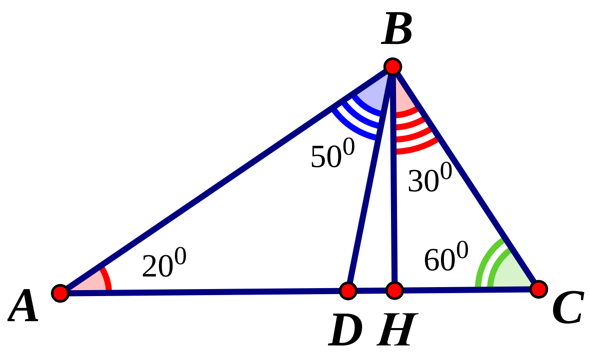
Решение геометрических задач.

Консультация от 21 апреля 2016 года (ОГЭ, геометрия, 2 часть, задача № 24) .

Консультант: учитель математики высшей категории МБОУ СОШ № 26 Бердыева Л.А.

№ 1. В треугольнике ABC углы A и C равны 20^0 и 60^0 соответственно. Найдите угол между высотой BH и биссектрисой BD.



Решение.

1) Рассмотрим ΔABC:

$$\begin{cases} \angle A = 20^0 \\ \angle C = 60^0 \end{cases} \Rightarrow \angle ABC = 180^0 - (20^0 + 60^0) == 100^0$$

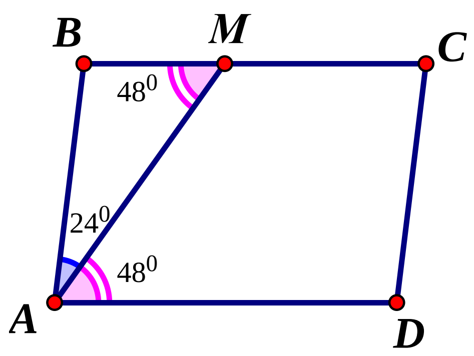
2) BD – биссектриса $\angle ABC \Rightarrow \angle ABD = \angle DBC = 50^0$

3) Рассмотрим ΔBHC – прямоугольный: $\angle C = 60^0 \Rightarrow \angle HBC = 90 - 60 = 30^0$

4) $\angle DBH = \angle DBC - \angle HBC = 50 - 30 = 20^0$.

Ответ: $\angle DBH = 20^0$.

№ 2. В ромбе ABCD со стороной 8 см проведена прямая AM, делящая острый угол BAD в отношении 1:2. Точка M лежит на стороне BC. Угол BAD равен 72^o.



Найдите отношение BM к AB.

Решение.

1) $\angle BAM : \angle MAD = 1:2 \Rightarrow \angle BAM = 72:3 = 24^0$; $\angle MAD = 48^0$.

2) $ABCD$ – параллелограмм $\Rightarrow$ $\angle BMA = \angle MAD = 48^0$

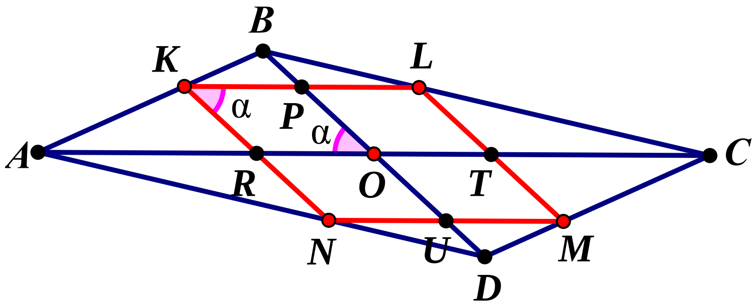
3) По теореме синусов имеем:

$$\frac{AB}{\sin BMA} = \frac{BM}{\sin BAM} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 48^0} = \frac{BM}{\sin 24^0} \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{\sin 24^0}{\sin 48^0} = \frac{\sin 24^0}{2\sin 24^0 \cos 24^0} =$$

$$= \frac{1}{2\cos 24^0}. \qquad (sin2x = 2sinx * cosx)$$

Ответ: $\frac{BM}{AB} = \frac{1}{2\cos 24^0}$.

№ 3. Вершины ромба расположены на сторонах параллелограмма, а стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма. Найдите отношение площадей ромба и параллелограмма, если отношение диагоналей параллелограмма 28.



Решение.

Пусть $BD = d$, тогда $AC = 28d$. И пусть сторона ромба равна a, т. е. $KL = a$.

1) $\begin{cases} KL \parallel AC \\ KN \parallel BD \end{cases} \Rightarrow \angle LKN = \angle AOB = \propto$.

2) $\Delta ABC \sim \Delta KBL$ и BO – медиана в $\Delta ABC \Rightarrow BP$ – медиана в $\Delta KBL \Rightarrow KP = PL = 0{,}5a$.

3) $KPOR$ – параллелограмм (ромб) $\Rightarrow KP = PO = OR = RK = 0{,}5a$.

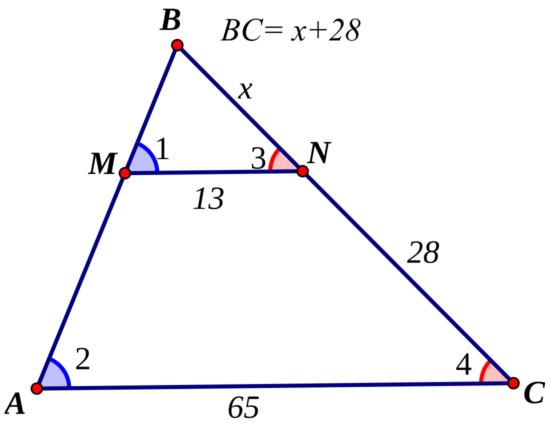
4) $\Delta BOA \sim \Delta KRA \Rightarrow \frac{BO}{KR} = \frac{AO}{AR} \Rightarrow \frac{0{,}5d}{0{,}5a} = \frac{14d}{14d - 0{,}5a} \Longrightarrow a = \frac{28}{29}d$.

5) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot DBsin\alpha = \frac{1}{2}28ddsin\alpha = 14d^2 sin\alpha$. $\quad S_{KLMN} = KL \cdot KN \sin \propto = a^2 \sin \propto = \left(\frac{28}{29}d\right)^2 \sin \propto$.

6) $\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \frac{\left(\frac{28}{29}d\right)^2 sin\propto}{14d^2 sin\alpha} = \frac{28^2}{29^2 \cdot 14} = \frac{56}{841}$. Ответ: $\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \frac{56}{841}$.

№ 4. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если MN = 13, AC = 65, NC = 28.

Решение.



1) $MN \parallel AC \Rightarrow \angle 1 = \angle 2;\ \angle 3 = \angle 4 \Rightarrow\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MBN \Rightarrow$

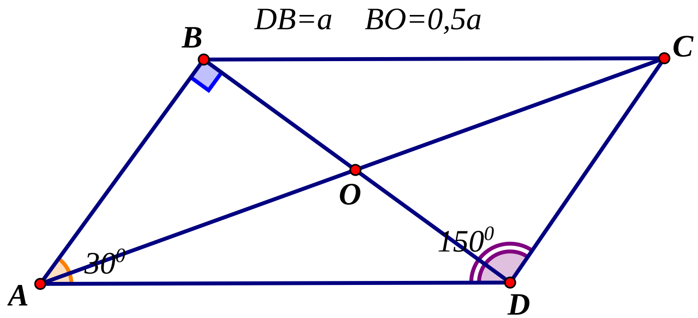
$\Rightarrow \frac{MN}{AC} = \frac{BN}{BC} \quad \Rightarrow \quad \frac{13}{65} = \frac{x}{28+x};$

$13(28 + x) = 65x$

$x = 7.$

Ответ: $BN = 7$.

№ 5. Один из углов параллелограмма в 5 раз больше другого, а одна из его диагоналей является высотой. Найдите отношение диагоналей параллелограмма.



Решение.

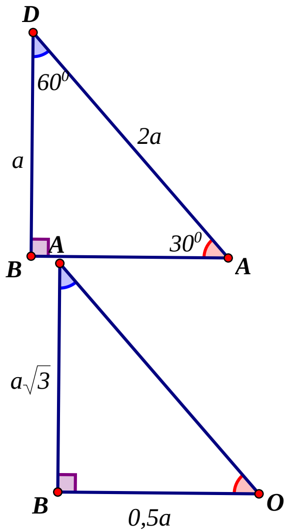
1) Пусть $\angle BAD = x,$ тогда $\angle ADC = 5x.$

2) $ABCD$ − параллелограмм $\Rightarrow \angle BAD + \angle ADC = 180^0;\ \ 6x = 180;\ \ x = 30.$

Т.е. $\angle BAD = 30^0,$ тогда $\angle ADC = 150^0.$

3) Рассмотрим ΔDBA − прямоугольный.

$\angle A = 30^0 \Rightarrow DB = a, DA = 2a.$



По теореме Пифагора имеем:

$$BA = \sqrt{DA^2 - DB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

4) Рассмотрим ΔOBA − прямоугольный.

$OB = 0{,}5a,\ \ BA = a\sqrt{3}.$

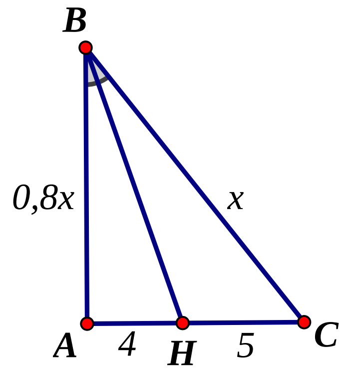
По теореме Пифагора имеем:

$$AO = \sqrt{BA^2 + OB^2} = \sqrt{3a^2 + 0{,}25a^2} = a\sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{2} \ \Rightarrow\ \mathrm{AC} = a\sqrt{13}.$$

4) Найдём отношение $\frac{\text{AC}}{BD} = \frac{a\sqrt{13}}{a} = \frac{\sqrt{13}}{1} = \sqrt{13}.$

Ответ: $\frac{\text{AC}}{BD} = \sqrt{13}.$

№ 6. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит противоположный катет на отрезки длиной 4см и 5см. Найдите площадь треугольника.



Решение.

1) BH – биссектриса $\Rightarrow \frac{\text{AB}}{\text{AH}} = \frac{\text{CB}}{\text{CH}} \Rightarrow \frac{\text{AB}}{4} = \frac{x}{5} \Rightarrow AB = \frac{4}{5}x = 0{,}8x.$

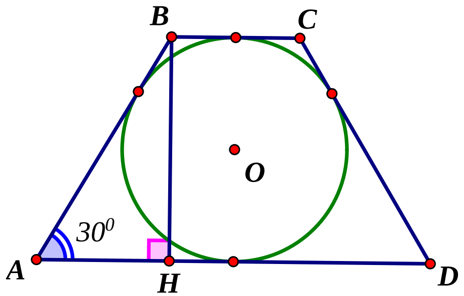
2)По теореме Пифагора имеем: $AB^2 + AC^2 = BC^2$

$0{,}64x^2 + 9^2 = x^2 \qquad \frac{9}{25}x^2 = 81 \Rightarrow x = 15$ (т.к. $x > 0$)

2) Получили: $AB = 0{,}8x = 12 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}12 \cdot 9 = 54.$

Ответ: $S_{ABC} = 54$ см^2.

№ 7. Около круга описана равнобокая трапеция, периметр которой равен 80 см, а острый угол трапеции равен 30^0. Найдите площадь трапеции.



Решение.

1) Окружность $\longrightarrow$ в трапецию $\Rightarrow BC + AD = AB + CD = P : 2 = 40.$

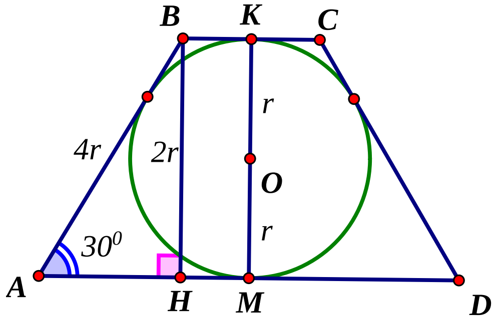
2) $\begin{cases} AB + CD = 40 \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow AB = CD = 20.$

3) Доп. построение: $BH \perp AD$. Рассмотрим ΔABH – прямоугольный.

$\begin{cases} \angle A = 30^0 \\ \text{AB} = 20 \end{cases} \Rightarrow \text{BH} = \frac{1}{2}\text{AB} = 10.$

4) $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot BH = \frac{40}{2} \cdot 10 = 200\text{см}^2.$ Ответ: $S_{ABCD} = 200\text{см}^2.$

№ 8. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна 8 см^2, а острый угол трапеции равен 30^0. Найдите радиус вписанного круга.



Решение.

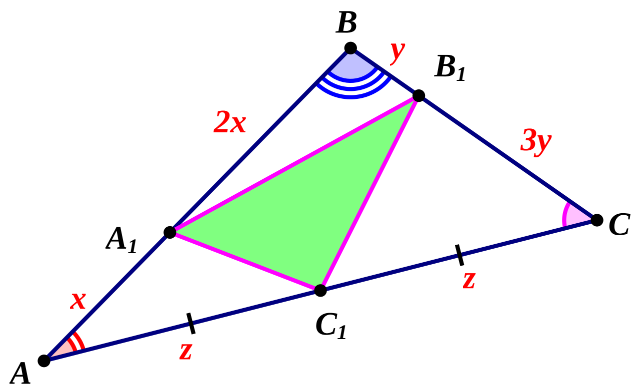
1) Доп. построение: $BH \perp AD, BH = 2r$.

2) Рассмотрим ΔABH – прямоугольный. $\left\{\begin{matrix} \angle A = 30^0 \\ BH = 2r \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB = 2BH = 4r$.

3) Окружность $\longrightarrow$ в трапецию $\Rightarrow BC + AD = AB + CD = 8r$.

4) $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot BH = \frac{8r}{2} \cdot 2r = 8\text{см}^2 \Rightarrow 8r^2 = 8 \Rightarrow r = 1\ (r > 0)$. Ответ: $r = 1$.

№ 9. Площадь треугольника ABC равна 1. На сторонах AB, BC, CA взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1, так что $AA_1:A_1B=1:2$, $BB_1:B_1C=1:3$, точка C_1 делит сторону AC пополам. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$.



Решение.

1) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot sinB = \frac{1}{2} 3x \cdot 4y \cdot sinB = 1;\ 6xy\ sinB = 1;\ xy = \frac{1}{6sinB}$,

2) $S_{A1BB1} = \frac{1}{2} A1B \cdot BB1 \cdot sinB = \frac{1}{2} 2xy \cdot sinB = xy \cdot sinB = \frac{1}{6}$,

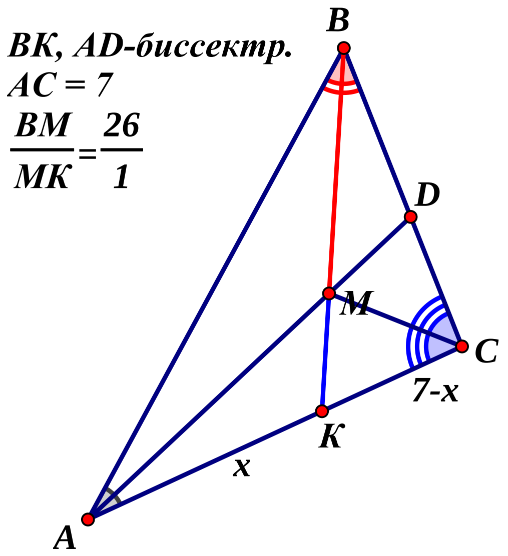
3) $S_{ABC} = \frac{1}{2} CB \cdot CA \cdot sinC = \frac{1}{2} 4y \cdot 2z \cdot sinC = 1;\ 4yz\ sinC = 1;\ yz = \frac{1}{4sinC}$,

4) $S_{B1CC1} = \frac{1}{2} CB1 \cdot CC1 \cdot sinC = \frac{1}{2} 3yz \cdot sinC = \frac{3}{8}$,

5) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot sinA = \frac{1}{2} 3x2z \cdot sinA = 1;\ 3xz\ sinA = 1;\ xz = \frac{1}{3sinA}$,

6) $S_{A1AC1} = \frac{1}{2} AA1 \cdot AC1 \cdot sinA = \frac{1}{2} xz \cdot sinA = \frac{1}{6}$, 7) $S_{A1B1C1} = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{8} + \frac{1}{6}\right) = \frac{7}{24}$. Ответ: $S_{A1B1C1} = \frac{7}{24}$.

№ 10. Одна из биссектрис треугольника делится точкой пересечения биссектрис в отношении 26:1, считая от вершины. Найдите периметр треугольника, если длина стороны треугольника, к которой проведена биссектриса, равна 7.



Решение.

1) Рассмотрим ΔАВК: АМ – биссектриса $\angle$ВАК $\Longrightarrow \frac{АК}{КМ} = \frac{АВ}{ВМ}$; $\frac{АК}{АВ} = \frac{КМ}{ВМ} = \frac{1}{26}$;

$\frac{АК}{АВ} = \frac{1}{26} \Longrightarrow$ Пусть $АК = x$, $АВ = 26АК \Longrightarrow АВ = 26x$.

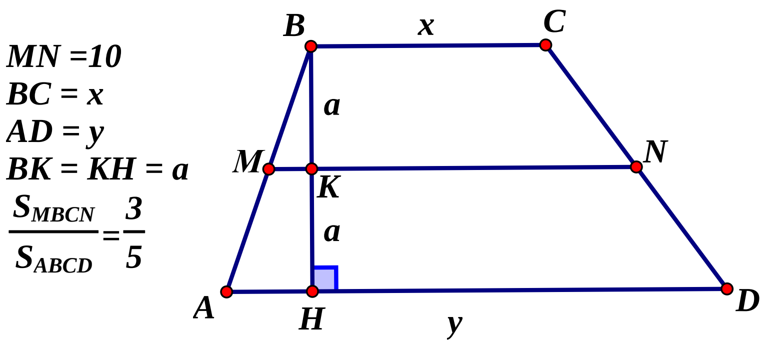
2) Рассмотрим ΔCВК: CМ – биссектриса $\angle$ВСК $\Longrightarrow \frac{CB}{BM} = \frac{CK}{KM}$; $\frac{CB}{CK} = \frac{BM}{KM} = \frac{26}{1}$;

$\frac{CB}{CK} = \frac{26}{1} \Longrightarrow CB = 26CK \Longrightarrow CB = 26(7 - x)$.

3) $P_{ABC} = AB + BC + CA = 26x + 26(7 - x) + 7 = 189.$

Ответ: $P_{ABC} = 189.$

№ 11. Средняя линия трапеции равна 10см и делит её площадь в отношении 3:5. Найдите длины оснований трапеции.



Решение.

1) $S_{MBCN} = \frac{BC + MN}{2} BK = \frac{x + 10}{2} a,$

2) $S_{AMND} = \frac{MN + AD}{2} KH = \frac{y + 10}{2} a,$

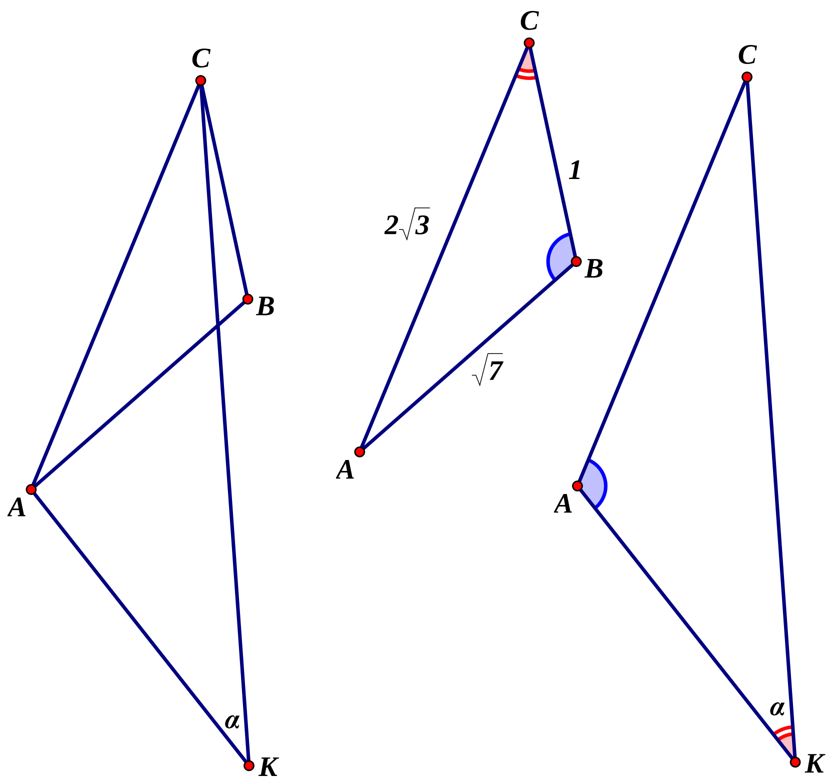
3) $\frac{S_{MBCN}}{S_{AMND}} = \left(\frac{x + 10}{2} a\right) : \left(\frac{y + 10}{2} a\right) = \frac{x + 10}{y + 10} = \frac{3}{5} \Longrightarrow 5x + 50 = 3y + 30$
$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow 3y - 5x = 20.$

4) MN – средняя линия трапеции $ABCD \Longrightarrow MN = \frac{BC + AD}{2} \Longrightarrow 10 = \frac{x + y}{2} \Longrightarrow x + y = 20.$

5) $\begin{cases} 3y-5x=20 \\ x+y=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20-y \\ 3y-5(20-y)=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=15 \\ x=5 \end{cases}$. Ответ: $AD=15$, $BC=5$.

№ 12. Стороны АС, АВ, ВС треугольника АВС равны $2\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$ и 1 соответственно. Точка К расположена вне треугольника АВС, причём отрезок КС пересекает сторону АВ в точке, отличной от В. Известно, что треугольник КАС подобен треугольнику АВС. Найдите косинус угла АКС, если угол КАС больше 90^0.



Решение.

1) $\text{AC}=2\sqrt{3}$ – большая сторона $\Delta\text{ABC} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \angle\text{ABC}$ – больший в ΔABC.

3) $\begin{cases} \Delta BCA \sim \Delta AKC \\ \angle\text{CAK} > 90^0\ (\Delta AKC) \\ \angle\text{ABC} \text{ – больший в } \Delta\text{ABC} \end{cases} \Longrightarrow \angle\text{ABC}=\angle\text{CAK}.$

4) $\angle ACB_{\Delta\text{ABC}} > \angle ACK_{\Delta AKC} \Longrightarrow \angle ACB_{\Delta\text{ABC}} = \angle AKC_{\Delta AKC} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow cos\angle AKC_{\Delta AKC} = cos\angle ACB_{\Delta\text{ABC}}$.

5) Рассмотрим ΔABC. По теореме косинусов имеем:

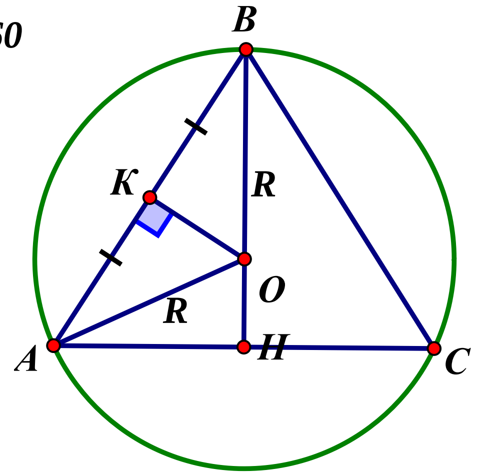
$AB^2=AC^2+CB^2-2AC\cdot CB\cdot cos\angle ACB \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow cos\angle ACB=\frac{AC^2+CB^2-AB^2}{2AC\cdot CB}=\frac{12+1-7}{2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 1}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $cos\angle AKC=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

№ 13. В равнобедренном треугольнике центр описанной окружности делит высоту треугольника в отношении 12:5. Найдите площадь этого треугольника, если длина боковой стороны равна 60 см.

$AB=BC=60$
$BH \perp AC$
$\frac{BO}{OH}=\frac{12}{5}$

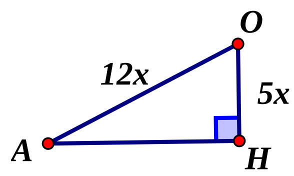


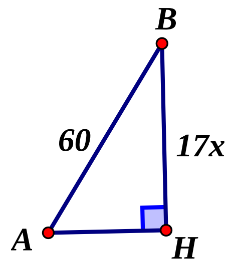
Решение.

1) $\frac{BO}{OH}=\frac{12}{5} \Longrightarrow BO=12x$ (OB = OA = $R=12x$), $OH=5x$ (xсм = 1часть),

2) $\left\{\begin{matrix} \text{О — центр описанной окр.} \\ \text{К — середина АВ} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$ ОК ⊥ АВ, и АК = КВ = 30,

3) Рассмотрим Δ АОН, ΔАВН — прямоугольные.





$AH^2=AO^2-OH^2=144x^2-25x^2=119x^2$ $\quad AH^2=AB^2-BH^2=3600-289x^2$

4) Получили уравнение:

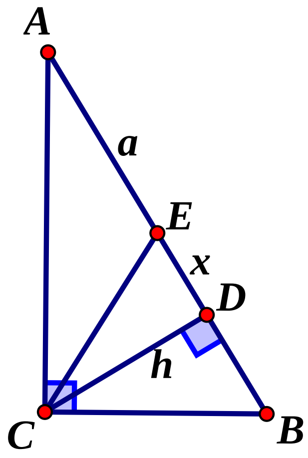
$$119x^2=3600-289x^2 \Longrightarrow 408x^2=3600 \Longrightarrow x=\sqrt{\frac{150}{17}}.$$

6) $AH=x\sqrt{119}=\sqrt{\frac{150}{17}}\sqrt{119}=\sqrt{150\cdot 7} \Longrightarrow AC=2AH=2\sqrt{150\cdot 7},$

$$BH=17x=17\sqrt{\frac{150}{17}}=\sqrt{150\cdot 17}, \qquad S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BH=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{150\cdot 7}\cdot\sqrt{150\cdot 17}=150\sqrt{119}.$$

Ответ: $S_{ABC}=150\sqrt{119}.$

№ 14. В прямоугольном треугольнике АВС ($\angle C=90^0$) проведены высота CDи медиана СЕ. Площади треугольников ABC и CDE равны соответственно 10см^2 и см^2. Найдите АВ.



Решение.

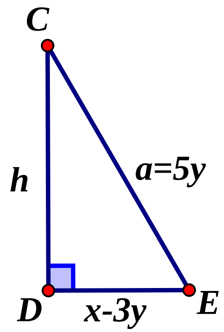
1) $\begin{cases} \Delta ABC - \text{прямоугольный} \\ CE - \text{медиана} \end{cases} \Longrightarrow$ $CE = AE = BE = a,$

2) $\begin{cases} \Delta ABC - \text{прямоугольный} \\ CE - \text{медиана} \end{cases} \Longrightarrow S_{CAE} = S_{CBE} = \frac{1}{2} AE \cdot CD = \frac{1}{2} h \cdot a = 5\text{см}^2.$

3) $S_{CDE} = \frac{1}{2} CD \cdot DE = \frac{1}{2} h \cdot x = 3\text{см}^2.$

4) $\frac{S_{CDE}}{S_{CBE}} = \frac{\frac{1}{2} h \cdot x}{\frac{1}{2} h \cdot a} = \frac{x}{a} = \frac{3}{5} \Longrightarrow DE = x = 3y, \qquad AE = BE = a = 5y \;\; (y \text{ см} = 1\text{часть}).$

5) Рассмотрим ΔCDE – прямоугольный.

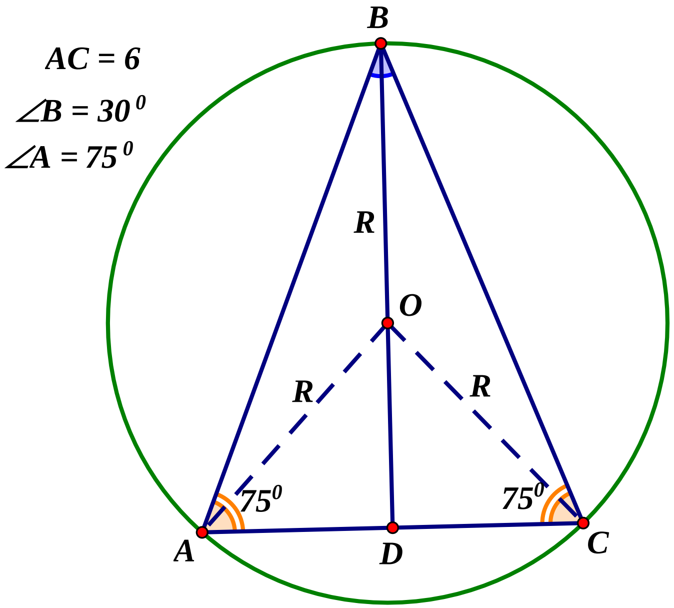


По теореме Пифагора имеем: $CD = \sqrt{CE^2 - DE^2} = \sqrt{25y^2 - 9y^2} = 4y.$

6) $S_{CDE} = \frac{1}{2} h \cdot x = \frac{1}{2} 4y \cdot 3y = 6y^2 = 3(\text{см}^2) \Longrightarrow y = \sqrt{\frac{1}{2}} \Longrightarrow AB = 2a = 10y = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}.$

Ответ: $AB = 5\sqrt{2}$ см.

№ 15. Треугольник ABC, у которого $AC = 6, \angle A = 75^0, \; \angle B = 30^0$ вписан в окружность. Найдите длины дуг окружности, концами которых являются вершины треугольника.



Решение.

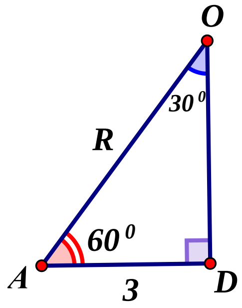
1) Рассмотрим ΔABC: $\angle BAC = 75^0, \angle ABC = 30^0 \Longrightarrow \angle ACB = 75^0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \Delta ABC$ − равнобедренный $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow BO \perp AC, BD$ − биссектриса ($\angle CBO = \angle ABO = 15^0$) и $AD = DC = 3$.

2) ΔABO − равнобедренный ($AO = AB = R$) $\Longrightarrow \angle BAO = \angle ABO = 15^0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \angle OAD = \angle BAD - \angle BAO = 75^0 - 15^0 = 60^0$.



3)Рассмотрим ΔAOD − прямоугольный.

$\angle A = 60^0 \Longrightarrow \angle O = 30^0 \Longrightarrow AO = 2AD = 6$, т. е. $R = 6$.

4) $L_{\text{окр}} = 2\pi R = 12\pi$.

5) $\angle ABC$ − вписанный, опирается на дугу AC $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \overset{\frown}{AC} = 2\angle ABC = 60^0 \Longrightarrow L_{\overset{\frown}{AC}} = \dfrac{L_{\text{окр}}}{360} 60 = \dfrac{12\pi}{6} = 2\pi$.

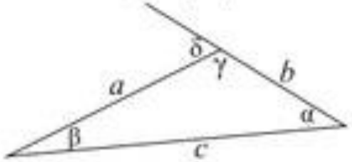
7) $\angle BAC = \angle ACB = 75^0 \Longrightarrow L_{\overset{\frown}{AB}} = L_{\overset{\frown}{BC}} = \frac{12\pi - 2\pi}{2} = 5\,\pi$.

Ответ: $L_{\overset{\frown}{AC}} = 2\pi,\ L_{\overset{\frown}{AB}} = L_{\overset{\frown}{BC}} = 5\,\pi$.

Элементы теории.

Произвольный треугольник

$c > b \Leftrightarrow \gamma > \beta$



Сумма углов треугольника

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Внешний угол треугольника

$\delta = \alpha + \beta$

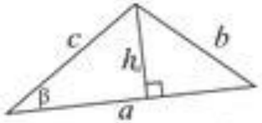
Теорема косинусов

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

Теорема синусов

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

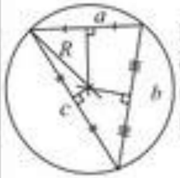
(где R - радиус описанной окружности)



$S = \frac{1}{2} a h_a \quad S = \frac{1}{2} ac\sin\beta$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

где полупериметр $p = \frac{a+b+c}{2}$



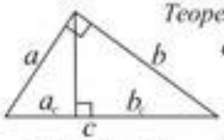
Центр описанной окружности - точка пересечения серединных перпендикуляров

$R = \frac{abc}{4S}$

Центр вписанной окружности - точка пересечения биссектрис

$r = \frac{2S}{a+b+c}$

Прямоугольный треугольник



Теорема Пифагора

$c^2 = a^2 + b^2$

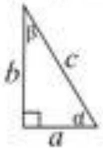
$S = \frac{ab}{2}$

$h = \frac{ab}{c} = \sqrt{a_c b_c} \quad a = \sqrt{a_c c} \quad b = \sqrt{b_c c}$

$\sin\alpha = \frac{b}{c} \quad \cos\alpha = \frac{a}{c}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b}{a} \quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{a}{b}$

Если $\beta = 30°$, *то* $c = 2a$

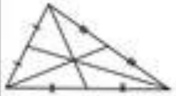


Радиус вписанной окружности:

$r = \frac{ab}{a+b+c} \qquad r = \frac{a+b-c}{2}$

Радиус описанной окружности: $R = \frac{c}{2}$

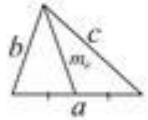
Свойства медиан, биссектрис и высот:



Медианы пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в соотношении 2:1 считая от вершины.

Длина медианы

$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$

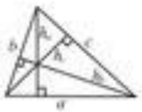


$\frac{b_1}{c_1} = \frac{b}{c}$

Длина биссектрисы

$l_a = \sqrt{bc - b_1 c_1}$

$l_a = \frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}$



$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$

$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$

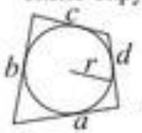
где r - радиус вписанной окружности

Четырёхугольники

Произвольный четырёхугольник

$S = \frac{d_1 d_2 \sin\varphi}{2}$

Четырёхугольник, описанный около окружности



$a + c = b + d$

$S = pr$

где $p = \frac{a+b+c+d}{2}$

Четырёхугольник, вписанный в окружность

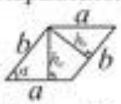
$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

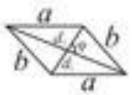
где $p = \frac{a+b+c+d}{2}$

Теорема Птолемея

$ac + bd = d_1 d_2$

Параллелограмм





$S = a h_a = b h_b \quad d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$

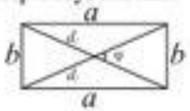
$S = ab\sin\alpha \quad S = \frac{d_1 d_2 \sin\varphi}{2}$

Ромб

$r = \frac{h}{2} = \frac{d_1 d_2}{4a} \quad S = \frac{d_1 d_2}{2}$

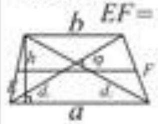
$S = ah = 2ar = a^2\sin\alpha$

Прямоугольник



$S = ab = \frac{d^2\sin\varphi}{2}$

Трапеция



$EF = \frac{a+b}{2} \quad S = \frac{d_1 d_2 \sin\varphi}{2}$

$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = EF \cdot h$

Окружность

Длина окружности $C = 2\pi R$

Площадь круга $S = \pi R^2$

Площадь кругового сектора $S = \frac{\pi R^2}{360°} \cdot n°$

длина дуги $l = \frac{\pi R}{180°} \cdot n°$

(n° - градусная мера центрального угла)

Площадь кругового сегмента

$S = \frac{\pi R^2}{360°} \cdot n° \pm \frac{1}{2} R^2 \sin n°$

знак «+», если $180° < n° < 360°$,

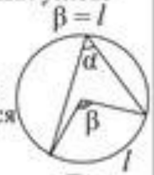
знак «-», если $0° < n° < 180°$

(n° - градусная мера центрального угла)

Свойства центральных и вписанных углов:

1. Центральный угол равен дуге, на которую он опирается.
2. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу, т.е. половине дуги, на которую он опирается.

$\beta = l$



$\alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} l$

3. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

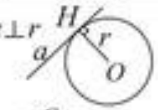
4. Вписанные углы, опирающиеся на диаметр, прямые.

Правильные многоугольники

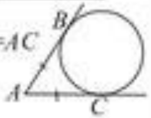
	r	R	S
Треугольник	$\frac{a}{2\sqrt{3}}$	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
Квадрат	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	a^2
Шестиугольник	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	a	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$
n-угольник	$\frac{a}{2\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}}$	$\frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}$	$\frac{a^2 n}{4\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}}$

$ab = cd$

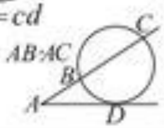
$a \perp r$

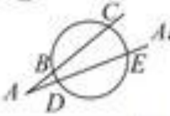


$AB = AC$



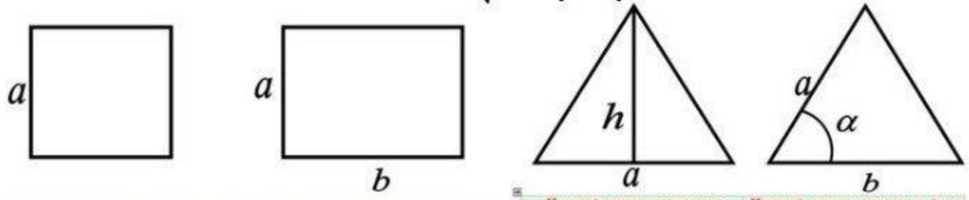
$AD^2 = AB \cdot AC$





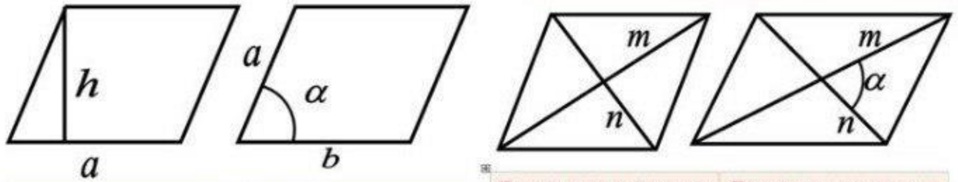
$AD \cdot AE = AB \cdot AC$

ПЛОЩАДИ



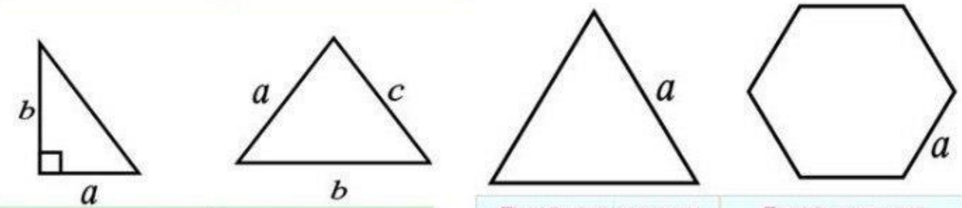
Площадь квадрата	Площадь прямоугольника
$S = a^2$	$S = a \cdot b$

Площадь треугольника по основанию и высоте	Площадь треугольника по двум сторонам и углу между ними
$S = \frac{1}{2} a \cdot h$	$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\alpha$



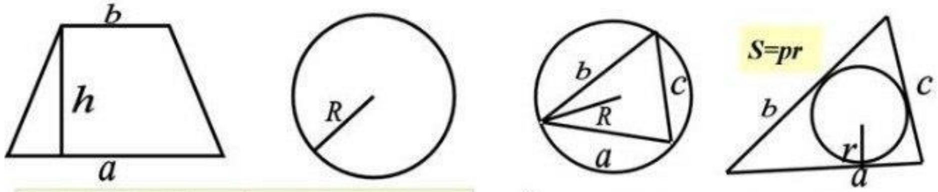
Площадь параллелограмма по основанию и высоте	Площадь параллелограмма по двум сторонам и углу между ними
$S = a \cdot h$	$S = a \cdot b \cdot \sin\alpha$

Площадь ромба по диагоналям	Площадь параллелограмма по диагоналям
$S = \frac{1}{2} m \cdot n$	$S = \frac{1}{2} m \cdot n \cdot \sin\alpha$



Площадь прямоугольного треугольника по катетам	Площадь треугольника по трем сторонам (формула Герона)
$S = \frac{1}{2} a \cdot b$	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $p = \frac{a+b+c}{2}$

Площадь равностороннего треугольника	Площадь правильного шестиугольника
$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

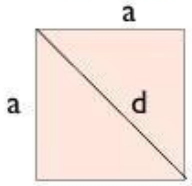


Площадь трапеции	Площадь круга
$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$	$S = \pi R^2$ Длина окружности $C = 2\pi R \quad C = \pi d$

Радиус описанной окружности	Радиус вписанной окружности
$R = \frac{abc}{4S}$	$r = \frac{2S}{a+b+c}$

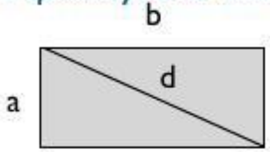
Формулы для нахождения площадей фигур

Квадрат



$$S = a^2, \quad S = \frac{d^2}{2}$$

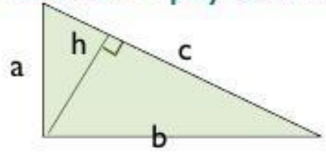
Прямоугольник



$$S = ab \ , \quad S = \frac{1}{2}d^2 Sin\varphi$$

где φ- угол между диагоналями

Прямоугольный треугольник

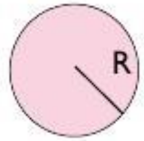


$$S = \frac{1}{2}ab \ , \quad S = \frac{1}{2}ch_c$$

$$S = pr$$

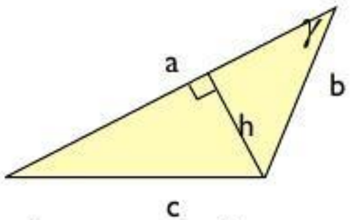
где r - радиус впис. окружности

Круг



$$S = \pi R^2$$

Треугольник



$$S = \frac{1}{2}ah_a, \quad S = \frac{1}{2}abSin\gamma,$$

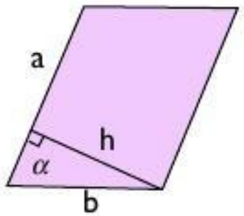
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где p - полупериметр

$$S = \frac{abc}{4R}, \quad S = pr$$

где R - радиус опис. окружности,
r - радиус впис. окружности

Параллелограмм

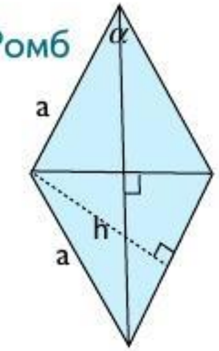


$$S = ah_a, \quad S = abSin\alpha,$$

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 Sin\varphi$$

где φ- угол между диагоналями $d_1, \ d_2$

Ромб



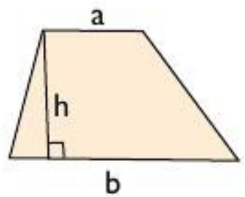
$$S = ah \ , \quad S = a^2 Sin\alpha,$$

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2$$

$$S = pr$$

где r - радиус впис. окружности

Трапеция



$$S = \frac{a+b}{2}h$$

$$S = pr$$

где r - радиус впис. окружности,
если таковая есть