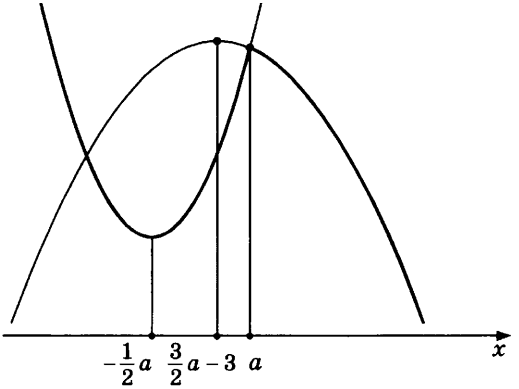

Рис. 37

Любая горизонтальная прямая пересекает график функции $y=f(x)$ в нечетном числе точек тогда и только тогда, когда функция монотонна на всей числовой прямой. Это происходит в единственном случае (рисунок 35): $\frac{3}{2}a-3\le a\le-\frac{1}{2}a \Leftrightarrow a\le 0$.

Ответ: $(-\infty,0]$.

Пример 3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=-x^2+5|x-a|-3x$ на отрезке $[-6,3]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

Решение: Если $x \ge a$, то $f(x) = -x^2 + 5(x-a) - 3x = -x^2 + 2x - 5a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз, и осью симметрии $x = 1$. Если же $x \le a$, то $f(x)=-x^2-5(x-a)-3x=-x^2-8x+5a$, и в этом случае график функции $f(x)$ представляет собой часть параболы с осью симметрии $x = -4$, ветви которой также направлены вниз. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a,f(a))$. Если точка $x = a$ не принадлежит интервалу $(-4, 1)$ (рисунки 38, 39), то функция $f(x)$ не имеет точек минимума, поэтому наименьшее значение этой функции на любом отрезке принимается на одном из концов этого отрезка.

Следовательно, все такие значения a удовлетворяют условию задачи.

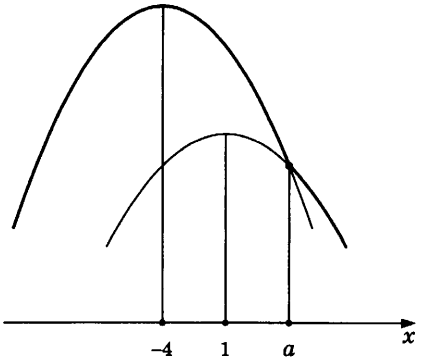

Рис. 38

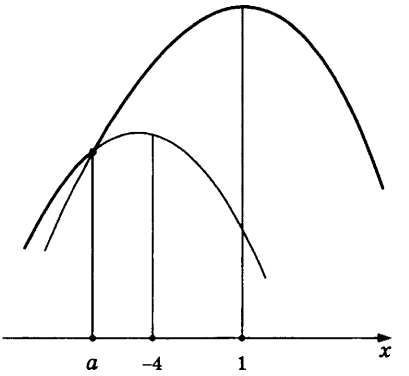

Рис. 39

В противном случае функция $f(x)$ имеет точку минимума (точка $x = a$), лежащую внутри интервала $(-4, 1)$. Если точка $x = a$ расположена не дальше от точки $x = 1$, чем точка $x = 3$, то значение функции $f(x)$ в точке минимума $x = a$ не меньше значения этой функции в точке $x = 3$ (рис. 40).

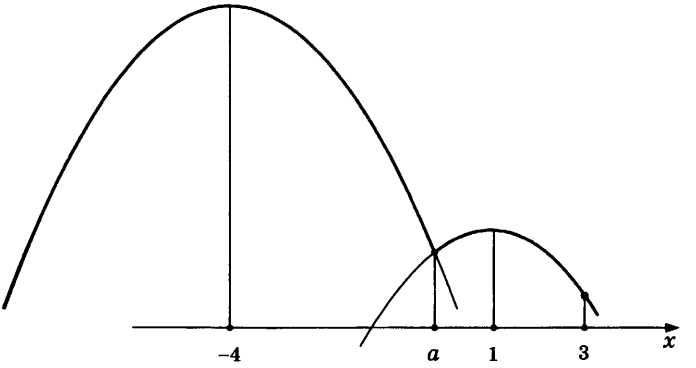

Рис. 40

Поэтому наименьшее значение функции на отрезке $[-6, 3]$ опять же принимается на одном из концов этого отрезка. Поэтому все такие a являются решением задачи. Имеем:

$$\begin{cases} -4 < a < 1, \\ 1 - a \le 3 - 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < a < 1, \\ a \ge -1; \end{cases} \Leftrightarrow a \in [-1, 1).$$

Аналогично, если точка $x = a$ расположена не дальше от точки $x = -4$, чем точка $x = -6$, то значение функции $f(x)$ в точке минимума $x = a$ не меньше значения этой функции в точке $x = -6$ (рисунок 41).

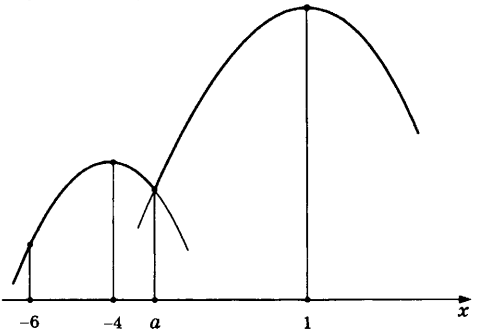

Рис. 41

И в этом случае наименьшее значение функции на отрезке $[-6,3]$ принимается на одном из концов этого отрезка и все такие a удовлетворяют условию задачи. Имеем:

$$\begin{cases} -4 < a < 1, \\ a-(-4) \le -4-(-6); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < a < 1, \\ a \le -2; \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-4,-2].$$

Для всех остальных a значение функции $f(x)$ в точке минимума $x = a$ является наименьшим на отрезке $[-6,3]$ (рисунок 42), и условие задачи не выполняется.

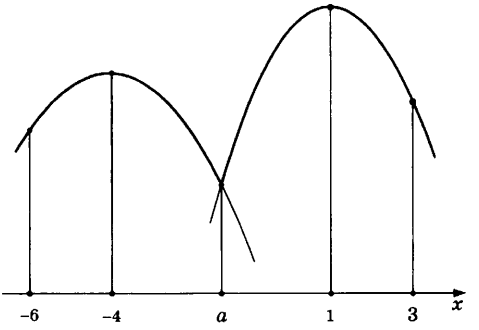

Рис. 42

Объединяя все разобранные случаи, находим ответ: $a \in (-\infty,-2] \cup [-1,+\infty)$.

Ответ: $(-\infty,-2] \cup [-1,+\infty)$.

Пример 4. При каких значениях параметра a уравнение $\left|x^2-5|x|\right|=a(x+4)$ имеет ровно три различных корня?

Решение:. Построим на координатной плоскости Oxy графики функций $y=\left|x^2-5|x|\right|$ и $y=a(x+4)$. Первый график разбивается на четыре участка следующим образом:

$$y = x^2 + 5x, \text{ если } x \le -5;\ y = -x^2 - 5x, \text{ если } -5 \le x \le 0;$$
$$y = -x^2 + 5x, \text{ если } 0 \le x \le 5;$$
$$y = x^2 - 5x, \text{ если } x \ge 5.$$

Второй график представляет собой прямую с угловым коэффициентом a, проходящую через точку (−4, 0) (рисунок 43).

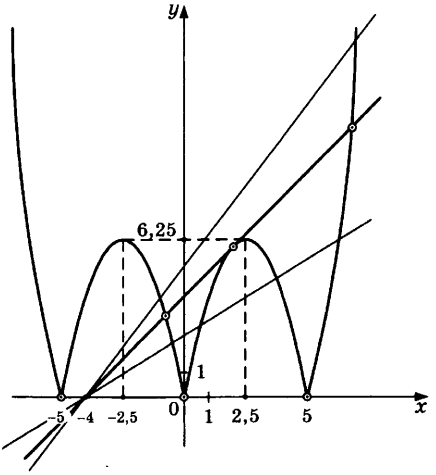

Рис. 43

Исходное уравнение имеет ровно три различных решения тогда и только тогда, когда эти два графика имеют ровно три общие точки. Как видно из рисунка, существуют две прямые, проходящие через точку (−4, 0) и пересекающие график функции $y=\left|x^2-5|x|\right|$ ровно в трех точках. Одна из этих прямых есть ось Ox и соответствует значению $a = 0$. Другая прямая является касательной к графику функции $y=-x^2+5x$ в точке, принадлежащей интервалу $x \in (0,5)$. Найдем значение a, соответствующее этой прямой. При таком a уравнение

$$-x^2+5x=a(x+4)=0 \Leftrightarrow x^2+(a-5)x+4a=0$$

должно иметь ровно одно решение. Дискриминант этого уравнения равен

$$D=(a-5)^2-16a=0 \Leftrightarrow a^2-26a+25=0 \Leftrightarrow a=1 \text{ или } a=25.$$

Касательной, изображенной на рисунке, соответствует значение $a = 1$. Таким образом, ответом к задаче будут служить $a = 0$ и $a = 1$.

Ответ: 0, 1.

Пример 5. Для каждого значения $a > 0$ найти уравнения всех прямых, проходящих через начало координат и имеющих ровно две общие точки с графиком функции $f(x)=x|x+2a|+a^2$.

Решение: Если $x \geq -2a$, то $f(x)=x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$, поэтому ее график есть часть параболы, касающейся оси абсцисс в точке $x = -a$ с ветвями, направленными вверх. Если же $x \leq -2a$, то $f(x)=-x^2-2ax+a^2=-(x+a)^2+2a^2$, и в этом случае график функции $f(x)$ представляет собой часть параболы с осью симметрии $x = -a$, ветви которой направлены вниз. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(-2a, a^2)$ (рисунок 44).

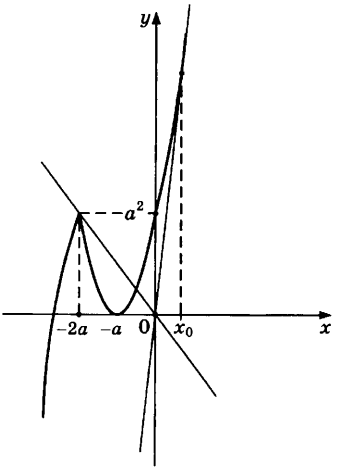

Рис. 44

Прямая $x = 0$ имеет с графиком функции $y=f(x)$ только одну общую точку. Из рисунка видно, что прямая $y = kx$ имеет ровно две общие точки с графиком этой функции в одном из следующих трех случаев:

а) Прямая проходит через точку $(-2a,\ a^2)$. Она имеет уравнение $y=-\frac{1}{2}ax$;

б) Прямая совпадает с осью абсцисс и имеет уравнение $y = 0$;

в) Прямая касается ветви графика в точке с абсциссой $x_0 > 0$ и пересекает вторую часть графика. Найдем значение k, соответствующее этой прямой. При таком k уравнение

$$kx=(x+a)^2 \Leftrightarrow x^2+(2a-k)x+a^2=0$$

должно иметь ровно одно решение. Дискриминант этого уравнения равен

$$D=(2a-k)^2-4a^2=0 \Leftrightarrow -4ak+k^2=0 \Leftrightarrow k=0$$

$$\text{или } k=4a.$$

Касательной, изображенной на рисунке, соответствует значение $k = 4a$.

Объединяя все рассмотренные случаи, находим ответ: $y = 0$, $y=-\frac{1}{2}ax$, $y = 4ax$.

Ответ: $y = 0$, $y=-\frac{1}{2}ax$, $y = 4ax$.

Пример 6. Найти p и q, при которых неравенство $|x^2+px+q|>2$ не имеет решений на отрезке [1, 5].

Решение: Сформулируем условие задачи следующим образом: «Найти p и q, при которых функция $f(x)=x^2+px+q$ на отрезке $x\in[1,5]$ принимает значения, лежащие в промежутке $f(x)\in[-2,2]$».

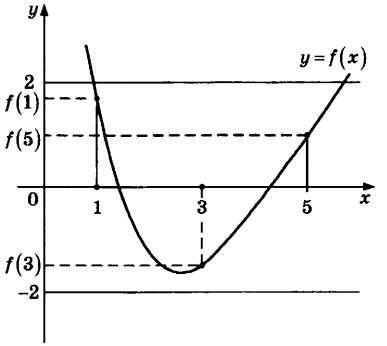

Рис. 45

Для этого необходимо выполнение следующих условий (рисунок 45):

$$\begin{cases} -2 \le f(1) \le 2, \\ -2 \le f(3) \le 2, \\ -2 \le f(5) \le 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le 1 + p + q \le 2, \\ -2 \le 9 + 3p + q \le 2, \\ -2 \le 25 + 5p + q \le 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 \le 26 + 6p + 2q \le 4, \\ -4 \le 18 + 6p + 2q \le 4. \end{cases}$$

Здесь мы сложили первую строку с третьей, а вторую строку умножили на 2. Из первой строки полученной системы следует, что $6p + 2q \le -22$, а из второй — что $6p + 2q \ge -22$. Значит, $6p + 2q = -22$ и $q = -11 - 3p$. Вернемся к исходной системе:

$$\begin{cases} q = -11 - 3p, \\ -2 \le 1 + p + q \le 2, \\ -2 \le 9 + 3p + q \le 2, \\ -2 \le 25 + 5p + q \le 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -11 - 3p, \\ -2 \le -10 - 2p \le 2, \\ -2 \le 14 + 2p \le 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -11 - 3p, \\ -6 \le p \le -4, \\ -8 \le p \le -6. \end{cases}$$

Следовательно, $p = -6$ и $q = 7$.

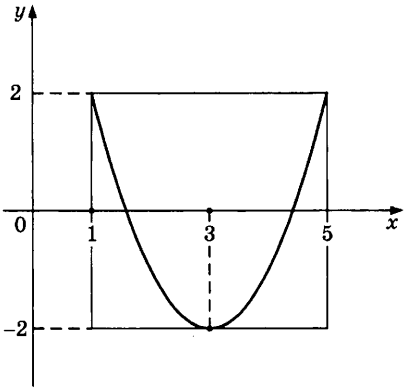

Рис. 46

Для проверки достаточности построим график функции $f(x) = x^2 - 6x + 7$ на отрезке $x \in [1, 5]$, что и сделано на рисунке 46. Из этого графика видно, что условие задачи выполняется.

Ответ: $p = -6$, $q = 7$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x|x+2a|+1-a=0$ имеет единственное решение.

2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=2ax+$ $+|x^2-8x+7|$ больше 1.

3. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $|x^2-2x+a|>5$ не имеет решений на отрезке $[-1,2]$.

4. Найти значения a, при которых наибольшее значение функции $f(x)=2x^2+x(5-3a)+a^2-3a+4$ на отрезке с концами в точках $a-1$ и -4 минимально. Указать это значение.

5. Найти значения c и d, при которых наибольшее значение функции

$$y(x)=\left|4\cdot\frac{3^x+3^{-x}-2}{3^x+3^{-x}+2}+2(c+2d)\cdot\frac{3^x-1}{3^x+1}+2c+d\right|$$

на отрезке $[-1,1]$ является наименьшим.

6. Функция $y(x)=x^2+2(c-d)x+3c-d$ такова, что $y(1)\cdot y(-1)\le 0$ и $|c-d|\ge 1$. Найти числа c и d, при которых длина промежутка, представляющего собой множество значений функции $f(x)=|y(x)|$ на отрезке $[-1,1]$, наименьшая; указать это множество значений.

7. Найти наименьшее значение выражения $(x-y)^2+3(y-z)^2-$ $-5(z-x)^2$, если $x, y, z\in[-1,1]$.

§ 6. ОГРАНИЧЕННОСТЬ ФУНКЦИИ. НАХОЖДЕНИЕ ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ

Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной сверху* (*ограниченной снизу*), если существует такое число M, что для любого x из области определения этой функции выполнено неравенство $f(x)\le M$ $(f(x)\ge M)$. Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху и снизу. Аналогично определяется ограниченность функции на каком-либо промежутке. Сформулируем полезное утверждение, помогающее в некоторых случаях находить область значений функции.

Теорема 1. Пусть a и b — любые неотрицательные числа. Тогда среднее геометрическое этих чисел не превосходит их среднего арифметического, а именно, $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$. При этом равенство $\sqrt{ab}=\frac{a+b}{2}$ достигается в том и только в том случае, когда $a=b$.

В этом параграфе будут разобраны задачи, в решении которых *используется свойство ограниченности* функций, а также задачи, в которых необходимо найти область значений какой-либо функции. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Для всех вещественных значений a решить уравнение $(a+2)^2\log_3(2x-x^2)+(3a-1)^2\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=0$.

Решение: Перепишем данное уравнение в виде

$$(a+2)^2\log_3\left(1-(x-1)^2\right)+(3a-1)^2\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=0.$$

На области определения справедливы неравенства: $(a+2)^2\ge 0$ и $\log_3\left(1-(x-1)^2\right)\le 0$[1], второе неравенство следует из неравенства $1-(x-1)^2\le 1$. С другой стороны, $(3a-1)^2\ge 0$ и $\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\le 0$, поскольку $1-\frac{x^2}{2}\le 1$. Это значит, что

[1] Левая часть неравенства $\log_3(1-(x-1)^2)\le 0$, является примером *ограниченной сверху функции* на области ее определения.

$$(a+2)^2\log_3\left(1-(x-1)^2\right)\le 0 \qquad \text{и} \qquad (3a-1)^2\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\le 0.$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно системе:

$$(a+2)^2\log_3\left(1-(x-1)^2\right)+(3a-1)^2\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}1-(x-1)^2>0,\\ 1-\dfrac{x^2}{2}>0,\\ (a+2)^2\log_3\left(1-(x-1)^2\right)=0,\\ (3a-1)^2\log_{11}\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)=0;\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+2=0,\\ \log_{11}\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)=0,\\ 0<x<\sqrt{2},\end{cases}\\ \begin{cases}3a-1=0,\\ \log_3\left(1-(x-1)^2\right)=0,\\ 0<x<\sqrt{2},\end{cases}\end{array}\right.$$

так как легко проверить, что числа $a+2$ и $3a-1$, а также выражения $\log_3\left(1-(x-1)^2\right)$ и $\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$ одновременно в нуль не обращаются. Таким образом, если $a=-2$, то $x=0$, что не входит в область определения неравенства. Если $a=\frac{1}{3}$, то $x=1$ — является решением задачи.

Ответ: *Если* $a=\frac{1}{3}$, *то* $x=1$; *если* $a\ne\frac{1}{3}$, *то нет решений.*

Пример 2. При каких значениях a уравнение $2\cos^2\left(2^{2x-x^2-1}\right)=a-\sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2}\right)$ имеет хотя бы одно решение?

Решение: Пусть $y=2^{2x-x^2}$. Тогда уравнение примет следующий вид:

$$2\cos^2\frac{y}{2}=a-\sqrt{3}\sin y \Leftrightarrow 1+\cos y=a-\sqrt{3}\sin y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos y+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin y=\frac{a-1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos y+\sin\frac{\pi}{3}\sin y=\frac{a-1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(y-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{a-1}{2}.$$

Найдем область значений функции $y=y(x)=2^{2x-x^2}$. Так как $2x-x^2=1-(x-1)^2\le 1$, то $y(x)\in(0,2]$. Значит, выражение $y-\frac{\pi}{3}$ принимает все значения, лежащие в промежутке $\left(-\frac{\pi}{3}, 2-\frac{\pi}{3}\right]$. Как видно из рисунка 47,

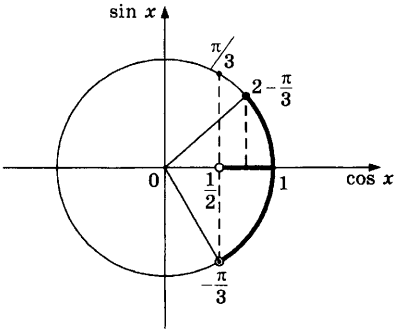

Рис. 47

выражение $\cos\left(y-\frac{\pi}{3}\right)$ принимает в этом случае значения из промежутка $\left(\frac{1}{2},1\right]$. Следовательно, исходное уравнение будет иметь решение тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2}<\frac{a-1}{2}\le 1 \quad\Leftrightarrow\quad a\in(2,3].$$

Ответ: $(2,3]$.

Пример 3. Найти все значения x из промежутка $[-3,1]$, для которых неравенство $x\left(\pi(x+1)-4\operatorname{arctg}\left(3m^2+12m+11\right)\right)>0$ выполняется при любых целых m.

Решение: Найдем область значений функции $y(t)=\operatorname{arctg}\left(3t^2+12t+11\right)$, где t — любое действительное число. Ясно, что $3t^2+12t+11=3(t+2)^2-1\ge -1$. Поэтому $\operatorname{arctg}\left(3t^2+12t+11\right)\ge -\frac{\pi}{4}$. С другой стороны, поскольку выражение $3t^2+12t+11$ принимает сколь угодно большие

значения, функция $y(t)$ принимает значения, сколь угодно близкие к $\pi/2$. Следовательно, искомой областью значения является промежуток $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$. Рассмотрим три случая.

а) Если $x>0$, то неравенство примет следующий вид:

$$\pi(x+1)-4\operatorname{arctg}\left(3m^2+12m+11\right)>0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{arctg}\left(3m^2+12m+11\right)<\frac{\pi(x+1)}{4}.$$

При достаточно больших целых m выражение $\operatorname{arctg}(3m^2+12m+11)$ принимает значения, сколь угодно близкие к $\pi/2$. Значит, чтобы последнее неравенство выполнялось при любых целых m, необходимо и достаточно выполнение условия $\frac{\pi(x+1)}{4}\geq\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x\geq 1$. Так как согласно условию задачи $x\in[-3,1]$, решением в первом случае будет служить $x = 1$.

б) Если $x = 0$, исходное неравенство примет вид $0 > 0$ и не будет верным ни при каком m.

в) Пусть $x < 0$. Имеем:

$$\pi(x+1)-4\operatorname{arctg}(3m^2+12m+11)<0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{arctg}(3m^2+12m+11)>\frac{\pi(x+1)}{4}.$$

Так как свое наименьшее значение $-\pi/4$ функция $y(t)=\left(3t^2+12t+11\right)$ принимает при целом значении переменной t $(t = -1)$, то последнее неравенство будет выполнено при всех целых m тогда и только тогда, когда $\frac{\pi(x+1)}{4}<-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x<-2$. Так как при этом $x\in[-3,1]$, то решением в данном случае будут служить $x\in[-3,-2)$.

Ответ получается как объединение всех разобранных случаев.

Ответ: $[-3,-2)\cup\{1\}$.

Пример 4. Решить неравенство $5^{\log_x 2}\cdot\log_2 x+5^{\log_2 x}\cdot\log_x 2\leq 10$.

Решение:. Пусть $t=\log_2 x$, тогда данное неравенство примет следующий вид:

$$5^{\frac{1}{t}}\cdot t+5^{t}\cdot\frac{1}{t}\leq 10.$$

Ясно, что полученное неравенство выполнено при всех $t < 0$. Для $t > 0$ имеем:

$$5^{\frac{1}{t}} \cdot t + 5^t \cdot \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{5^{\frac{1}{t}} \cdot t \cdot 5^t \cdot \frac{1}{t}} = 2\sqrt{5^{\frac{1}{t}+t}} \geq 2\sqrt{5^2} = 10.$$

Здесь мы два раза использовали неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух положительных чисел. Из проведенных оценок следует, что $t = 1$ — единственное положительное решение неравенства. Возвращаясь к переменной x, получаем, что $0 < x < 1$ или $x = 2$.

Ответ: $(0,1) \cup \{2\}$.

Пример 5. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} 64 \cdot 25^{-\sqrt{y}} + (8 - 40a) \cdot 5^{-\sqrt{y}} - 5a \leq 0, \\ 40 \cdot 5^{-\sqrt{y}} = 80 \cdot 2^x + 5a + a \cdot 2^{-x} \end{cases}$$

имеет решение.

Решение: Положим $t = 5^{-\sqrt{y}} \in (0,1]$. Тогда первое неравенство системы принимает вид

$$64t^2 + (8 - 40a)t - 5a \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 64\left(t + \frac{1}{8}\right)\left(t - \frac{5a}{8}\right) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad t \leq \frac{5a}{8}.$$

Следовательно, для существования y необходимо и достаточно выполнения условия $a > 0$, при этом $t \in \left(0, \min\left\{1, \frac{5a}{8}\right\}\right]$. Рассмотрим теперь второе уравнение системы. Переменная $z = 2^x$ принимает все положительные значения и $a > 0$. Поэтому к правой части этого уравнения можно применить неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух положительных чисел. Имеем:

$$80z + 5a + \frac{a}{z} \geq 5a + 2\sqrt{80z \cdot \frac{a}{z}} = 5a + 8\sqrt{5a}.$$

Следовательно, x существует при $t \geq \frac{a}{8} + \sqrt{\frac{a}{5}}$, а исходная система имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\frac{a}{8}+\sqrt{\frac{a}{5}}\le\min\left\{1,\frac{5a}{8}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{a}{8}+\sqrt{\frac{a}{5}}\le 1,\\ \frac{a}{8}+\sqrt{\frac{a}{5}}\le\frac{5a}{8};\end{cases} \Leftrightarrow a\in\left[\frac{4}{5},\frac{72-16\sqrt{14}}{5}\right].$$

Ответ: $\left[\frac{4}{5},\frac{72-16\sqrt{14}}{5}\right]$.

Пример 6. При всех значениях параметра a решить уравнение $x^2+4x+6-4a(x-a)-\cos(x+2)=8a+\cos(x-4a+2)$.

Решение: Пусть, для удобства, $x+2=t$, тогда $x=t-2$. Имеем:

$$t^2+2-4a(t-2-a)-\cos t=8a+\cos(t-4a)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2-4at+4a^2+2=\cos t+\cos(t-4a)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t-2a)^2+2=2\cos(t-2a)\cos 2a.$$

Так как левая часть полученного уравнения всегда больше либо равна 2, а правая часть — меньше либо равна 2, то необходимые условия существования решения есть $\cos 2a=\pm 1$, то есть $a=\frac{\pi n}{2}$; $n\in Z$ и $t-2a=0$. Пусть $a=\pi n$; $n\in Z$. Имеем:

$$\begin{cases}t=2a,\\ \cos 2a=1,\\ \cos(t-2a)=1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\pi n,\\ t=2\pi n; n\in Z.\end{cases}$$

Если же $a=\frac{\pi}{2}+\pi n$; $n\in Z$, получаем, что

$$\begin{cases}t=2a,\\ \cos 2a=-1,\\ \cos(t-2a)=-1,\end{cases}$$

— нет решений. Таким образом, при $a=\pi n$; $n\in Z$ решением являются $t=2\pi n$, то есть $x=2\pi n-2$; при остальных a решений нет.

Ответ: *Если* $a=\pi n$, *то* $x=2\pi n-2$; $n\in Z$.

Пример 7. При всех значениях параметра c решить систему

$$\begin{cases}\frac{9}{\sqrt{x+c}}+\frac{16}{\sqrt{y-c}}\le 22-\sqrt{x+c}-4\sqrt{y-c},\\ 2^{x-11}\cdot\log_2(4-y)=1.\end{cases}$$

Решение: Запишем первое неравенство системы следующим образом:

$$\frac{9}{\sqrt{x+c}}+\frac{16}{\sqrt{y-c}}\le 22-\sqrt{x+c}-4\sqrt{y-c}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{\sqrt{x+c}}+\sqrt{x+c}+\frac{16}{\sqrt{y-c}}+4\sqrt{y-c}\le 22.$$

Применим дважды к левой части неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое положительных чисел. Имеем:

$$\frac{9}{\sqrt{x+c}}+\sqrt{x+c}+\frac{16}{\sqrt{y-c}}+4\sqrt{y-c}\ge 2\sqrt{\frac{9}{\sqrt{x+c}}\cdot\sqrt{x+c}}+$$

$$+2\sqrt{\frac{16}{\sqrt{y-c}}\cdot 4\sqrt{y-c}}=22.$$

Значит, левая часть исходного неравенства равна 22, а это возможно при выполнении условий:

$$\begin{cases}\dfrac{9}{\sqrt{x+c}}=\sqrt{x+c},\\ \dfrac{16}{\sqrt{y-c}}=4\sqrt{y-c};\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+c=9,\\ y-c=4;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9-c,\\ y=4+c.\end{cases}$$

Рассмотрим теперь второе уравнение исходной системы:

$$2^{x-11}\cdot\log_2(4-y)=1\Leftrightarrow 2^{-2-c}\cdot\log_2(-c)=1\Leftrightarrow\log_2(-c)=2^{2+c}.$$

Функция $f(c)=\log_2(-c)$ убывает при $c\in(-\infty,0)$, а функция $g(c)=2^{2+c}$ возрастает на всей числовой прямой. Поэтому корень уравнения $f(c)=g(c)$ угадывается: $c=-2$. Таким образом, задача имеет решение только при $c=-2$, при этом $x=11$ и $y=2$.

Ответ: *Если* $c=-2$, *то* $x=11$ *и* $y=2$; *если* $c\ne-2$, *то нет решений.*

Пример 8. Найти все пары целых чисел (x, y), каждая из которых удовлетворяет уравнению $(x^2+y^2)(x+y-3)=2xy$.

Решение: Ясно, что пара (0, 0) является решением данного уравнения. Предположим теперь, что хотя бы одно из чисел x, y отлично от нуля. Имеем:

$$(x^2+y^2)(x+y-3)=2xy\quad\Leftrightarrow\quad x+y-3=\frac{2xy}{x^2+y^2}\in[-1,1]$$

при всех значениях x и y. Так как $x + y - 3$ — целое число, то возможны три варианта.

а) Если $x + y - 3 = -1$, то $x = -y$, — нет решений.

б) Если $x + y - 3 = 0$, то либо $x = 0$, $y = 3$, либо $x = 3$, $y = 0$.

в) Если $x + y - 3 = 1$, то $x = y$, следовательно, $x = 2$ и $y = 2$.

Таким образом, решением данного уравнения будут служить следующие пары чисел: $(x, y) = \{(2,2);(3,0);(0,3);(0,0)\}$.

Ответ: $\{(2,2);(3,0);(0,3);(0,0)\}$.

Пример 9. Найти все a, при которых область значений функции $y = \dfrac{4\sin x + a}{4a - 2\sin x}$ содержит отрезок $[0,1]$.

Решение: Пусть $t = \sin x$, $t \in [-1,1]$. Тогда условие задачи можно сформулировать следующим образом: «Найти a, для которых функция $f(t) = \dfrac{4t + a}{4a - 2t}$ при изменении t от -1 до 1 принимает все значения от 0 до 1». Ясно, что при $a = 0$ условие задачи не выполняется. Пусть $a > 0$. Преобразуем функцию $f(t)$ следующим образом:

$$f(t) = \frac{4t + a}{4a - 2t} = -2 + \frac{9a}{4a - 2t}; \qquad f(0) = \frac{1}{4}.$$

Возможны два случая. Если $a \le \dfrac{1}{2}$, то график функции $f(t)$ изображен на рисунке 48.

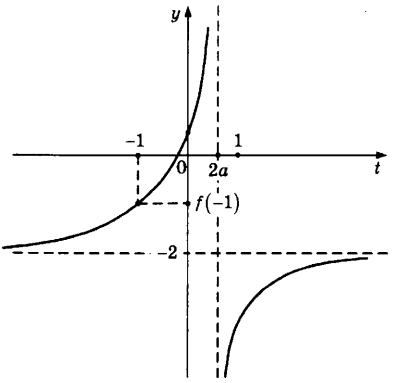

Рис. 48

Условие задачи будет выполнено тогда и только тогда, когда $f(-1)\le 0$. Имеем:

$$f(-1)\le 0 \Leftrightarrow \frac{a-4}{4a+2}\le 0 \Leftrightarrow a\in\left(-\frac{1}{2},4\right].$$

Получаем, что все $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ являются решением задачи.

Пусть теперь $a>\frac{1}{2}$. В этом случае график функции $f(t)$ изображен на рисунке 49.

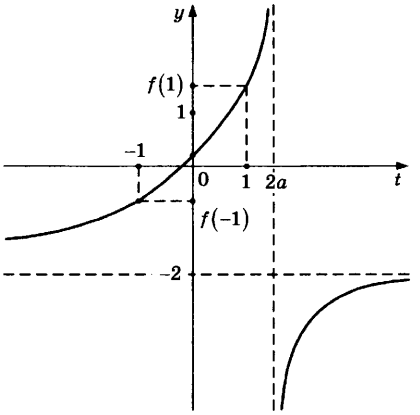

Рис. 49

Здесь для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы были верны неравенства $f(-1)\le 0$ и $f(1)\ge 1$. Имеем:

$$\begin{cases} f(-1)\le 0, \\ f(1)\ge 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a-4}{4a+2}\le 0, \\ \dfrac{a+4}{4a-2}\ge 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a-4}{2a+1}\le 0, \\ \dfrac{a-2}{2a-1}\le 0; \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left(\frac{1}{2},2\right].$$

Все такие a являются решением задачи. Таким образом, положительные решения есть $a\in(0,2]$.

Отрицательными решениями будут служить $a\in(-2,0]$. Это следует из следующей симметрии. Пусть $g(t,a)=\dfrac{4t+a}{4a-2t}$. Тогда $g(-t,-a)=g(t,a)$ и отрезок $t\in[-1,1]$ симметричен относительно точки $t=0$. Ответ к задаче выписывается как объединение всех разобранных случаев.

Ответ: $[-2,0)\cup(0,2]$.

Пример 10. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $2^{-x^2}\cdot 4^x+\sin\frac{\pi x}{4}+\cos\frac{\pi x}{4}-2=$ $=a^3-3a^2+a+\sqrt{2}$ имеет единственное решение.

Решение: Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$2^{-x^2}\cdot 4^x+\sin\frac{\pi x}{4}+\cos\frac{\pi x}{4}-2=a^3-3a^2+a+\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x-x^2}+\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi x}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi x}{4}\right)-2=a^3-3a^2+a+\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{1-(x-1)^2}+\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi x}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi x}{4}\right)-2=a^3-3a^2+a+\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{1-(x-1)^2}+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)-2=a^3-3a^2+a+\sqrt{2}.$$

Заметим, что если $x=1$ является решением данного уравнения, то отсюда следует, что $a^3-3a^2+a=0$, то есть $a=0,\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Кроме того, при этих значениях a других решений, кроме $x=1$, уравнение не имеет. Действительно, пусть $a^3-3a^2+a=0$. Тогда исходное уравнение примет следующий вид:

$$2^{1-(x-1)^2}+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)-2=\sqrt{2}.$$

Так как $2^{1-(x-1)^2}\le 2^1=2$, а $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$, то левая часть этого уравнения не превосходит $\sqrt{2}$. Следовательно, равенство возможно, только если выполнены условия:

$$\begin{cases}2^{1-(x-1)^2}=2,\\ \sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=1;\end{cases}\Leftrightarrow\quad x=1.$$

Это означает, что $a=0,\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ удовлетворяют условию задачи.

Других значений a, удовлетворяющих условию задачи, нет. В самом деле, если число $x_0\ne 1$ является решением исходного уравнения, то решением этого уравнения также будет служить число $2-x_0\ne x_0$. Проверим это:

$$2^{1-(2-x_0-1)^2}+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi(2-x_0)}{4}+\frac{\pi}{4}\right)-2=a^3-3a^2+a+\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{1-(1-x_0)^2}+\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi x_0}{4}\right)-2=a^3-3a^2+a+\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{1-(x_0-1)^2}+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x_0}{4}+\frac{\pi}{4}\right)-2=a^3-3a^2+a+\sqrt{2}.$$

То есть в этом случае либо будет четное число решений (так как $x = 1$ уже не является решением), либо их не будет совсем.

Ответ: 0, $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти область значений функции

$$f(x)=\log_{16x-12-4x^2}\frac{|x+1|+|x-5|}{3}.$$

2. Найти все значения a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{a-(\log_3 x+2\sqrt{5}\log_x 3-6)}{(3\cos\sqrt{x-9}-5)-a}\le 0$ не имеет решений.

3. Найти все значения a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{x-(2^a+2^{4-a})}{x-(\cos a-1)}<0$ выполнено при всех x, принадлежащих промежутку $(8,\ 10]$.

4. Найти все k, при которых функция $y(x)=k(2\sin x+\cos^2 x+1)$ не принимает значений, больших 3.

5. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $\cos x-2\sqrt{x^2+9}\le-\dfrac{x^2+9}{a+\cos x}-a$ имеет единственное решение.

6. Найти все пары чисел $(x,\ y)$, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам

$$\begin{cases}4^{x+y-1}+3\cdot 4^{2y-1}\le 2,\\ x+3y\ge 2-\log_4 3.\end{cases}$$

7. При каких a уравнение

$$(\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6})^x+$$
$$+(\sqrt{x^2-3ax+8}-\sqrt{x^2-3ax+6})^x=2(\sqrt{2})^x$$

имеет единственное решение?

8. Для каждого a решить систему

$$\begin{cases}\dfrac{\log_2(|a|x^2-3x+4)}{\log_2(-3x+4)}=5^{-|x|(x+1)^2},\\ x\le 1.\end{cases}$$

9. При всех значениях параметра a решить систему

$$\begin{cases} 4\log_4^2 x + 9\log_8^2 y \le 4(a^2+a), \\ \log_2^2 xy \ge 8(a^2+a). \end{cases}$$

10. При каких значениях параметра p система

$$\begin{cases} x^2+2px+3p^2+3p+3 \le 3\sin y - 4\cos y, \\ 0 \le y \le 2\pi \end{cases}$$

имеет единственное решение?

11. Найти наибольшее значение величины a, при котором неравенство $a\sqrt{a}(x^2-2x+1)+\dfrac{\sqrt{a}}{x^2-2x+1} \le \sqrt[4]{a^3}\left|\sin\dfrac{\pi}{2}x\right|$ имеет хотя бы одно решение.

12. Найти все значения p, при которых система

$$\begin{cases} \sqrt{\operatorname{tg}(\pi y)+\operatorname{ctg}(\pi y)} = \sin(px)+\cos(px), \\ 8y^2 + \left|\log_2\left(\dfrac{1}{p^2} - 8\dfrac{x^2}{\pi^2}\right)\right| = 1 \end{cases}$$

имеет решение.

13. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(x^2-6|x|-a)^2+12(x^2-6|x|-a)+37=\cos\left(\dfrac{18\pi}{a}\right)$ имеет ровно два корня.

14. Найти наименьшее значение функции $f(x)=\sin^2\pi x+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}}+\dfrac{1}{x}+\sqrt{x+1}-1$ на промежутке $(0;+\infty)$ и указать, при каких x оно достигается.

§ 7. ДРУГИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

В данном параграфе мы рассмотрим задачи, при решении которых используются свойства четности, монотонности и непрерывности функций. Дадим некоторые определения.

Определение 1. Функция $y=f(x)$ называется *четной*, если для любого числа x из области определения этой функции число $(-x)$ также принадлежит ее области определения и выполняется равенство $f(-x)=f(x)$.

Определение 2. Функция $y=f(x)$ называется *нечетной*, если для любого числа x из области определения этой функции число $(-x)$ также принадлежит ее области определения и выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$.

График любой четной функции симметричен относительно оси Oy, а график любой нечетной функции симметричен относительно начала координат точки O.

Определение 3. Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* (*неубывающей*) на множестве A, которое содержится в области определения данной функции, если для любых двух чисел $x_1, x_2 \in A$ таких, что $x_1 < x_2$, выполнено неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) \le f(x_2))$.

Определение 4. Функция $y=f(x)$ называется *убывающей* (*невозрастающей*) на множестве A, которое содержится в области определения данной функции, если для любых двух чисел $x_1, x_2 \in A$ таких, что $x_1 < x_2$, выполнено неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$.

В качестве множества A обычно рассматривается отрезок, интервал, полуинтервал, луч числовой прямой, а также вся числовая прямая. Полезно знать следующее свойство возрастающей (убывающей) функции.

Теорема 1. Каждое свое значение на множестве A возрастающая (убывающая) на этом множестве функция принимает ровно по одному разу.

Это позволяет в некоторых случаях ограничиться угадыванием корня уравнения. Не давая строгого

определения непрерывной функции, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 2. Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $y=f(x)$ принимает на этом отрезке все промежуточные между $f(a)$ и $f(b)$ значения. В частности, если $f(a)\cdot f(b)<0$, то найдется такая точка $c\in(a,b)$, что $f(c)=0$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. При каких значениях параметра a функция $f(x)=(a-x)\cdot 5^{x+7+4a}-(a+x)\cdot 5^{a^2-x-5}$ является нечетной?

Решение: Заметим сначала, что функция $f(x)$ определена при всех действительных x. Необходимое условие, чтобы функция $f(x)$ была нечетной, есть $f(0)=0$. Действительно, если функция $f(x)$ — нечетная, то для любого x из области определения должно выполняться равенство $f(-x)=-f(x)$. Значит, $f(-0)=-f(0)$, откуда $f(0)=-f(0)$ и $f(0)=0$. Имеем далее:

$$f(0)=0 \Leftrightarrow a\cdot 5^{7+4a}=a\cdot 5^{a^2-5} \Leftrightarrow a=0,\ a=6 \text{ или } a=-2.$$

Если $a=0$, то функция $f(x)$ имеет вид $f(x)=-x\cdot 5^{x+7}-x\cdot 5^{-x-5}$ и не является нечетной. Действительно,

$$f(-1)=5^6+5^{-4}\neq -f(1)=5^8+5^{-6}.$$

Если $a=6$, то функция $f(x)$ принимает вид $f(x)=(6-x)\cdot 5^{31+x}-(6+x)\cdot 5^{31-x}$ и является нечетной. В самом деле, для любого $x\in R$

$$f(-x)=(6+x)\cdot 5^{31-x}-(6-x)\cdot 5^{31+x}=-f(x).$$

И наконец, если $a=-2$, то $f(x)=(-2-x)\cdot 5^{x-1}-(-2+x)\cdot 5^{-x-1}$ — нечетная функция. Это следует из того, что для любого действительного числа x верно равенство

$$f(-x)=(-2+x)\cdot 5^{-x-1}-(-2-x)\cdot 5^{x-1}=-f(x).$$

Таким образом, ответом к задаче будут служить $a=6$ и $a=-2$.

Ответ: 6, −2.

Пример 2. Найти все a, при которых уравнение $x^2-2a\sin(\cos x)+a^2=0$ имеет единственное решение.

Решение: Пусть $f(x)=x^2-2a\sin(\cos x)+a^2$. Заметим, что функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной, то есть $f(-x)=f(x)$ для любого $x\in R$. Это означает, что если число x_0 является решением данного уравнения, то решением будет служить также и число $(-x_0)$. Поэтому для выполнения условия задачи необходимо, чтобы $x = 0$ было бы одним из решений уравнения (иначе решений будет четное число или не будет совсем). Имеем:

$$-2a\sin(\cos 0)+a^2=0 \Leftrightarrow a=0 \quad \text{или} \quad a=2\sin 1.$$

Проверим достаточность. Очевидно, что при $a = 0$ исходное уравнение имеет единственное решение $x = 0$. Пусть теперь $a = 2\sin 1$. Тогда уравнение примет следующий вид:

$$x^2-4\sin 1\sin(\cos x)+4\sin^2 1=0 \Leftrightarrow x^2+4\sin 1(\sin 1-\sin(\cos x))=0.$$

Так как $\cos x$ изменяется в пределах от -1 до 1, а функция $f(t)=\sin t$ возрастает на промежутке $t\in[-1,1]$, то наибольшее значение выражения $\sin(\cos x)$ равно $\sin 1$. Это означает, что $\sin 1-\sin(\cos x)\geq 0$ при любом $x\in R$. Поскольку x^2 тоже принимает только неотрицательные значения, то полученное уравнение равносильно следующей системе:

$$x^2+4\sin 1(\sin 1-\sin(\cos x))=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ \sin 1-\sin(\cos x)=0; \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Таким образом, $a = 2\sin 1$ также удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 0, $2\sin 1$.

Пример 3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение: Заметим, что если (x_0, y_0) — решение данной системы, то и $(-x_0, y_0)$ — также решение системы. Поэтому для выполнения условия задачи необходимо, чтобы одним из решений служила пара чисел $(0, y_0)$, где y_0 — любое число. При этом система примет следующий вид:

$$\begin{cases} 7 = 3y_0 + 3a, \\ y_0^2 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3}, \\ y_0 = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a = \frac{10}{3}, \\ y_0 = -1. \end{cases}$$

Проверим достаточность. Пусть сначала $a = \frac{4}{3}$. Тогда исходная система примет следующий вид:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| = 3y + 5x^2, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} - 3y = 5(x^2 - |x|), \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы. Так как выполнены неравенства $3 \cdot 2^{|x|} \geq 3 \cdot 2^0 = 3$ и $y \leq 1$ (следует из второго условия системы), левая часть этого уравнения всегда больше либо равна 0. С другой стороны, из условия $|x| \leq 1$, которое также следует из второго уравнения системы, вытекает, что

$$x^2 - |x| = |x|(|x| - 1) \leq 0.$$

Значит, равенство возможно только в том случае, когда

$$3 \cdot 2^{|x|} - 3y = 5(x^2 - |x|) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} - 3y = 0, \\ 5(x^2 - |x|) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ x = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = 2, \\ x = \pm 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что только пара (0, 1) будет решением второго уравнения системы. Значит, $a = \frac{4}{3}$ удовлетворяет условию задачи.

Если $a = \frac{10}{3}$, то исходная система перепишется следующим образом:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| = 3y + 5x^2 + 6 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Существуют по крайней мере три пары чисел (x, y), являющиеся решением этой системы — это (0, −1), (1, 0) и (−1, 0). Значит, $a = \frac{10}{3}$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $4/3$.

Пример 4. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} ax^2+4ax-y+7a+2\geq 0, \\ ay^2-x-2ay+4a-1\geq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение: Преобразуем данную систему следующим образом:

$$\begin{cases} ax^2+4ax-y+7a+2\geq 0, \\ ay^2-x-2ay+4a-1\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x+2)^2-(y-1)+3a+1\geq 0, \\ a(y-1)^2-(x+2)+3a+1\geq 0. \end{cases}$$

Пусть $x+2=u$, $y-1=v$. Тогда условие задачи можно сформулировать следующим образом: «Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} au^2-v+3a+1\geq 0, \\ av^2-u+3a+1\geq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение». Заметим, что если пара (u_0,v_0) является решением данной системы, то решением будет служить также пара (v_0,u_0). Поэтому для выполнения условия задачи необходимо, чтобы одно из решений имело вид (u_0,u_0). В этом случае система приобретает следующий вид:

$$au^2-u+3a+1\geq 0.$$

Полученное неравенство будет иметь единственное решение тогда и только тогда, когда выполены два условия:

$$\begin{cases} a<0, \\ D=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0, \\ 1-4a(3a+1)=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0, \\ 12a^2+4a-1=0; \end{cases} \Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}.$$

Проверим достаточность. При $a=-\frac{1}{2}$ система примет следующий вид:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}u^2-v-\frac{1}{2}\geq 0, \\ -\frac{1}{2}v^2-u-\frac{1}{2}\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2+2v+1\leq 0, \\ v^2+2u+1\leq 0. \end{cases}$$

Сложим две строчки полученной системы. Имеем:

$$u^2+2v+1+v^2+2u+1\leq 0 \Leftrightarrow (u+1)^2+(v+1)^2\leq 0 \Leftrightarrow u=v=-1.$$

Проверкой убеждаемся, что пара $u = -1$, $v = -1$ является решением системы. Таким образом, $a = -\frac{1}{2}$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $-1/2$.

Пример 5. Найти все значения a, при которых уравнение $2^{\frac{2x}{1+x^2}} + a\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right) + a^2 = \frac{5}{4}$ имеет единственное решение.

Решение: Заметим, что если число x_0 является решением данного уравнения, то решением также будет и число $1/x_0$. Действительно,

$$\frac{2\frac{1}{x_0}}{1+\frac{1}{x_0^2}} = \frac{2x_0}{1+x_0^2} \text{ и } \cos\left(\frac{\frac{1}{x_0^2}-1}{\frac{1}{x_0}}\right) = \cos\left(\frac{1-x_0^2}{x_0}\right) = \cos\left(\frac{x_0^2-1}{x_0}\right).$$

Поэтому для выполнения условия задачи необходимо, чтобы $x = 1$ или $x = -1$ было бы одним из решений этого уравнения. Пусть $x = 1$. Имеем:

$$2 + a\cos 0 + a^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow a^2 + a + \frac{3}{4} = 0$$

— нет решений. Если же $x = -1$ получаем, что

$$\frac{1}{2} + a\cos 0 + a^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow a^2 + a - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ или } a = -\frac{3}{2}.$$

Проверим достаточность. Пусть сначала $a = \frac{1}{2}$. Имеем:

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right) + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 2^{\frac{2x}{1+x^2}} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right) - 1 = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = 2^{\frac{2x}{1+x^2}} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right) - 1.$$

Покажем, что уравнение $f(x) = 0$ имеет решение на отрезке $[x_1, x_2]$, где $x_1, x_2 < -1$. В качестве x_1 возьмем меньший корень уравнения $\frac{x^2-1}{x} = -2\pi$, а в качестве x_2 — меньший корень уравнения $\frac{x^2-1}{x} = -\frac{3\pi}{2}$ (легко проверить,

что оба выбранных числа меньше -1). Тогда $f(x_1) = 2^{\frac{2x_1}{1+x_1^2}} - \frac{1}{2} > 0$, так как

$$2^{\frac{2x_1}{1+x_1^2}} - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x_1}{1+x_1^2} > -1 \Leftrightarrow (x_1+1)^2 > 0.$$

С другой стороны, $f(x_2) = 2^{\frac{2x_2}{1+x_2^2}} - 1 < 0$, поскольку

$$2^{\frac{2x_2}{1+x_2^2}} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2x_2}{1+x_2^2} < 0 \Leftrightarrow x_2 < 0.$$

Таким образом, значения непрерывной функции $f(x)$ на концах отрезка $[x_1, x_2]$ имеют разные знаки, следовательно, существует точка $c \in (x_1, x_2)$ такая, что $f(c) = 0$. Значит, уравнение $f(x) = 0$ имеет по крайней мере два различных решения, то есть $a = \frac{1}{2}$ не удовлетворяет условию задачи.

Пусть теперь $a = -\frac{3}{2}$. Тогда исходное уравнение примет следующий вид:

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}} - \frac{3}{2}\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right) + \frac{9}{4} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 2^{\frac{2x}{1+x^2}} = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right) - 1.$$

Так как при любом $x \in R$ выполнено неравенство $\frac{2x}{1+x^2} \geq -1$, то левая часть уравнения $2^{\frac{2x}{1+x^2}} \geq \frac{1}{2}$. С другой стороны, правая часть $\frac{3}{2}\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right) - 1 \leq \frac{1}{2}$, поскольку $\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right) \leq 1$. Значит, равенство возможно только тогда, когда выполняются условия

$$\begin{cases} 2^{\frac{2x}{1+x^2}} = \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{2}\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right) - 1 = \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{1+x^2} = -1, \\ \cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right) = 1; \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Следовательно, $a = -\frac{3}{2}$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $-3/2$.

Пример 6. Найти наименьшее и наибольшее значение a, при которых уравнение $\sqrt{x-a}+\sqrt{x^3+1}=2$ имеет хотя бы одно решение.

Решение: При любом a функция $f(x)=\sqrt{x-a}+\sqrt{x^3+1}$ определена на множестве $x \geq b=\max\{a,-1\}$. Эта функция есть сумма двух возрастающих функций и поэтому возрастает. Она непрерывна и принимает сколь угодно большие значения. Следовательно, уравнение

$$\sqrt{x-a}+\sqrt{x^3+1}=2$$

будет иметь решение в том и только в том случае, когда наименьшее значение функции $f(x)$, т.е. $f(b)$, не превосходит 2. Рассмотрим два случая. Если $a \geq -1$, имеем:

$$f(b)=f(a)=\sqrt{a^3+1} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad a \leq \sqrt[3]{3},$$

с учетом $a \geq -1$ получаем $a \in [-1, \sqrt[3]{3}]$. Если же $a < -1$, то в этом случае

$$f(b)=f(-1)=\sqrt{-1-a} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad a \geq -5.$$

С учетом $a < -1$ находим, что $a \in [-5,-1)$. Таким образом, при $a \in [-5, \sqrt[3]{3}]$ данное уравнение имеет решение, наименьшее из этих a равно $a_{\min}=-5$, наибольшее равно $a_{\max}=\sqrt[3]{3}$.

Ответ: -5, $\sqrt[3]{3}$.

Пример 7. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $4x-|3x-|x+a||=9|x-1|$ имеет хотя бы одно решение.

Решение: Рассмотрим функцию

$$f(x)=9|x-1|-4x+|3x-|x+a||$$

и обратим внимание, что задача сводится к исследованию уравнения $f(x)=0$. Функция $f(x)$ убывает при $x \leq 1$ и возрастает при $x \geq 1$. Действительно, на промежутке $x \in (-\infty,1]$ при любом раскрытии модулей коэффициент при x будет равен $k=-9-4\pm3\pm1$ и будет меньше нуля, а на промежутке $x \in [1+\infty)$ будет равен $k=9-4\pm3\pm1$ и будет больше нуля. Следовательно, необходимым и достаточным

условием существования хотя бы одного решения уравнения $f(x)=0$ является условие $f(1)\le 0$. Имеем:

$$-4+|3-|1+a||\le 0 \Leftrightarrow |3-|1+a||\le 4 \Leftrightarrow -4\le 3-|1+a|\le 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1\le|1+a|\le 7 \Leftrightarrow -7\le 1+a\le 7 \Leftrightarrow -8\le a\le 6.$$

Ответ: $[-8,6]$.

Пример 8. Найти значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения $3^{1-x^2-2ax-2a}=\log_3\dfrac{|x+a|+5|a-1|}{2|a-1|}$ принадлежат отрезку $[-3,0]$.

Решение: Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$3^{1-x^2-2ax-2a}=\log_3\frac{|x+a|+5|a-1|}{2|a-1|}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3^{(a-1)^2-(x+a)^2}=\log_3\left(\frac{|x+a|}{2|a-1|}+\frac{5}{2}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3^{(a-1)^2\left(1-\frac{(x+a)^2}{(a-1)^2}\right)}=\log_3\left(\frac{|x+a|}{2|a-1|}+\frac{5}{2}\right).$$

Пусть $\dfrac{|x+a|}{|a-1|}=t\ge 0$. Имеем:

$$3^{(a-1)^2(1-t^2)}=\log_3\frac{t+5}{2}.$$

При $t\ge 0$ левая часть полученного уравнения есть убывающая, а правая — возрастающая по t функции. Поэтому корень этого уравнения угадывается: $t=1$. Имеем далее:

$$\frac{|x+a|}{|a-1|}=1\Leftrightarrow\begin{cases}|x+a|=|a-1|\\ a\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+a=a-1\\ x+a=1-a\end{array}\right.\\ a\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=1-2a\end{array}\right.\\ a\ne 1.\end{cases}$$

Поэтому для того, чтобы все решения данного уравнения принадлежали отрезку $[-3,0]$, необходимо и достаточно выполнение условий $-3\le 1-2a\le 0$, $a\ne 1$. Отсюда и получается ответ.

Ответ: $\left[\frac{1}{2},1\right)\cup(1,2]$.

Пример 9. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\log_{\frac{1}{a}}(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)+\log_a 3\geq 0$$

имеет ровно одно решение.

Решение: Пусть $y=\sqrt{x^2+ax+5}$, $y \geq 0$. Тогда данное неравенство примет следующий вид:

$$\log_{\frac{1}{a}}(y+1)\cdot\log_5(y^2+1)+\log_a 3\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\log_5(y+1)}{\log_5 a}\cdot\log_5(y^2+1)+\frac{\log_5 3}{\log_5 a}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_5(y+1)\cdot\log_5(y^2+1)-\log_5 3}{\log_5 a}\leq 0.$$

Заметим, что функция $y=y(x)$ принимает все значения из промежутка $[y_0,+\infty)$, причем либо $y_0=0$, либо $y_0=y(x_0)$, где x_0 — абсцисса вершины параболы $f(x)=x^2+ax+5$. Поэтому при $a\in(0,1)$ неравенство примет вид

$$\log_5(y+1)\cdot\log_5(y^2+1)\geq\log_5 3$$

и будет иметь бесконечно много решений. Пусть теперь $a > 1$. В этом случае имеем:

$$g(y)=\log_5(y+1)\cdot\log_5(y^2+1)\leq\log_5 3.$$

Функция $g(y)$ определена при $y \geq 0$ и возрастает на этом промежутке как произведение неотрицательных возрастающих функций. Поэтому корень уравнения угадывается: $y = 2$, а неравенство имеет решением промежуток $y\in[y_0,2]$. Следовательно, решение будет единственным только в том случае, когда $y_0=2$.

Найдем соответствующее значение a. Вершина параболы $f(x)=x^2+ax+5$ имеет абсциссу $x_0=-\frac{a}{2}$. Имеем:

$$2=y_0=y(x_0)=y\left(-\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{2}+5}\Leftrightarrow 5-\frac{a^2}{4}=4\Leftrightarrow a=\pm 2.$$

Условию $a > 1$ удовлетворяет $a = 2$.

Ответ: 2.

Пример 10. Указать все значения a, для которых уравнение $\sqrt{a+\sqrt{a+\sin x}}=\sin x$ имеет решение.

Решение: Пусть $t = \sin x$, $t\in[-1,1]$. Тогда исходное уравнение примет следующий вид: $\sqrt{a+\sqrt{a+t}}=t$. Докажем следующее вспомогательное утверждение. Если $f(t)$ — возрастающая на области определения функция, то уравнения $f(f(t))=t$ и $f(t)=t$ эквивалентны. Действительно, если $f(t)=t$, то $f(f(t))=f(t)=t$. Пусть теперь $f(f(t))=t$ и $f(t)>t$. В силу возрастания функции $f(t)$ имеем $f(f(t))>f(t)>t$ — противоречие. Аналогично, если $f(f(t))=t$ и $f(t)<t$, то $f(f(t))<f(t)<t$, что также противоречит условию. Значит, если $f(f(t))=t$, то $f(t)=t$. Заметим, что для убывающей функции данное утверждение может быть неверным.

Применим доказанное утверждение к возрастающей на промежутке $t\in[-a,1]$ функции $f(t)=\sqrt{a+t}$ (считаем, что $-a \le 1$, то есть $a \ge -1$). Имеем:

$$\sqrt{a+\sqrt{a+t}}=t \Leftrightarrow \sqrt{a+t}=t \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le t\le 1, \\ t^2-t-a=0. \end{cases}$$

Полученное квадратное уравнение при $a<-\frac{1}{4}$ не имеет решений, а при $a\ge-\frac{1}{4}$ имеет корни $t_1=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$ и $t_2=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. Если $a>0$, то $1+4a>1$ и $t_1=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}<0$, а $t_2=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}>1$, поэтому система решений не имеет. Если же $-\frac{1}{4}\le a\le 0$, то $\frac{1}{2}\le t_2=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\le 1$, следовательно, система, а значит, и исходное уравнение, будет иметь решение.

Ответ: $\left[-\frac{1}{4},0\right]$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. При каких значениях параметра a уравнение $2\pi^2(x-1)^2+4a\cos(2\pi x)-9a^3=0$ имеет единственное решение?

2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x^4+1)=y+2-|x|, \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

3. Решить неравенство $\sqrt{4-x}-2\le x|x-3|+4x$.

4. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\frac{8}{\pi}\operatorname{arctg}\left(1+\frac{x}{4}\right)\log_{\sqrt{17}+4}(x+4+\sqrt{x^2+8x+17})=$$

$$=a^2-a\sin\left(\pi\cdot\frac{x^2+8x-64}{32}\right)-2$$

имеет единственное решение, и определить это решение.

5. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} ax^2+4ax-y+7a+1=0, \\ ay^2-x-2ay+4a-2=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

6. Решить уравнение

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2-2x-2)=\log_{2+\sqrt{3}}(x^2-2x-3).$$

7. При каком значении параметра a система неравенств

$$\begin{cases} y\ge x^2+2a, \\ x\ge y^2+2a \end{cases}$$

имеет единственное решение?

8. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^4-(a-1)\sqrt{a+3}\cdot y+a^4+2a^3-9a^2-2a+8=0, \\ y=\sqrt{a+3}\cdot x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения?

9. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases}(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x-5=a-2y+y^2,\\ x^2+(2-a-a^2)y^2=0,\\ 0\le y\le 2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

10. Решить уравнение

$$(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3})+3x(2+\sqrt{9x^2+3})=0\,.$$

11. Найти все значения a, при которых уравнение $\left|\dfrac{x(2^x-1)}{2^x+1}+2a\right|=a^2+1$ имеет нечетное число решений.

12. При каких значениях a функция

$y(x)=\log_{2a+1}(\sqrt{a^2+4x^2}-2x)-2$ является нечетной?

13. При каких значениях a график функции $y=(x+a)(|x+1-a|+|x-3|)-2x+4a$ имеет центр симметрии?

14. Сколько корней может иметь уравнение

$\sqrt{x+a}-\sqrt{x+4}=\sqrt{3x+10}$?

15. При каких значениях параметра a функция $f(x)=(a+x)\cdot 3^{x-2+a^2}-(x-a)\cdot 3^{8-x-3a}$ является четной?

§ 8. ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

Задачи данного параграфа решаются с помощью перебора всех логически возможных случаев. Как правило, такие задачи подразумевают развернутый ответ, в котором множество всех допустимых значений параметра разбивается на группы. Каждой такой группе соответствует определенная запись для множества значений переменной, которые являются решением при любом значении параметра из этой группы. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\frac{x-2a-4}{x+3a-2} \le 0$$

выполняется для всех x из промежутка $1 \le x \le 3$.

Решение: Используя тот факт, что корнем числителя является $x = 2a + 4$, а корень знаменателя есть $x = 2 - 3a$, рассмотрим три случая.

а) Если $2a+4<2-3a$, то есть $a<-\frac{2}{5}$, то решением неравенства будет промежуток $x \in [2a+4, 2-3a)$. Тогда условие задачи равносильно следующей системе неравенств (рисунок 50):

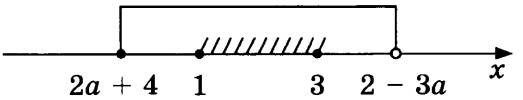

Рис. 50

$$\begin{cases} a<-\frac{2}{5}, \\ 2a+4 \le 1, \\ 2-3a>3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<-\frac{2}{5}, \\ a \le -\frac{3}{2}, \\ a<-\frac{1}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow a \le -\frac{3}{2}.$$

б) Если $2a+4=2-3a$, то есть $a=-\frac{2}{5}$, то неравенство решений не имеет.

в) Если $2a+4>2-3a$, то есть $a>-\frac{2}{5}$, то решением неравенства будет промежуток $x\in(2-3a,\ 2a+4]$. В этом случае условие задачи примет следующий вид (рисунок 51):

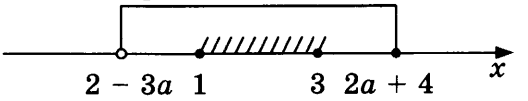

Рис. 51

$$\begin{cases} a>-\frac{2}{5}, \\ 2-3a<1, \\ 2a+4\geq 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-\frac{2}{5}, \\ a>\frac{1}{3}, \\ a\geq -\frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow a>\frac{1}{3}.$$

Таким образом, условию задачи удовлетворяют все a из промежутков $a\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$.

Ответ: $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$.

Пример 2. При всех a решить уравнение $|x+3|-a|x-1|=4$ и определить, при каких a оно имеет ровно два решения.

Решение: Данное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$|x+3|-a|x-1|=4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\leq -3, \\ -(x+3)-a(1-x)=4, \end{cases} \\ \begin{cases} -3<x\leq 1, \\ (x+3)-a(1-x)=4, \end{cases} \\ \begin{cases} x>1, \\ (x+3)-a(x-1)=4; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\leq -3, \\ (a-1)x=a+7, \end{cases} \\ \begin{cases} -3<x\leq 1, \\ (a+1)x=a+1, \end{cases} \\ \begin{cases} x>1, \\ (a-1)x=a-1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассмотрим первую систему. Если $a=1$, то эта система решений не имеет, если $a\neq 1$, то уравнение имеет решение $x=\frac{a+7}{a-1}$. Выясним, при каких a данное x будет удовлетворять первому неравенству системы:

$$\frac{a+7}{a-1}\leq -3 \Leftrightarrow \frac{a+1}{a-1}\leq 0 \Leftrightarrow a\in[-1,1).$$

Значит, при этих значениях a первая система будет иметь решение $x=\frac{a+7}{a-1}$, а при остальных значениях a система решений иметь не будет.

Во второй системе при $a = -1$ решением уравнения будет служить любое число x, поэтому при данном значении a решением системы будут все x из интервала $(-3, 1]$. При $a \neq -1$ уравнение будет иметь единственное решение $x = 1$, которое является также решением этой системы.

В третьей системе при $a = 1$ решением уравнения будет любое x, поэтому при данном a решением системы будут все $x > 1$. При $a \neq 1$ уравнение будет иметь единственное решение $x = 1$, которое не является решением этой системы, поэтому система решений иметь не будет.

Рассмотрим, какие решения имеет исходная совокупность при различных значениях a. При $a = 1$ первая система совокупности решений не имеет, вторая система имеет решение $x = 1$, третья — $x > 1$. Поэтому совокупность будет иметь решением $x \in [1, +\infty)$. При $a = -1$ первая система имеет решение $x = -3$, вторая — $x \in (-3, 1]$, третья система совокупности решений не имеет. Значит, решением совокупности будет служить отрезок $x \in [-3, 1]$. При $|a| > 1$ первая и третья система решений не имеют, значит, решением совокупности будет служить решение второй системы $x = 1$. При $|a| < 1$ первая система имеет решение $x=\frac{a+7}{a-1}$, вторая — $x = 1$, третья система решений не имеет. Значит, решение совокупности будет состоять из двух чисел: $x = 1$ и $x=\frac{a+7}{a-1}$.

Ответ: *Если* $a = 1$, *то* $x \in [1, +\infty)$; *если* $a = -1$, *то* $x \in [-3, 1]$; *если* $|a| > 1$, *то* $x = 1$; *если* $|a| < 1$, *то* $x = 1$ *и* $x=\frac{a+7}{a-1}$. *При* $|a| < 1$ *имеются ровно два решения.*

Пример 3. Определить, при каких значениях a решения неравенства $\sqrt{x+a} \geq x$ образуют на числовой прямой отрезок длины $2|a|$.

Решение: Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\sqrt{x+a} \geq x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0, \\ x+a \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ x+a \geq x^2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0, \\ x \geq -a, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2-x-a \leq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Дискриминант квадратного неравенства есть $D = 1 + 4a$. Рассмотрим три случая.

а) Если $a<-\frac{1}{4}$, то ни первая, ни вторая система совокупности решений не имеют.

б) Если $-\frac{1}{4} \leq a \leq 0$, то первая система совокупности решений не имеет. Рассмотрим теперь вторую систему. Квадратное неравенство этой системы будет иметь решением промежуток $x \in \left[\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}, \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right]$. При данных a левый конец промежутка неотрицателен, значит, решение системы есть $x \in \left[\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}, \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right]$. Найдем те a, при которых выполнено условие задачи:

$$\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} - \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} = 2|a| \Leftrightarrow \sqrt{1+4a} = 2|a| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+4a = 4a^2 \Leftrightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

Выбранному промежутку принадлежит $a = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

в) Если $a > 0$, то первая система совокупности имеет решением промежуток $x \in [-a, 0)$. Рассмотрим вторую систему. Квадратное неравенство этой системы будет иметь решением промежуток $x \in \left[\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}, \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right]$. При

данных a левый конец промежутка отрицателен, значит, решение системы есть $x \in \left[0, \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right]$, а решение совокупности есть $x \in \left[-a, \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right]$. Найдем те a, при которых выполнено условие задачи:

$$\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} + a = 2|a| \overset{(\text{т.к.}|a|=a)}{\Leftrightarrow} \sqrt{1+4a} = 2a-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-1 \geq 0, \\ 1+4a = (2a-1)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \frac{1}{2}, \\ a^2 - 2a = 0; \end{cases} \Leftrightarrow a = 2.$$

Полученное значение a принадлежит выбранному промежутку. Таким образом, ответом к задаче будут служить $a = 2$ и $a = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: 2, $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Пример 4. При каких значениях a все решения уравнения $2|x-a|+a-4+x=0$ удовлетворяют неравенству $0 \leq x \leq 4$?

Решение: Данное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq a, \\ 2(x-a)+a-4+x=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < a, \\ 2(a-x)+a-4+x=0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq a, \\ x = \frac{a+4}{3}, \end{cases} \\ \begin{cases} x < a, \\ x = 3a-4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Значение $x = \frac{a+4}{3}$ является одним из решений исходного уравнения, если выполняется условие $\frac{a+4}{3} \geq a \Leftrightarrow a \leq 2$. Аналогично $x = 3a - 4$ — решение, если $3a-4 < a \Leftrightarrow a < 2$. Таким образом, при $a = 2$ уравнение имеет единственное решение $x = \frac{a+4}{3}$, при $a < 2$ — два решения: $x = \frac{a+4}{3}$ и $x = 3a - 4$.

Условие задачи выполнено в следующих случаях:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=2,\\ 0\le\dfrac{a+4}{3}\le 4,\end{cases}\\ \begin{cases}a<2,\\ 0\le\dfrac{a+4}{3}\le 4,\\ 0\le 3a-4\le 4;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=2,\\ \begin{cases}a<2,\\ -4\le a\le 8,\\ \dfrac{4}{3}\le a\le\dfrac{8}{3};\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=2,\\ \dfrac{4}{3}\le a<2;\end{array}\right. \Leftrightarrow a\in\left[\frac{4}{3},2\right].$$

Ответ: $\left[\frac{4}{3},2\right]$.

Пример 5. При каждом значении параметра a найти все решения неравенства $x+2a-2\sqrt{3ax+a^2}>0$.

Решение: Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$2\sqrt{3ax+a^2}<x+2a \Leftrightarrow \begin{cases}3ax+a^2\ge 0,\\ x+2a\ge 0,\\ 12ax+4a^2<(x+2a)^2;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a(3x+a)\ge 0,\\ x\ge -2a,\\ x^2-8ax>0.\end{cases}$$

Возможны три случая.

а) Если $a>0$, то система принимает следующий вид:

$$\begin{cases}3x+a\ge 0,\\ x\ge -2a,\\ x^2-8ax>0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -\dfrac{a}{3},\\ x\ge -2a,\\ x(x-8a)>0.\end{cases}$$

Решением системы в этом случае являются $x\in\left[-\frac{a}{3},0\right)\cup(8a,+\infty)$ (рисунок 52).

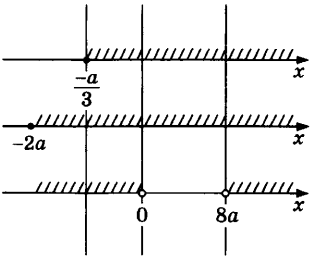

Рис. 52

б) Если $a = 0$, подстановкой в исходное неравенство легко получаем, что $x > 0$.

в) Если $a < 0$, то система запишется следующим образом:

$$\begin{cases} 3x + a \le 0, \\ x \ge -2a, \\ x^2 - 8ax > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\dfrac{a}{3}, \\ x \ge -2a, \\ x(x - 8a) > 0. \end{cases}$$

Как видно из рисунка 53, данная система решений не имеет.

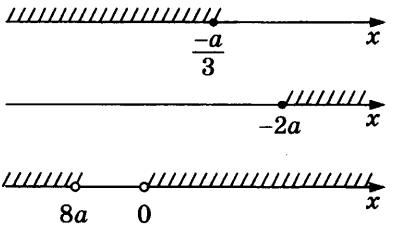

Рис. 53

Ответ: *Если* $a < 0$, *то нет решений; если* $a = 0$, *то* $x \in (0, +\infty)$; *если* $a > 0$, *то* $x \in \left[-\dfrac{a}{3}, 0\right) \cup (8a, +\infty)$.

Пример 6. Найти все значения x, удовлетворяющие уравнению $2\log_{2+a^2}(4 - \sqrt{7 + 2x}) = \log_{2+a^2 x^2}(4 - 3x)$ при любом действительном a.

Решение: Если число x_0 удовлетворяет данному уравнению при всех значениях a, то оно удовлетворяет ему и при $a = 0$. При этом уравнение примет следующий вид:

$$2\log_2(4 - \sqrt{7 + 2x}) = \log_2(4 - 3x).$$

Пусть $y = \sqrt{7 + 2x}$, $y \ge 0$. Тогда $x = \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{7}{2}$. Имеем:

$$2\log_2(4 - y) = \log_2\left(4 - 3\left(\frac{y^2}{2} - \frac{7}{2}\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4 - y > 0, \\ (4 - y)^2 = 4 - 3\left(\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{7}{2}\right); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < 4, \\ 16 - 8y + y^2 = -\dfrac{3y^2}{2} + \dfrac{29}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y < 4, \\ 5y^2 - 16y + 3 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3, \\ y = \dfrac{1}{5}. \end{array}\right.$$

Если $y = 3$, то $x = 1$, и уравнение, данное в условии задачи, запишется следующим образом:

$$2\log_{2+a^2}1 = \log_{2+a^2}1.$$

Ясно, что полученное равенство верно при любом a, и поэтому $x = 1$ удовлетворяет условию задачи. Если $y = \frac{1}{5}$, то $x = -\frac{87}{25}$. В этом случае имеем:

$$\log_{2+a^2}\frac{361}{25} = \log_{2+a^2\cdot\left(-\frac{87}{25}\right)^2}\frac{361}{25}.$$

Это равенство не является верным, например, при $a = 1$. Поэтому $x = -\frac{87}{25}$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 1.

Пример 7. Найти все значения a, при каждом из которых любое решение системы

$$\begin{cases} y - 2a\log_2 x = 1, \\ y + a^2\log_2 x = 1 \end{cases}$$

удовлетворяет неравенству $y < 1 + x$.

Решение: Преобразуем данную систему следующим образом: вычтем из второго уравнения первое, при этом первое уравнение оставив без изменения. Имеем:

$$\begin{cases} a^2\log_2 x + 2a\log_2 x = 0, \\ y - 2a\log_2 x = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a+2)\log_2 x = 0, \\ y - 2a\log_2 x = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим три случая:

а) Если $a = 0$, то решением системы служит пара чисел $(x, 1)$, где $x > 0$ — любое число. Ясно, что для каждой такой пары выполняется условие $y < 1 + x$, т.е. $a = 0$ является решением задачи.

б) Если $a = -2$, то второе уравнение системы принимает вид

$$y + 4\log_2 x = 1.$$

Пара чисел $x = \frac{1}{2}$, $y = 5$, будучи решением этого уравнения, не удовлетворяет условию $y < 1 + x$, поэтому $a = -2$ не является решением задачи.

в) Если $a \neq 0$ и $a \neq -2$, то система имеет единственное решение $x = 1$ и $y = 1$, которое удовлетворяет условию $y < 1 + x$, поэтому все такие a являются решением задачи.

Объединив все разобранные случаи, получаем, что решением задачи является любое $a \neq -2$.

Ответ: $a \neq -2$.

Пример 8. Для каждого целого значения параметра m решить уравнение $\log_{\frac{m^2}{4}+x^2}(3x)^{m^2+1} = m^2 + 1$.

Решение: Необходимо рассмотреть следующие два случая. Если m — четное число (тогда $m^2 + 1$ будет нечетным), то данное уравнение преобразуется следующим образом:

$$\log_{\frac{m^2}{4}+x^2}(3x)^{m^2+1} = m^2 + 1 \Leftrightarrow (m^2+1)\log_{\frac{m^2}{4}+x^2}(3x) = m^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{m^2}{4}+x^2}(3x) = 1 \Rightarrow \frac{m^2}{4} + x^2 = 3x \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + m^2 = 0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет решение только тогда, когда у него неотрицательный дискриминант. Имеем:

$$\frac{D}{4} = 36 - 4m^2 \geq 0 \Leftrightarrow |m| \leq 3 \Rightarrow m = 0 \quad \textit{или} \quad m = \pm 2,$$

так как m — целое четное число. Если $m = 0$, то исходное уравнение имеет вид

$$\log_{x^2}(3x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3x, \\ x \neq 0, \\ x \neq \pm 1; \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Если же $m = \pm 2$, то в этом случае получаем

$$\log_{1+x^2}(3x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x^2 = 3x, \\ x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Пусть теперь m — нечетное число ($m^2 + 1$ — четное). Тогда исходное уравнение принимает следующий вид:

$$\log_{\frac{m^2}{4}+x^2}(3x)^{m^2+1} = m^2 + 1 \Leftrightarrow (m^2+1)\log_{\frac{m^2}{4}+x^2}|3x| = m^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{m^2}{4}+x^2}|3x| = 1 \Rightarrow 4x^2 - 12|x| + m^2 = 0.$$

Так же, как и в первом случае, находим возможные значения m — это $m = \pm 1$ и $m = \pm 3$. Пусть $m = \pm 1$, имеем:

$$\log_{\frac{1}{4}+x^2}|3x|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}+x^2=3|x|, \\ x \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow x=\pm\frac{(3\pm 2\sqrt{2})}{2}.$$

И наконец, если $m=\pm 3$, проводим следующие преобразования:

$$\log_{\frac{9}{4}+x^2}|3x|=1 \Leftrightarrow \frac{9}{4}+x^2=3|x| \Leftrightarrow x=\pm\frac{3}{2}.$$

Ответ выписывается как объединение всех разобранных случаев.

Ответ: *Если* $m=0$, *то* $x=3$; *если* $m=\pm 1$, *то* $x=\pm\frac{(3\pm 2\sqrt{2})}{2}$; *если* $m=\pm 2$, *то* $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; *если* $m=\pm 3$, *то* $x=\pm\frac{3}{2}$.

Пример 9. При каких значениях параметра a уравнение $(1+\sin 4ax)\cdot\sqrt{5\pi x-x^2}=0$ имеет ровно 5 различных корней?

Решение: Ясно, что $x=0$ и $x=5\pi$ являются решениями уравнения. Значит, условие задачи можно сформулировать следующим образом: «Найти a, при которых уравнение $\sin 4ax=-1$ имеет ровно три корня на интервале $x\in(0,5\pi)$». Так как $a=0$ не является решением задачи, имеем:

$$\sin 4ax=-1 \Leftrightarrow 4ax=-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ n\in Z \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{8a}+\frac{\pi n}{2a}.$$

Если $a>0$, то наименьший положительный корень уравнения (соответствующий $n=1$) есть $x_1=-\frac{\pi}{8a}+\frac{\pi}{2a}=\frac{3\pi}{8a}$. Пусть x_k — корень уравнения, соответствующий $n=k$. Условие задачи будет выполнено тогда и только тогда, когда $x_3<5\pi$, а $x_4\geq 5\pi$ (рисунок 54).

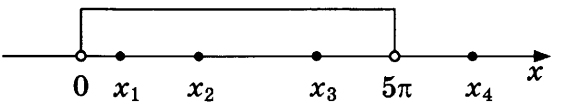

Рис. 54

Это означает, что

$$\begin{cases} x_3 < 5\pi, \\ x_4 \geq 5\pi; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{8a} + \dfrac{3\pi}{2a} < 5\pi, \\ -\dfrac{\pi}{8a} + \dfrac{4\pi}{2a} \geq 5\pi; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{11\pi}{8a} < 5\pi, \\ \dfrac{15\pi}{8a} \geq 5\pi; \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(\frac{11}{40}, \frac{15}{40}\right].$$

Пусть теперь $a < 0$. Тогда наименьший положительный корень серии $x = -\dfrac{\pi}{8a} + \dfrac{\pi n}{2a}$; $n \in Z$ есть $x_0 = -\dfrac{\pi}{8a}$. В этом случае необходимо и достаточно выполнения условий $x_{-2} < 5\pi$ и $x_{-3} \geq 5\pi$ (рисунок 55).

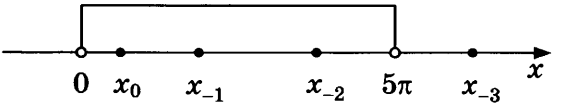

Рис. 55

Имеем:

$$\begin{cases} x_{-2} < 5\pi, \\ x_{-3} \geq 5\pi; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{8a} - \dfrac{2\pi}{2a} < 5\pi, \\ -\dfrac{\pi}{8a} - \dfrac{3\pi}{2a} \geq 5\pi; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{9\pi}{8a} < 5\pi, \\ -\dfrac{13\pi}{8a} \geq 5\pi; \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[-\frac{13}{40}, -\frac{9}{40}\right).$$

Ответ получаем как объединение двух разобранных случаев.

Ответ: $\left[-\dfrac{13}{40}, -\dfrac{9}{40}\right) \cup \left(\dfrac{11}{40}, \dfrac{15}{40}\right]$.

Пример 10. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \dfrac{1-a}{1+a}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2 \end{cases}$$

имеет решение.

Решение: Умножив первое неравенство системы на (−2) и сложив его со вторым, получим:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \dfrac{1-a}{1+a}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 - 4xy + 14y^2 \leq \dfrac{2a-2}{1+a}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 6xy + 9y^2 \leq \frac{2a-2}{a+1} - 2 \Leftrightarrow (x+3y)^2 \leq -\frac{4}{a+1}.$$

Значит, если $a > -1$, то последнее неравенство, а следовательно, и исходная система, не будет иметь решений.

Покажем, что при $a < -1$ существует решение системы. Будем искать это решение в виде $x = -3y$. Имеем:

$$\begin{cases} x=-3y, \\ x^2+2xy-7y^2 \ge \dfrac{1-a}{1+a}, \\ 3x^2+10xy-5y^2 \le -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3y, \\ 4y^2 \le \dfrac{a-1}{a+1}, \\ 4y^2 \ge 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3y, \\ 1 \le 4y^2 \le 1-\dfrac{2}{a+1}. \end{cases}$$

Поскольку при всех $a < -1$ выполнено неравенство $1<1-\dfrac{2}{a+1}$, подойдет, например, $y=\dfrac{1}{2}$ $\left(\text{тогда } x=-\dfrac{3}{2}\right)$. Таким образом, ответом к задаче будет служить промежуток $a \in (-\infty,-1)$.

Ответ: $(-\infty,-1)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. При всех значениях параметра a решить неравенство $3(2x-a)+5a\sqrt{2x-a}-2a^2>0$.

2. Для каждого значения a решить неравенство $\dfrac{x^2\cdot 2^{|2a-1|}-2x+1}{x^2-(a-2)x-2a}>0$.

3. При всех значениях a решить уравнение $\log_2^2\left(\dfrac{x-5a}{x}\right)+4[\log_4(x-5a)]\log_2 x-8\log_4^2 x=0$.

4. Для каждого значения параметра a решить уравнение $3a\cos 6ax+4(3a^2-1)\sin 3ax+5a=0$.

5. Для каждого допустимого значения a решить неравенство $\log_{ax}\left(\dfrac{a}{2}\right)\cdot\log_{a^2-2}(a-1)<0$.

6. Для каждого значения параметра a из промежутка $(-3,\ 0)$ найти число различных решений уравнения $(2x^2-5ax+2a^2)\sqrt{x-\dfrac{2}{a}}=0$.

7. Найти все положительные значения a, при которых неравенство

$$\frac{a+2x}{ax-4} \geq \frac{5}{x}$$

выполнено при всех $x > 10$.

8. Для каждого значения параметра a решить неравенство $|x+2a| \leq \frac{1}{x}$.

9. Пусть $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}-3$, $g(x)=\sqrt{x}-a$, где a — параметр. Решить относительно x неравенство $f\big(g(x)\big) \leq 0$.

10. Для каждого значения a решить неравенство $\sqrt{a^2-x^2} \geq a+1$.

11. Найти все значения a, при которых каждое решение неравенства $x^2+a \leq 0$ удовлетворяет неравенству $(x+2a)\sqrt{3-x} \leq 0$.

12. Найти все значения a, при каждом из которых множество решений неравенства $\frac{3(3^x+4a-12)}{5a-20} \geq \frac{4-2a}{3^{x-1}-a+2}$ содержит какой-либо луч на числовой прямой.

13. Для всех значений параметра a, принадлежащих отрезку $[-1,0]$, решить неравенство

$$\log_{x+a}(x^2-(a+1)x+a) \geq 1.$$

14. Найти все a, при которых уравнение $(x^2-(a+1)x+3(a-2))\cdot\log_{a-x}(2a-x-1)=0$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[-1,2]$, а вне этого отрезка корней не имеет.

15. При каждом значении a решить уравнение $\log_3\left(\frac{x^2}{x-1}-a+1\right)=\log_3\frac{x^2}{x-1}-\log_3(a-1)$.

ИЛЛЮСТРАЦИИ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

Часто бывает, что задачу с параметром проще решать с применением графической иллюстрации. В данном параграфе продемонстрированы некоторые способы применения таких иллюстраций и обобщены различные методы решения подобных задач.

Пример 1. При каких значениях c уравнение $\sqrt{16-x^2}=-c-x$ имеет единственное решение?

Решение: Построим на координатной плоскости Oxy графики функций $y=\sqrt{16-x^2}$ и $y=-c-x$. Так как

$$y=\sqrt{16-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y\geq 0, \\ x^2+y^2=16, \end{cases}$$

то первый график представляет собой верхнюю полуокружность с центром в точке (0, 0) и радиусом 4. Второй график представляет собой прямую с угловым коэффициентом −1, пересекающую ось Ox в точке $(-c,\ 0)$ (рисунок 56).

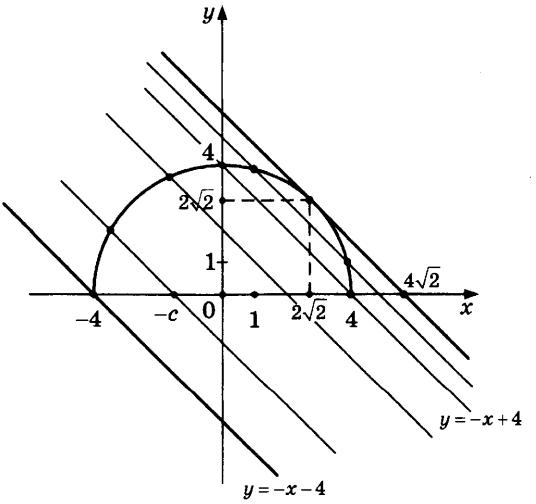

рис. 56

Исходное уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда эти два графика пересекаются ровно в

одной точке. Как видно из рисунка, это происходит в одном из следующих двух случаев:

а) прямая $y=-c-x$ касается полуокружности в точке $(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$, что соответствует значению параметра $c=-4\sqrt{2}$;

б) прямая $y=-c-x$ лежит в полосе, ограниченной прямыми $y=-x-4$ и $y=-x+4$ (включая первую и исключая последнюю), что соответствует $c\in(-4,4]$.

Во всех остальных случаях прямая $y=-c-x$ либо пересекает полуокружность $y=\sqrt{16-x^2}$ ровно в двух точках, либо не имеет с ней общих точек. Объединяя все полученные значения, находим ответ: $c\in\{-4\sqrt{2}\}\cup(-4,4]$.

Ответ: $\{-4\sqrt{2}\}\cup(-4,4]$.

Пример 2. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ (x-3)^2+(y+4)^2=a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение: Данная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружности, задаваемые на координатной плоскости Oxy уравнениями системы, касаются внешним или внутренним образом (рисунок 57).

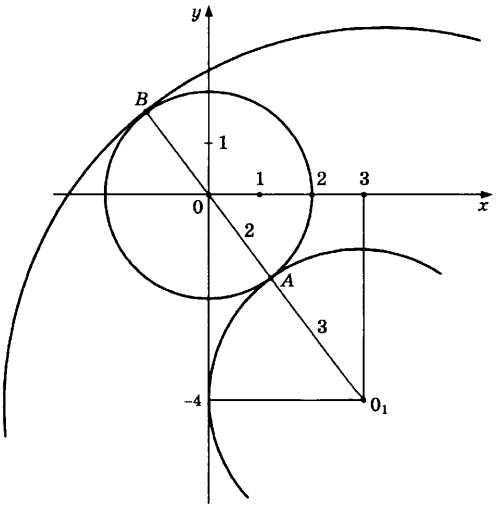

рис. 57

Первая окружность имеет центр в точке (0, 0) и радиус 2, вторая — центр в точке (3, −4) и радиус $\sqrt{a}$. Расстояние между центрами окружностей равно 5, следовательно, в первом случае радиус второй окружности должен быть равен 3, а во втором — равен 7. Поэтому либо $a = 9$, либо $a = 49$.

Ответ: 9, 49.

Пример 3. Найти все значения a, при которых уравнение $|2x+6|+|2x-8|=ax+12$ имеет единственное решение.

Решение: Построим на координатной плоскости Oxy графики функций $y=|2x+6|+|2x-8|$ и $y = ax + 12$. Первый график разбивается на три участка следующим образом:

$$y=-2x-6-2x+8=-4x+2, \text{ если } x \le -3;$$

$$y = 2x + 6 - 2x + 8 = 14, \text{ если } -3 \le x \le 4;$$

$$y=2x+6+2x-8=4x-2, \text{ если } x \ge 4.$$

Второй график представляет собой прямую с угловым коэффициентом a, проходящую через точку (0, 12) (рисунок 58).

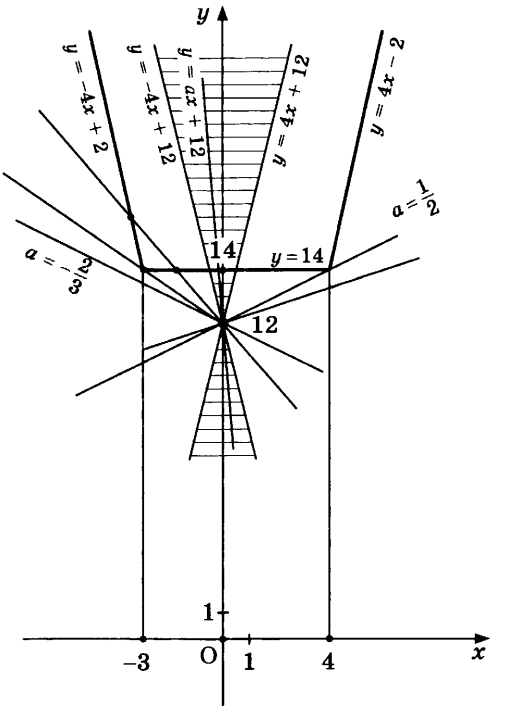

Рис. 58

Исходное уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда эти два графика пересекаются ровно в одной точке. Из рисунка видно, что это происходит в одном из следующих трех случаев:

а) прямая $y = ax + 12$ лежит в остром угле, образованном прямыми $y=-4x+12$ и $y=4x+12$, что соответствует значениям $a\in(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$;

б) прямая $y = ax + 12$ проходит через точку (–3, 14), что соответствует $a=-\frac{2}{3}$;

в) прямая $y=ax+12$ проходит через точку (4, 14), что соответствует $a=\frac{1}{2}$.

Из рисунка также видно, что любая другая прямая, проходящая через точку (0, 12), либо пересекает график функции $y=|2x+6|+|2x-8|$ ровно в двух точках, либо не имеет с этим графиком общих точек. Объединяя все полученные значения a, находим ответ: $a\in(-\infty,-4]\cup\left\{-\frac{2}{3}\right\}\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup[4,+\infty)$.

Ответ: $(-\infty,-4]\cup\left\{-\frac{2}{3}\right\}\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup[4,+\infty)$.

Пример 4. Найти все действительные значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a+\sqrt{6x-x^2-8}=3+\sqrt{1+2ax-a^2-x^2}$ имеет ровно одно решение.

Решение: Перепишем данное уравнение в следующем виде:

$$3-\sqrt{1-(x-3)^2}=a-\sqrt{1-(x-a)^2}.$$

Построим на координатной плоскости Oxy графики функций $y=3-\sqrt{1-(x-3)^2}$ и $y=a-\sqrt{1-(x-a)^2}$. Так как

$$y=3-\sqrt{1-(x-3)^2}\Leftrightarrow\sqrt{1-(x-3)^2}=3-y\Leftrightarrow\begin{cases}y\le 3,\\(x-3)^2+(y-3)^2=1,\end{cases}$$

то первый график представляет собой нижнюю полуокружность с центром в точке (3, 3) и радиусом 1. Аналогично

$$y = a - \sqrt{1-(x-a)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \le a, \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = 1, \end{cases}$$

поэтому второй график представляет собой нижнюю полуокружность с центром в точке $(a,\ a)$ и радиусом 1 (рисунок 59).

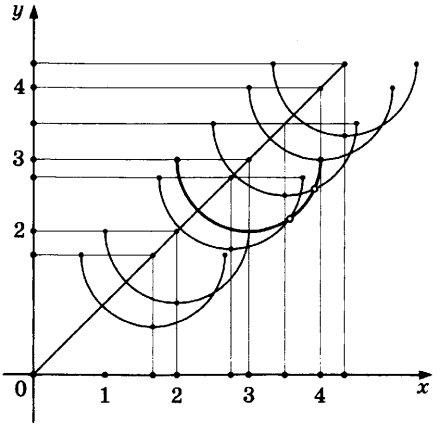

Рис. 59

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда полуокружности, соответствующие двум рассмотренным графикам, пересекаются ровно в одной точке. Как видно из рисунка, если $a < 2$ или $a > 4$, эти полуокружности не пересекаются, если $2 \le a \le 4$, $a \ne 3$, то они пересекаются в одной точке, если $a = 3$ — совпадают. Следовательно, данное уравнение имеет единственное решение при $a \in [2,3) \cup (3,4]$.

Ответ: $[2,3) \cup (3,4]$.

Пример 5. Среди всех решений системы

$$\begin{cases} y + 3x \le -3, \\ x^2 + y^2 + 4x + 2y \le 11 \end{cases}$$

найти такое, при котором выражение $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25$ принимает минимальное значение.

Решение: Преобразуем данную систему следующим образом:

$$\begin{cases} y + 3x \le -3, \\ x^2 + y^2 + 4x + 2y \le 11; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le -3x - 3, \\ (x+2)^2 + (y+1)^2 \le 16. \end{cases}$$

Изобразим решения полученной системы на рисунке 60. Рассмотрим теперь выражение

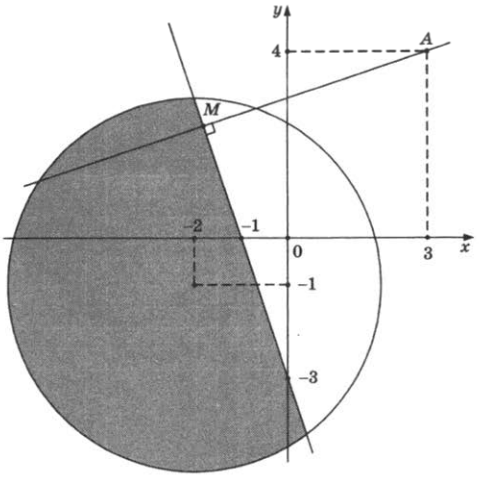

Рис. 60

$$f(x,y)=x^2+y^2-6x-8y+25=(x-3)^2+(y-4)^2$$

и заметим, что $f(x,y)$ есть расстояние от точки $A(3,4)$ до точки $M(x,y)$ на координатной плоскости. Таким образом, условие задачи можно сформулировать следующим образом: «Среди точек $M(x,y)$ множества решений исходной системы, изображенного на рисунке 60, выбрать точку, ближайшую к точке $A(3,4)$».

Опустим перпендикуляр из точки $A(3,4)$ на прямую $y=-3x-3$. Уравнение этого перпендикуляра будет иметь вид $y=\frac{1}{3}x+3$, а его основанием будет служить точка $M_0\left(-\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$. Так как $\left(-\frac{9}{5}+2\right)^2+\left(\frac{12}{5}+1\right)^2=\frac{290}{25}<16$, то точка M_0 принадлежит кругу $(x+2)^2+(y+1)^2\le 16$, следовательно, содержится в множестве решений исходной системы. Таким образом, ответом к задаче будет служить пара чисел $(x,y)=\left(-\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$.

Пример 6. Найти все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(|x|-5)^2+(y-4)^2=4,\\(x-2)^2+y^2=a^2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение: Первое уравнение данной системы задает на координатной плоскости Oxy две окружности радиуса 2 с центрами $C_1(5,4)$ и $C_2(-5,4)$. Обозначим эти окружности через ω_1 и ω_2 соответственно. При положительном значении параметра a второе уравнение системы задает окружность радиуса a с центром в точке $C(2,0)$ (рисунок 61).

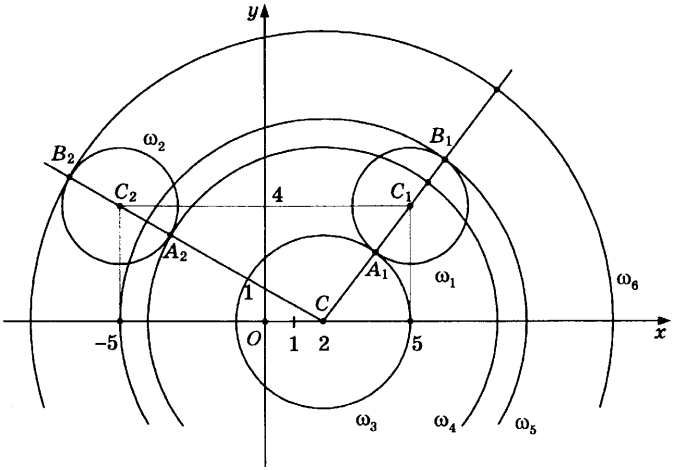

Рис. 61

Для того чтобы исходная система имела единственное решение, необходимо, чтобы последняя окружность касалась одной из окружностей ω_1 и ω_2. Обозначим такие окружности, а их всего четыре, через ω_3, ω_4, ω_5 и ω_6 (в порядке возрастания их радиусов) и найдем эти радиусы.

Так как $CC_1=5$, то радиусы окружностей, имеющих центр в точке C и касающихся окружности ω_1, равны 3 и 7. Аналогично $CC_2=\sqrt{65}$, поэтому радиусы окружностей, имеющих центр в точке C и касающихся окружности ω_2, равны $\sqrt{65}\pm 2$. Так как $3<\sqrt{65}-2<7<\sqrt{65}+2$, то

окружность ω_3 имеет радиус 3, окружность ω_4 — радиус $\sqrt{65}-2$, окружность ω_5 — радиус 7 и окружность ω_6 — радиус $\sqrt{65}+2$.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность с центром в точке (2, 0) имеет единственную общую точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2. Из рисунка видно, что этому условию удовлетворяют только окружности ω_3 и ω_6. Таким образом, ответом к задаче будут служить $a=3$ и $a=\sqrt{65}+2$.

Ответ: 3, $\sqrt{65}+2$.

Пример 7. Найти все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(|x|-7)^2+(|y|-7)^2=1,\\ y=ax+1,\\ xy>0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение: Первое уравнение данной системы при условии $xy > 0$ задает на координатной плоскости две единичные окружности с центрами (7, 7) и (−7, −7), а второе — прямую с угловым коэффициентом a, проходящую через точку (0, 1) (рисунок 62).

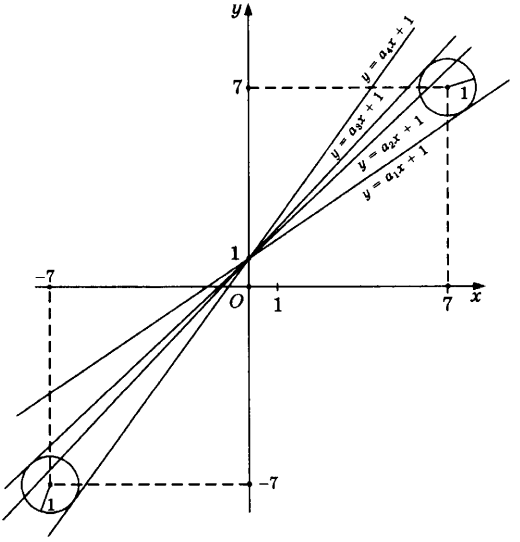

Рис. 62

Для того чтобы исходная система имела единственное решение, необходимо, чтобы данная прямая касалась одной из окружностей. Таких касательных всего четыре. Обозначим их угловые коэффициенты через a_1, a_2, a_3 и a_4 (в порядке возрастания) и найдем их.

Прямая $y = ax + 1$ касается окружности единичного радиуса с центром в точке $(-7, -7)$ тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y = ax + 1, \\ (x+7)^2 + (y+7)^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Подстановкой данная система сводится к уравнению

$$(x+7)^2 + (ax+1+7)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (a^2+1)x^2 + 2(8a+7)x + 112 = 0.$$

Из равенства нулю дискриминанта этого уравнения получаем, что

$$(8a+7)^2 - 112(a^2+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 48a^2 - 112a + 63 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \frac{14 \pm \sqrt{7}}{12}.$$

Аналогично прямая $y = ax + 1$ касается окружности единичного радиуса с центром в точке $(7, 7)$ тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y = ax + 1, \\ (x-7)^2 + (y-7)^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Эта система сводится к уравнению

$$(x-7)^2 + (ax+1-7)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (a^2+1)x^2 - 2(6a+7)x + 84 = 0,$$

дискриминант которого равен

$$(6a+7)^2 - 84(a^2+1) = 48a^2 - 84a + 35 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{21 \pm \sqrt{21}}{24}.$$

Так как $\frac{21-\sqrt{21}}{24} < \frac{14-\sqrt{7}}{12} < \frac{21+\sqrt{21}}{24} < \frac{14+\sqrt{7}}{12}$, то $a_1 = \frac{21-\sqrt{21}}{24}$, $a_2 = \frac{14-\sqrt{7}}{12}$, $a_3 = \frac{21+\sqrt{21}}{24}$ и $a_4 = \frac{14+\sqrt{7}}{12}$.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда прямая $y = ax + 1$ имеет с объединением двух рассмотренных окружностей ровно одну

общую точку. Из рисунка видно, что таких прямых всего две — это прямые с угловыми коэффициентами a_1 и a_4. Таким образом, ответом к задаче будут служить $a=\frac{21-\sqrt{21}}{24}$ и $a=\frac{14+\sqrt{7}}{12}$.

Ответ: $\frac{21-\sqrt{21}}{24}$, $\frac{14+\sqrt{7}}{12}$.

Пример 8. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases}|x-a|+|y-a|+|a+1-x|+|a+1-y|=2,\\ y+2|x-5|=6\end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение: Рассмотрим сначала первое уравнение системы. Проведем на координатной плоскости Oxy прямые $x=a$, $x=a+1$, $y=a$, $y=a+1$ (рисунок 63).

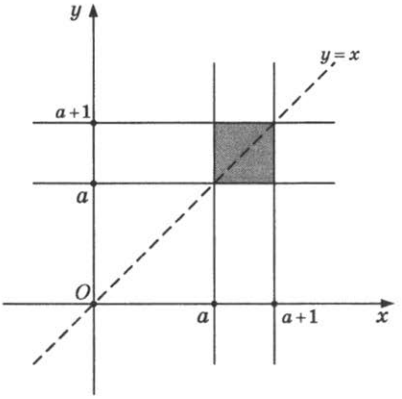

Рис. 63

Величина $|x-a|+|a+1-x|=|x-a|+|x-(a+1)|$ есть сумма расстояний от точки с координатами (x,y) до прямых $x=a$ и $x=a+1$, а величина $|y-a|+|a+1-y|=|y-a|+|y-(a+1)|$ — сумма расстояний от точки с координатами (x,y) до прямых $y=a$ и $y=a+1$. Таким образом, сумма всех четырех модулей есть сумма расстояний от точки с координатами (x,y) до четырех проведенных прямых. Ясно, что эта сумма равна 2 тогда и только тогда, когда точка (x,y) находится внутри или на границе квадрата, образованного этими

прямыми. Это и есть множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Преобразуем теперь второе уравнение следующим образом:

$$y+2|x-5|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 5,\\ y+2(5-x)=6,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 5,\\ y+2(x-5)=6;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 5,\\ y=2x-4,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 5,\\ y=16-2x.\end{cases}\end{array}\right.$$

Изобразим полученное множество точек (рисунок 64).

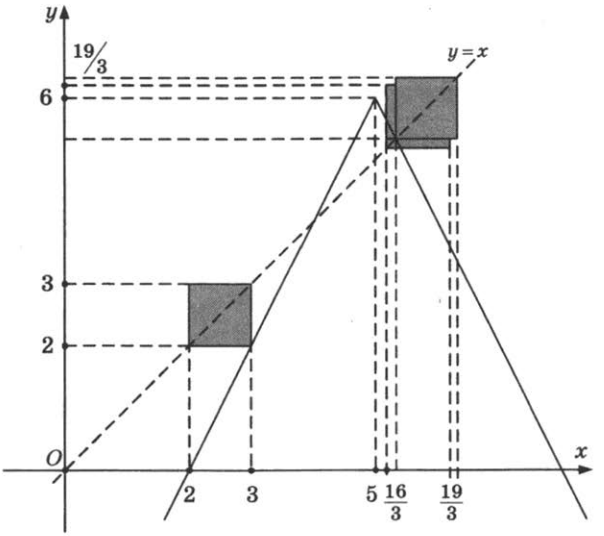

Рис. 64

Квадрат $x\in[a,a+1]$, $y\in[a,a+1]$ пересекается с этим множеством ровно в одной точке только в двух случаях, как показано на рисунке. Один из этих случаев соответствует значению $a = 2$, другой — $a=\frac{16}{3}$.

Ответ: 2, $\frac{16}{3}$.

Пример 9. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}(3\sqrt{x|x|}+|y|-3)(|x|+3|y|-9)=0,\\ (x-a)^2+y^2=25\end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Решение: Изобразим на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению. Имеем:

$$3\sqrt{x\,|\,x\,|}+|\,y\,|-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ 3x+|\,y\,|-3=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ |\,y\,|=3-3x. \end{cases}$$

Так как область определения $x \geq 0$ должна быть выполнена и для второго множителя, далее получаем:

$$|x|+3|y|-9=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x+3|y|-9=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ |y|=3-\dfrac{x}{3}. \end{cases}$$

Изобразим полученное множество точек на рисунке 65.

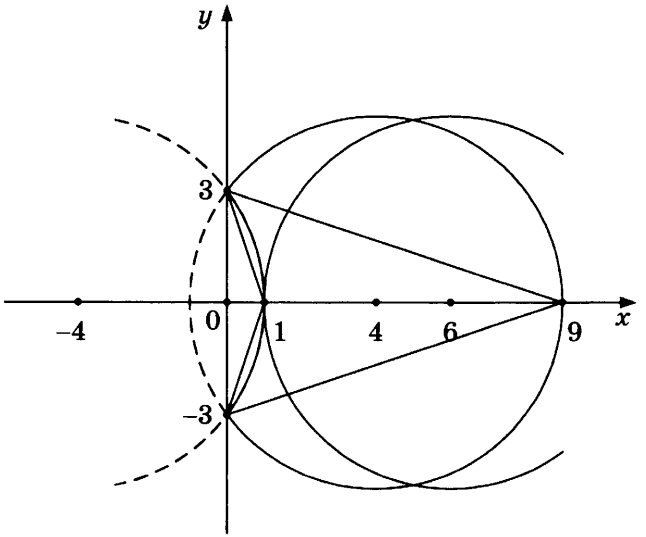

Рис. 65

Второе уравнение системы задает на координатной плоскости окружность с центром (a , 0) и радиусом 5 (или часть этой окружности, для которой выполнено неравенство $x \geq 0$). Из рисунка видно, что исходная система имеет ровно три различных решения только в трех случаях. Первый случай соответствует значению $a = -4$, второй — $a = 4$, третий — $a = 6$.

Ответ: –4, 4, 6.

Пример 10. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2xy - ax - 2ay + a^2 - 2 = 0, \\ 4x^2 + 4y^2 - 8ax - 4ay - 7a^2 - 20a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение: Преобразуем данную систему следующим образом:

$$\begin{cases} 2xy - ax - 2ay + a^2 - 2 = 0, \\ 4x^2 + 4y^2 - 8ax - 4ay - 7a^2 - 20a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2y - a)(x - a) = 2, \\ 4(x - a)^2 + (2y - a)^2 = 12a^2 + 20a; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(y - \dfrac{a}{2}\right)(x - a) = 1, \\ (x - a)^2 + \left(y - \dfrac{a}{2}\right)^2 = 3a^2 + 5a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'y' = 1, \\ x'^2 + y'^2 = 3a^2 + 5a, \end{cases}$$

где $x' = x - a$, $y' = y - \dfrac{a}{2}$. Последняя (а значит, и исходная) система имеет ровно два различных решения тогда и только тогда, когда окружность $x'^2 + y'^2 = 3a^2 + 5a$ касается гиперболы $x'y' = 1$ в точках (1, 1) и (–1, –1) (рисунок 66).

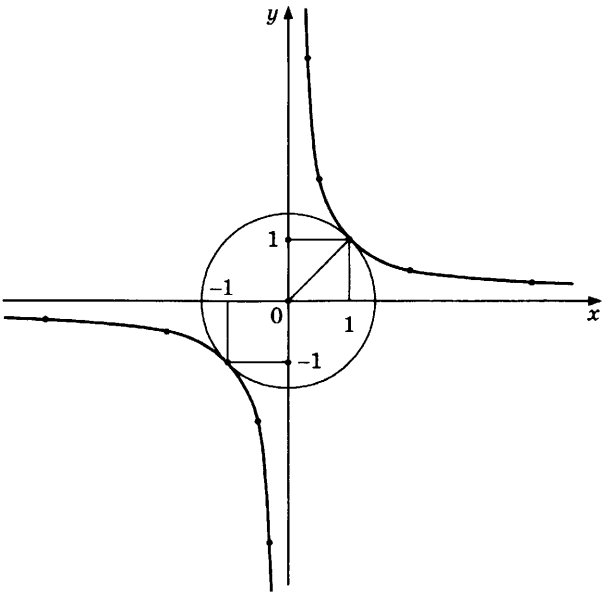

Рис. 66

Радиус такой окружности равен $\sqrt{2}$, откуда $3a^2+5a=2$, т.е. $a=-2$ или $a=\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$, -2.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых имеется хотя бы одна пара чисел (x, y), удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} x^2+(y+3)^2<4, \\ y=2ax^2. \end{cases}$$

2. Найти все значения параметра k, при каждом из которых хотя бы для одного числа b уравнение $|x^2-8x+15|-kx=|x^2-1|-b$ имеет: а) более 5 корней; б) ровно 5 корней.

3. При каких значениях параметра a существует такое положительное число b, что все решения (x, y) системы неравенств

$$\begin{cases} 2y-x\le 1, \\ y+2x\le 2, \\ y+ax\ge -1 \end{cases}$$

удовлетворяют соотношению $x^2+y^2\le b$?

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2-6|x|-6|y|+17\le 0, \\ x^2+y^2-2y=a^2-1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

5. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{5}{x}-3\right|=ax-2$ на промежутке $(0,+\infty)$ имеет более двух корней.

6. Найти все значения $a > 0$, при каждом из которых из неравенства $x^2 + y^2 \le a^2$ следует неравенство $(|x|+4)(|y|+4) \le 49$.

7. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\frac{2}{x+1} = a|x-3|$ на промежутке $[0,+\infty)$ имеет более двух корней.

8. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $ax + \sqrt{-7-8x-x^2} = 2a+3$ имеет единственный корень.

9. При каких значениях параметра b система уравнений

$$\begin{cases} 4y = 4b + 3 - x^2 + 2x, \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$$

имеет решением ровно одну пару (x, y) действительных чисел?

10. Найти все значения параметра a, при которых для любого значения параметра b уравнение $|x-2| + b|2x+1| = a$ имеет хотя бы одно решение.

11. Найти все значения параметра b, для которых при любом значении параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x + 6y + 4 = 0, \\ y + ax + ab = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

12. Найти наименьшее b, при котором существует a такое, что уравнение $\sqrt{2x - x^2} + |2x - a| = b$ имеет четыре решения.

13. При каких значениях параметра a уравнение $|x| + \left|\frac{x+1}{3x-1}\right| = a$ имеет ровно три решения?

14. Найти все значения параметра p, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x| + |y| - p) \cdot (|x| + |y| + |x+y| - 2p) = 0, \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{p^2} \end{cases}$$

имеет ровно 4 различных решения.

МЕТОД «*Oxa*»

В отличие от задач предыдущего параграфа, теперь мы будем проводить исследование на координатной плоскости *Oxa*, то есть по оси абсцисс откладывать значение переменной x, а по оси ординат — значение параметра a. Тогда на горизонтальных «срезах» можно увидеть решения, соответствующие данному значению a. Часто такой метод оказывается эффективнее стандартных методов решения. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $(a-x^2)(a+x-2)\le 0$ не содержит ни одной точки из отрезка $x\in[-1,1]$.

Решение: Изобразим на координатной плоскости *Oxa* решения данного неравенства. Для этого нарисуем параболу $a = x^2$ и прямую $a = 2 - x$, которые пересекаются в точках (−2, 4) и (1, 1). Так как

$$\left(a-x^2\right)\left(a+x-2\right)\le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\ge x^2,\\ a\le 2-x,\end{cases}\\ \begin{cases}a\le x^2,\\ a\ge 2-x,\end{cases}\end{array}\right.$$

то решение неравенства представляет собой множество точек, лежащих внутри параболы под прямой и вне параболы над прямой, включая сами эти линии (рисунок 67).

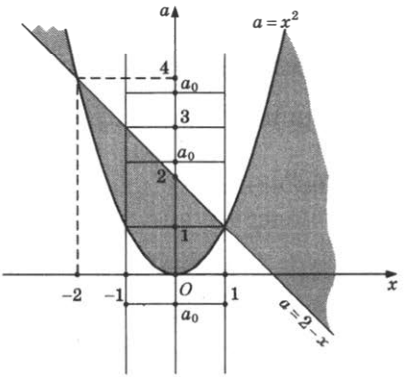

Рис. 67

Прямые $x = -1$ и $x = 1$ пересекают параболу $a = x^2$ в точках $(-1, 1)$ и $(1, 1)$ соответственно, а прямую $a = 2 - x$ в точке $(-1, 3)$ и той же точке $(1, 1)$. Условие задачи выполнено в том и только в том случае, когда отрезок прямой $a = a_0$, заключенный между прямыми $x = -1$ и $x = 1$, не пересекает изображенное нами множество. Как видно из рисунка, это происходит только при $a_0 \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$. Таким образом, все такие значения a будут служить ответом к задаче.

Ответ: $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

Пример 2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства $x^2 + (1-3a)x + 2a^2 \le 2$ удовлетворяет неравенству $ax(x-5+a) \ge 0$.

Решение: **(другое решение примера 5 § 4).** Первое неравенство из условия задачи равносильно неравенству

$$x^2 + (1-3a)x + 2a^2 \le 2 \;\Leftrightarrow\; (x-2a+2)(x-a-1) \le 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2a+2 \ge 0, \\ x-a-1 \le 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x-2a+2 \le 0, \\ x-a-1 \ge 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \le \dfrac{x+2}{2}, \\ a \ge x-1, \end{cases} \\ \begin{cases} a \ge \dfrac{x+2}{2}, \\ a \le x-1. \end{cases} \end{array}\right.$$

На координатной плоскости Oxa множество решений этого неравенства представляет собой два вертикальных угла, ограниченных прямыми $a = \dfrac{x+2}{2}$ и $a = x - 1$. Решение неравенства $ax(x-5+a) \ge 0$ при условии $ax \ge 0$ (первая и третья четверти) представляет собой множество точек, лежащих над прямой $a = 5 - x$, то есть таких, что $a \ge 5 - x$, а при условии $ax \le 0$ (вторая и четвертая четверти) — множество точек, лежащих под этой прямой, то есть $a \le 5 - x$ (рисунок 68).

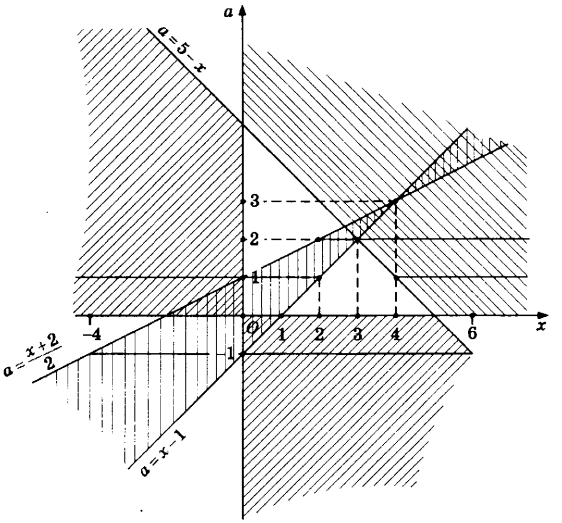

Рис. 68

Из рисунка видно, что существуют ровно четыре значения a, при которых выполнено условие задачи. При $a = 3$ решением первого неравенства является точка $x = 4$, которая также содержится и в решении второго неравенства. При $a = 2$ решением первого неравенства служит отрезок $x \in [2,3]$, который имеет одну общую точку $x = 3$ с решением второго неравенства. При $a = 1$ отрезок $x \in [0,2]$, являющийся решением первого неравенства, пересекается с объединением лучей $x \in (-\infty,0] \cup [4,+\infty)$, которое является решением второго неравенства, в единственной точке $x = 0$. И наконец, если $a = -1$, то решением первого неравенства служит отрезок $x \in [-4,0]$, решением второго неравенства — отрезок $[0,6]$, и эти отрезки имеют одну общую точку $x = 0$.

Таким образом, ответом к задаче будут служить $a = \pm 1$, $a = 2$, $a = 3$.

Ответ: ± 1, 2, 3.

Пример 3. Найти все значения a, при каждом из которых любое решение неравенства $x^2 - (4a+4)x + 3a^2 + 12a \le 0$ удовлетворяет неравенству $x(x+a+1) \ge 0$.

Решение: **(другое решение примера 8 § 4).** Первое неравенство из условия задачи равносильно неравенству

$$x^2-(4a+4)x+3a^2+12a\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-3a)(x-a-4)\le 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3a\ge 0,\\ x-a-4\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x-3a\le 0,\\ x-a-4\ge 0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\le \dfrac{x}{3},\\ a\ge x-4,\end{cases}\\ \begin{cases}a\ge \dfrac{x}{3},\\ a\le x-4.\end{cases}\end{array}\right.$$

На координатной плоскости Oxa множество решений этого неравенства представляет собой два вертикальных угла, ограниченных прямыми $a=\frac{1}{3}x$ и $a = x - 4$. Решение неравенства $x(x+a+1)\ge 0$ представляет собой при условии $x\ge 0$ (первая и четвертая четверти) множество точек, лежащих над прямой $a=-x-1$, то есть таких, что $a\ge -x-1$, а при условии $x \le 0$ (вторая и третья четверти) — множество точек, лежащих под этой прямой, то есть $a \le -x - 1$ (рисунок 69).

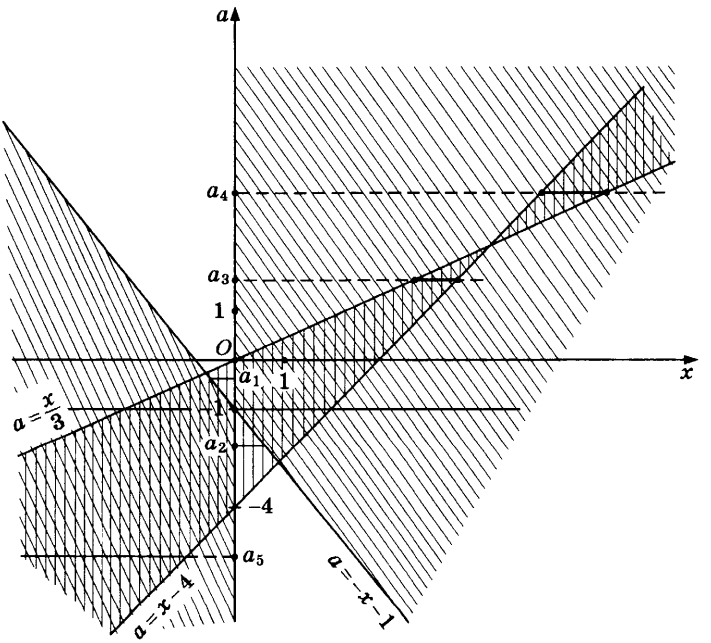

Рис. 69

Из рисунка видно, что при $a = -1$ решением второго неравенства является вся числовая прямая, то есть условие задачи выполняется. Если $a \in (-4,-1) \cup (-1,0)$, то существуют решения первого неравенства, которые не являются решениями второго. На рисунке показаны такие решения, соответствующие значениям $a = a_1$ и $a = a_2$. Следовательно, все такие a не удовлетворяют условию задачи. При $a \in (-\infty,-4] \cup [0,+\infty)$ любое решение первого неравенства является также и решением второго. На рисунке показаны такие решения, соответствующие значениям $a = a_3$, $a = a_4$ и $a = a_5$. Значит, все такие a удовлетворяют условию задачи. Таким образом, ответом к задаче будут служить $a \in (-\infty,-4] \cup \{-1\} \cup [0,+\infty)$.

Ответ: $(-\infty,-4] \cup \{-1\} \cup [0,+\infty)$.

Пример 4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно x, удовлетворяющее условиям:

$$\begin{cases} x^2 + (5a+2)x + 4a^2 + 2a < 0, \\ x^2 + a^2 = 4. \end{cases}$$

Решение: Первое неравенство системы равносильно неравенству

$$x^2 + (5a+2)x + 4a^2 + 2a < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+a)(x+4a+2) < 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + a > 0, \\ x + 4a + 2 < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x + a < 0, \\ x + 4a + 2 > 0; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > -x, \\ a < -\dfrac{x+2}{4}, \end{cases} \\ \begin{cases} a < -x, \\ a > -\dfrac{x+2}{4}. \end{cases} \end{array} \right.$$

На координатной плоскости Oxa множество решений этого неравенства представляет собой объединение двух острых вертикальных углов, ограниченных прямыми $a = -x$ и $a = -\dfrac{x+2}{4}$. Множество решений второго неравенства системы есть окружность с центром в начале координат и радиусом 2 (рисунок 70).

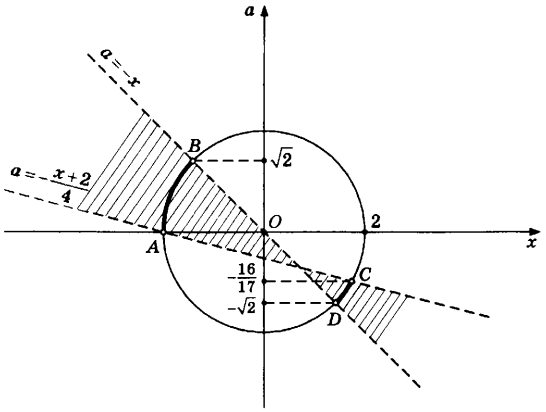

Рис. 70

Таким образом, множество решений системы представляет собой две дуги окружности, обозначенные на рисунке AB и CD (исключая концы этих дуг). Дуге AB соответствуют значения $a \in (0, \sqrt{2})$. Найдем координату a точки C. Имеем:

$$\begin{cases} x+4a+2=0, \\ x^2+a^2=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4a-2, \\ x^2+a^2=4; \end{cases} \Rightarrow (-4a-2)^2+a^2=4 \Leftrightarrow a(17a+16)=0.$$

Точке C соответствует значение $a=-\frac{16}{17}$. Значит, дуге CD соответствуют значения $a \in \left(-\sqrt{2}, -\frac{16}{17}\right)$. Ответом к задаче будут служить два указанных промежутка.

Ответ: $\left(-\sqrt{2}, -\frac{16}{17}\right) \cup (0, \sqrt{2})$.

Пример 5. Найти все значения a, при каждом из которых среди решений неравенства $\sqrt{(a-x^2)(a+x^2)}+a \geq x$ есть ровно два различных целых числа.

Решение: Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\sqrt{(a-x^2)(a+x^2)}+a \geq x \Leftrightarrow \sqrt{(a-x^2)(a+x^2)} \geq x-a \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-a \geq 0, \\ (a-x^2)(a+x^2) \geq (x-a)^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x-a \leq 0, \\ (a-x^2)(a+x^2) \geq 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \leq x, \\ x(x^3+x-2a) \leq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a \geq x, \\ (a-x^2)(a+x^2) \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Неравенство $x(x^3+x-2a)\le 0$ равносильно совокупности

$$x(x^3+x-2a)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ x^3+x-2a\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 0,\\ x^3+x-2a\ge 0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ a\ge \dfrac{x^3+x}{2},\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 0,\\ a\le \dfrac{x^3+x}{2}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Неравенство $(a-x^2)(a+x^2)\ge 0$ равносильно совокупности

$$(a-x^2)(a+x^2)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-x^2\ge 0,\\ a+x^2\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}a-x^2\le 0,\\ a+x^2\le 0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\ge x^2,\\ a\ge -x^2,\end{cases}\\ \begin{cases}a\le x^2,\\ a\le -x^2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Изобразим на координатной плоскости Oxa полученное множество точек (рисунок 71).

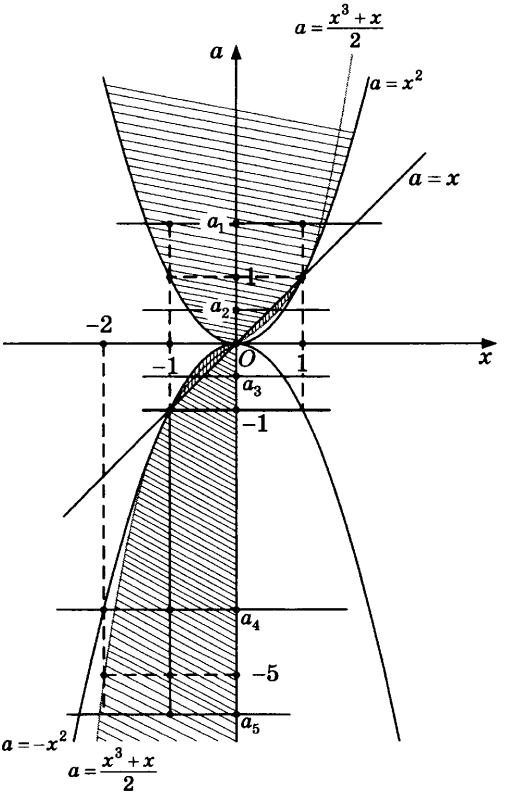

Рис. 71

Заметим при этом, что при всех $x > 0$ выполнено неравенство $\frac{x^3+x}{2} \geq x^2$, причем равенство достигается в точке $x = 1$; а при всех $x < 0$ выполнено неравенство $\frac{x^3+x}{2} \leq -x^2$, причем равенство достигается в точке $x = -1$.

Из рисунка видно, что при $a = 1$ имеется три целочисленных решения ($x = 0, \pm 1$), при $a > 1$ таких решений не менее трех ($a = a_1$), при $a \in (-1,1)$ целочисленное решение ровно одно ($x = 0$, $a = a_2$ или $a = a_3$), при $a = -1$ два целых числа удовлетворяют условию задачи ($x = -1, 0$), при $a \in (-5,-1)$ таких чисел также два ($a = a_4$) и, наконец, при $a \leq -5$ целочисленных решений как минимум три ($a = a_5$). Таким образом, ответом к задаче будут служить $a \in (-5,-1]$.

Ответ: $(-5,-1]$.

Пример 6. Пусть x_1 — наибольший отрицательный корень уравнения $\sqrt{3}\sin x - 3\cos x = 2a - 1$, а x_2 — наибольший отрицательный корень уравнения $2\cos^2 x - 2\sin^2 x = a$. Найти все значения a, при которых $x_1 \geq x_2$.

Решение: Первое уравнение преобразуется как

$$\sqrt{3}\sin x - 3\cos x = 2a - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{2a-1}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2a-1}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = \frac{1 + 2\sqrt{3}\sin(x - \frac{\pi}{3})}{2},$$

а второе — как $a = 2\cos 2x$. Изобразим данные множества точек на плоскости Oxa (рисунок 72).

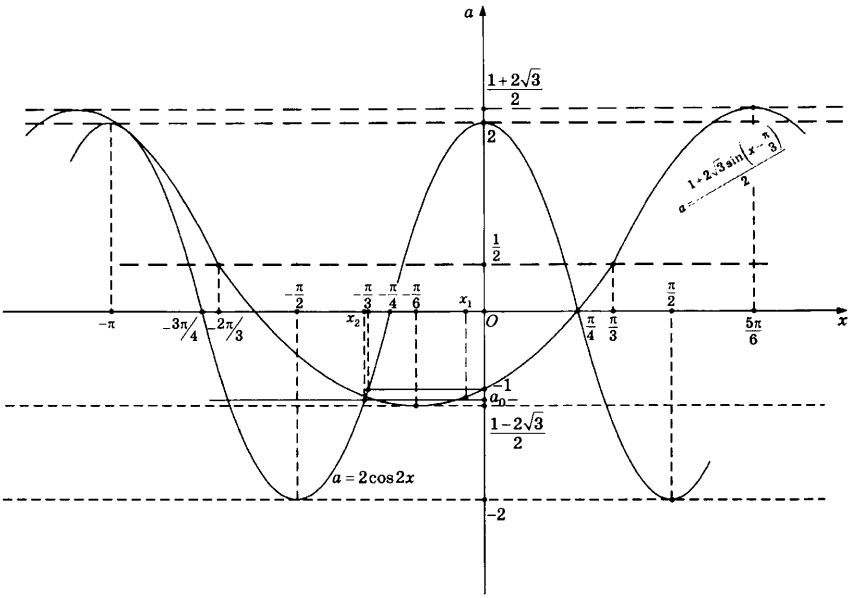

Рис. 72

Заметим, что оба корня x_1 и x_2 существуют при $a \in \left[\frac{1-2\sqrt{3}}{2}, 2\right]$.

Из рисунка видно, что неравенство $x_1 > x_2$ выполняется при $a \in \left[\frac{1-2\sqrt{3}}{2}, -1\right)$. Здесь $a = \frac{1-2\sqrt{3}}{2}$ — значение в точке минимума функции $a = \frac{1+2\sqrt{3}\sin(x-\frac{\pi}{3})}{2}$, которое достигается при $x = -\frac{\pi}{6}$, а $a = -1$ — координата точки пересечения графика этой функции с осью ординат. Неравенство $x_1 > x_2$ продемонстрировано на рисунке для $a = a_0$. Равенство $x_1 = x_2$ достигается при $a = 2$, при этом $x_1 = x_2 = -\pi$, и при $a = -1$ и $x_1 = x_2 = -\frac{\pi}{3}$. При всех остальных a из указанного промежутка выполнено неравенство $x_1 < x_2$.

Таким образом, ответом к задаче будут служить $a \in \left[\frac{1-2\sqrt{3}}{2}, -1\right] \cup \{2\}$.

Ответ: $\left[\frac{1-2\sqrt{3}}{2}, -1\right] \cup \{2\}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти все значения, которые может принимать сумма $x + a$, если пара чисел (x, a) является решением неравенства $|2x+4-2a|+|x-2+a| \le 3$.

2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2+2|x-a| \ge a^2$ справедливо для всех действительных x.

3. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $x^2+4x+6a|x+2|+9a^2 \le 0$ имеет не более одного решения.

4. При всех a решить систему неравенств

$$\begin{cases} |2x+2a| > |x|+a, \\ ax < 0. \end{cases}$$

5. Найти все значения a, для которых неравенство $\log_{x-a} x^2 < 2$ выполняется хотя бы для одного числа x такого, что $|x| < 0{,}01$.

6. Найти все отрицательные числа a, при которых существует единственное действительное число x, удовлетворяющее условиям $\operatorname{ctg} \pi\left(x+\frac{1}{4}\right) = 1$ и $(4x-16a+23)(-2a-33-6x) > 0$.

ОТВЕТЫ

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. *Если* $a \neq \pm 1$, *то* $x = \dfrac{a^2 + a + 1}{a + 1}$, $y = -\dfrac{a}{a+1}$; *если* $a = 1$, *то* $x = t$, $y = 1 - t$, *где* $t \in R$; *если* $a = -1$, *то нет решений.*
2. $a \neq -2$.
3. $\sqrt{10}$.
4. 3, −1.
5. $a = \pm 1$, $b = 3$.
6. $b = -a^2 - 1$, $a \in R$ *или* $a = b = 0$.

§ 2. ИССЛЕДОВАНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА С ПОМОЩЬЮ ДИСКРИМИНАНТА

1. $x = 0$, $y = \dfrac{1}{2}$.
2. $2\sqrt{2}$.
3. $\operatorname{arctg}\dfrac{7}{3} - \dfrac{\pi}{4}$.
4. $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$.
5. 50.
6. $-17/48$.
7. $\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}$, $\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$.
8. $x = 7n$, $y = 3n$, $z = 2n$; $n \in Z$.
9. $\{(4,-3,0);\ (2,-1,2)\}$.

§ 3. ТЕОРЕМА ВИЕТА

1. -5, $-\dfrac{5}{13}$.
2. $\left[\dfrac{1}{100}, 1\right) \cup \left(\dfrac{17}{11}, \dfrac{8}{5}\right) \cup \left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{17}{10}\right)$.

3. 4.

4. 4800.

5. $\left(0, 2-\sqrt{3}\right) \cup \left(2+\sqrt{3}, +\infty\right)$.

6. $z = 5$, $\left(x^2 + y^2\right)_{\max} = 8$.

7. $7/3$.

8. *Корни существуют при* $p = 0$ *(нулевой корень) и при* $p \geq 4$, *когда оба корня положительны.*

9. $\frac{\pi}{24} + \pi n$, $-\frac{5\pi}{24} + \pi n$; $n \in Z$.

10. $a \in (0, 2c]$.

§ 4. РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

1. $(-\infty, -6] \cup [0, +\infty)$.

2. $\left(-\sqrt{6}, -2\right) \cup (-2, -1) \cup \{4\}$.

3. *Если* $a < -\frac{3}{2}$, *то* $x = \log_5 \frac{a - 1 + \sqrt{a^2 - 10a - 11}}{2}$; *если* $-\frac{3}{2} \leq a < 11$, *то нет решений; если* $a = 11$, *то* $x = 1$; *если* $a > 11$, *то*

$$x_1 = \log_5 \frac{a - 1 + \sqrt{a^2 - 10a - 11}}{2},\ x_2 = \log_5 \frac{a - 1 - \sqrt{a^2 - 10a - 11}}{2}.$$

Единственное решение при $a \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \{11\}$.

4. $\left(-1, -\frac{7}{9}\right]$.

5. $(-\infty, 1] \cup \left\{\frac{5}{4}\right\} \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$.

6. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

7. $a \in [2, +\infty)$.

8. $\left(-\sqrt[3]{36}, -3\right] \cup \left(0, \frac{\sqrt[3]{9}}{2}\right)$.

9. $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{3}}{4}, +\infty\right)$.

10. $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$.

11. $\left(-\infty, -\frac{1+\sqrt{8}}{\sqrt{8}}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

12. $\left[1, \sqrt{2}\right]$.

§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИЧЕСКИХ ИЛЛЮСТРАЦИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

1. $\left(-\infty, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$.

2. $\left(\frac{1}{2}, 4+\sqrt{6}\right)$.

3. $[-4, 2]$.

4. $a = -5$, $f_{\max}(x) = -4$.

5. $c = -\frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{6}$.

6. $c = 0$, $d = 1$ *или* $c = -1$, $d = -2$, $f(x) \in [0, 2]$.

7. -17.

§ 6. ОГРАНИЧЕННОСТЬ ФУНКЦИИ. НАХОЖДЕНИЕ ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ

1. $(-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

2. $[-2, 2\sqrt{2\sqrt{5}-6})$.

3. $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

4. $[-3, 1]$.

5. 2.

6. $x = \frac{1}{2} + \log_{16}3$, $y = \frac{1}{2} - \log_{16}3$.

7. $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

8. *Если* $a = 0$, *то* $x = 0$, $x = -1$; *если* $a \neq 0$, *то* $x = 0$.

9. *Если* $a < -1$, $a > 0$, *то* $x_1 = y_1 = 2^{\sqrt{2(a^2+a)}}$, $x_2 = y_2 = 2^{-\sqrt{2(a^2+a)}}$; *если* $a = -1$, $a = 0$, *то* $x = y = 1$; *если* $-1 < a < 0$, *то нет решений.*

10. $1/2$, -2.

11. $1/16$.

12. $\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, $\pm\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$.

13. -3, 9.

14. $f_{\min} = 2$ *при* $x = 3$.

§ 7. ДРУГИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

1. 0, $-2/3$.

2. 4.

3. $[0,4]$.

4. *Если* $a = 1$, *то* $x = -4$.

5. 0, $\pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

6. $1 \pm \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}$.

7. $1/8$.

8. 2.

9. -3, -2.

10. $-1/5$.

11. ± 1.

12. $-1/4$.

13. $-2/3$.

14. 0 *или* 1.

15. -5, 2.

§ 8. ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

1. *Если* $a < 0$, *то* $x \in \left(2a^2 + \frac{a}{2}, +\infty\right)$; *если* $a \geq 0$, *то* $x \in \left(\frac{a^2}{18} + \frac{a}{2}, +\infty\right)$.

2. *Если* $a = \frac{1}{2}$, *то* $x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$; *если* $a < -2$, *то* $x \in (-\infty, a) \cup (-2, +\infty)$; *если* $a = -2$, *то* $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$; *если* $-2 < a < -\frac{1}{2}$ *или* $a > \frac{1}{2}$, *то* $x \in (-\infty, -2) \cup (a, +\infty)$.

3. *Если* $a = 0$, *то* $x > 0$; *если* $a \neq 0$, *то* $x = \frac{5a + \sqrt{25a^2 + 4}}{2}$.

4. *Если* $a = 0$, *то* $x \in R$; *если* $0 < |a| \leq \frac{1}{2}$, *то*

$$x = \frac{(-1)^n \arcsin 2a + \pi n}{3a};$$

если $|a| \geq \frac{2}{3}$, *то* $x = \frac{(-1)^{n+1} \arcsin \frac{2}{3a} + \pi n}{3a}$, $n \in Z$; *при других* a *решений нет.*

5. *Если* $a = 2$, *то решений нет; если* $\sqrt{2} < a < \sqrt{3}$, *то* $x \in \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$; *если* $\sqrt{3} < a < 2$ *и* $a > 2$, *то* $x \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$.

6. *Если* $-3 < a \leq -2$, *то одно решение; если* $-2 < a \leq -1$, *то два решения; если* $-1 < a < 0$, *то три решения.*

7. $\left[\frac{2}{5}, \frac{11}{2}\right]$.

8. *Если* $a < -1$, *то*

$x \in (0, -a - \sqrt{a^2 - 1}] \cup [-a + \sqrt{a^2 - 1}, -a + \sqrt{a^2 + 1}]$;

если $a \geq -1$, *то* $x \in (0, -a + \sqrt{a^2 + 1}]$.

9. *Если* $a < -5$, *то нет решений; если* $-5 \leq a \leq 1$, *то* $x \in [0, (a+5)^2]$; *если* $a > 1$, *то* $x \in [(a-1)^2, (a+5)^2]$.

10. *Если* $a < -1$, *то* $x \in [a, -a]$; *если* $-1 \leq a \leq -\frac{1}{2}$, *то* $x \in [-\sqrt{-2a-1}, \sqrt{-2a-1}]$; *если* $a > -\frac{1}{2}$, *то нет решений.*

11. $\left[-9, -\frac{1}{4}\right] \cup \{0\}$.

12. $a \in (-\infty, -2] \cup \{2\} \cup (4, +\infty)$.

13. *Если* $a = -1$, *то* $x \in (2, +\infty)$; *если* $-1 < a \leq -\frac{1}{2}$, *то* $x \in (1, a+2] \cup (1-a, +\infty)$;

если $-\frac{1}{2} < a < 0$, *то* $x \in (1, 1-a) \cup [a+2, +\infty)$; *если* $a = 0$, *то* $x \in [2, +\infty)$.

14. $[1, 3] \cup \{4\}$.

15. *Если* $a > 2$, *то* $x = a - 1$ *и* $x = \frac{a-1}{a-2}$; *если* $1 < a \leq 2$, *то нет решений.*

ИЛЛЮСТРАЦИИ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

1. $\left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{16}\right)$.

2. *а*) -8; б) $(-8, -4\sqrt{3})$.

3. $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$.

4. $[-6, 1-\sqrt{13}] \cup [\sqrt{13}-1, 6]$.

5. $\left(\frac{6}{5}, \frac{5}{4}\right)$.

6. $(0, 18]$.

7. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$.

8. $\left[-1, -\frac{1}{3}\right) \cup \{0\}$.

9. -2, 0.

10. $5/2$.

11. $(-4, -1)$.

12. 2.

13. 2.

14. $\{\sqrt[4]{2}\} \cup \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 1\right]$.

МЕТОД «*Оха*»

1. $[-1, 5]$.

2. $[-1, 1]$.

3. $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

4. *Если* $a < 0$, *то* $x \in (0, -a) \cup (-a, +\infty)$; *если* $a = 0$, *то нет решений, если* $a > 0$, *то* $x \in (-\infty, -3a) \cup \left(-\frac{a}{3}, 0\right)$.

5. $\left(-\infty, -\frac{99}{100}\right) \cup \left(-\frac{1}{50}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{100}\right)$.

6. $\left[-\frac{5}{16}, -\frac{1}{16}\right)$.

Справочное издание

Садовничий Юрий Викторович

ЕГЭ 100 БАЛЛОВ МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU.АД44.Н02841 от 30.06.2017 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо*
Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректоры *Е. В. Григорьева, И. А. Огнева*
Дизайн обложки *Л. В. Демьянова*
Компьютерная верстка *М. А. Серова*

Россия, 107045, Москва, Луков пер., д. 8.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 8 (495) 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано в филиале «Тверской полиграфический комбинат
детской литературы» ОАО «Издательство «Высшая школа»
170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, д. 46
Тел.: +7 (4822) 44-85-98. Факс: +7 (4822) 44-61-51

**По вопросам реализации обращаться по тел.:
8 (495) 641-00-30 (многоканальный).**