

# Задачи на концентрацию, смеси, сплавы

# Введение

Можно - при всей условности такого деления - выделить следующие основные группы задач по выполнению задания №21:

- ▶ арифметические (вычислительные) задачи с текстовым условием;
- ▶ задачи на проценты и доли;
- ▶ задачи на концентрацию, сплавы, смеси;
- ▶ задачи на движение;
- ▶ задачи на производительность

# Задачи на проценты, части, доли

- ▶ Так как процент - это сотая часть числа, для того чтобы найти  $k\%$  от числа  $a$ , достаточно умножить число  $a$  на  $k$  сотых. Получим  $\frac{k}{100} * a$ .
- ▶ Если товар стоил  $a$  рублей, а потом его цена выросла, например, на 3,15 или 27%, это означает, что для нахождения новой цены нужно число  $a$  увеличить соответственно на 3,15 или 27 сотых. Получим  $1,03a$ ;  $1,15a$ ;  $1,27a$  соответственно.
- ▶ Если же цена уменьшилась на 3,15 или 27%, это означает, что для нахождения новой цены нужно число  $a$  уменьшить соответственно на 3,15 или 27 сотых. Получим  $0,97a$ ;  $0,85a$ ;  $0,73a$  соответственно.

**Пример 1. Найдите 25% от 92 килограммов.  
Ответ дайте в килограммах**

- ▶ **Решение.** 25% данной величины - это 25 сотых этой величины. Поэтому 25% от 92 килограммов - это  $0,25 * 92 = \frac{1}{4} * 92 = 23$  кг.
- ▶ **Ответ:** 23.

«Если  $a$  дороже  $b$  на 25%, на сколько процентов  $b$  дешевле  $a$ ?»

- Кажется, ответ очевиден: на 25%. Но это не так. В самом деле,  $a = 1,25 * b = \frac{5}{4} b$ , значит,  $b = \frac{4}{5} * a = 0,8a$ , т. е.  $b$  меньше  $a$  на две десятых или на двадцать сотых, Таким образом,  $b$  дешевле  $a$  на 20%.

В городе два магазина. В первом висит объявление о снижении цен на 60%, во втором - о снижении цен в 2,5 раза. Спрашивается, в какой магазин пойти покупателю, если цены в обоих магазинах до снижения были одинаковыми

- Большинство почему-то выбирает второй магазин, хотя ответ здесь: «В ближайший к дому». И действительно, уменьшение величины  $a$  на 60% даёт  $0,4a$ . Но уменьшение величины  $a$  в 2,5 раза приводит к тому же результату: получаем  $\frac{a}{2,5} = \frac{a}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}a = 0,4a$ .

**Пример 2.** Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Семён Петрович получил 13 920 р. Сколько рублей составляет заработная плата Семёна Петровича?

- ▶ **Решение.** Обозначим заработную плату Семёна Петровича буквой  $З$ , а его получку после удержания налога буквой  $П$ . Налог составляет 13%, поэтому  $П$  меньше  $З$  на 13 сотых, т. е.  $П = 0,87 * З$ .

По условию  $П = 13\ 920$ . Значит,  $0,87 * З = 13\ 920$ , откуда  $З = \frac{13\ 920}{0,87} = 16\ 000$  р.

- ▶ **Ответ:** 16 000.

**Пример 3.** В феврале товар стоил 10 000 р. В мае цену на товар подняли на 8%, а в августе снизили на 9%. Сколько рублей стоил товар после снижения цены в августе?

- ▶ **Решение.** Стоимость товара в мае увеличилась на 8 сотых, т. е. составила  $1,08 * 10\,000 = 10\,800$  р. Полученная стоимость уменьшилась в августе на 9 сотых, т. е. составила  $0,91 * 10\,800 = 9828$  р.
- ▶ **Ответ:** 9828.



**Пример 4.** Пять рубашек дешевле куртки на 25%. На сколько процентов семь рубашек дороже куртки?

► **Решение.** Обозначим через  $P$  стоимость одной рубашки, через  $K$  - стоимость куртки.

Из условия задачи следует, что  $5P = 0,75K$ , откуда  $P = \frac{0,75K}{5} = 0,15K$ . Следовательно,  $7P = 0,15K * 7 = 1,05K$ . Значит, стоимость семи рубашек больше стоимости куртки на 5 сотых, т. е. семь рубашек дороже куртки на 5%.

► **Ответ:** 5.

**Пример 5.** В июне 1 кг огурцов стоил 50 р. В июле огурцы подешевели на 20%, а в августе еще на 50%. Сколько рублей стоил 1 кг огурцов после снижения цены в августе?

- ▶ **Решение.** Стоимость товара в июле уменьшилась на 20 сотых, т. е. составила  $0,8 * 50 = 40$  р.
- ▶ Полученная стоимость уменьшилась в августе на 50 сотых, т. е. составила  $0,50 * 40 = 20$  р.
- ▶ **Ответ:** 20 р.

# Задачи на концентрацию, смеси, сплавы

# Теоретические основы решения задач на смеси и сплавы

Это различные определения, такие как концентрация, процентное содержание и др., а также и всевозможные допущения, например:

- ▶ 1) всё, что мы рассматриваем, считается однородным;
- ▶ 2) все процессы происходят мгновенно;
- ▶ 3) полученное вещество состоит из смешиваемых веществ и равно сумме их объемов;
- ▶ 4) величины, получаемые в результате вычислений, не могут быть со знаком минус.

# Теоретические основы решения задач на смеси и сплавы

- ▶ В задачах на смеси и сплавы важно уметь определять концентрацию и массу вещества.
- ▶ Концентрация вещества - это отношение массы или объема вещества к массе или объему всего раствора. Как правило, концентрация выражается в процентах.
- ▶ Масса раствора равна сумме масс всех составляющих.
- ▶ Алгоритм решения задач на смеси и сплавы:
- ▶ Определить, какое вещество влияет на концентрацию раствора («чистое» вещество).
- ▶ Следить за весом «чистого» вещества при добавлении других веществ в раствор.
- ▶ Исходя из данных об изменениях состояния «чистого» вещества - сделать выводы.

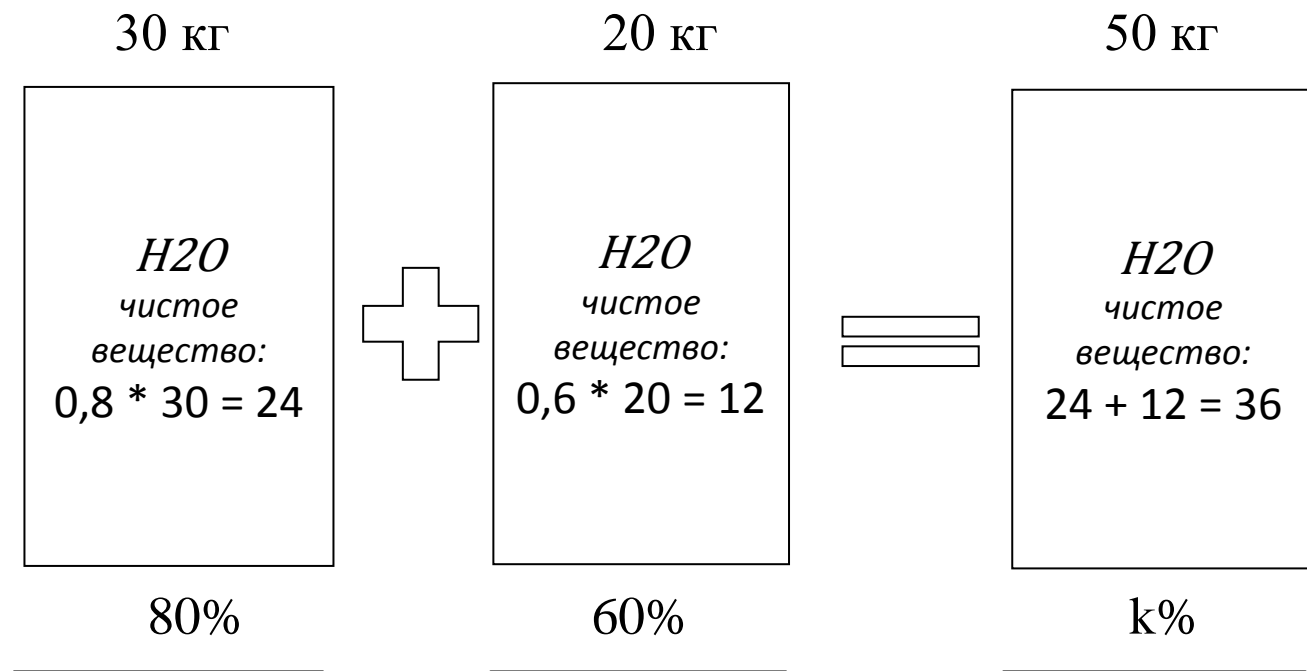
## Теоретические основы решения задач на смеси и сплавы

- ▶ Если мы смешаем 3 литра яблочного сока с 10% мякоти (0,3 л), и 5 литров яблочного сока с 5% мякоти (0,25 л), то получим 8 литров сока с содержанием 0,55 л мякоти

## Метод «прямоугольников»

- ▶ Название появилось потому, что указанные в задаче вещества изображаются в виде прямоугольников, каждая из которых делится на две части - верхнюю и нижнюю. В нижней записывается количество чистого или сухого вещества для каждого прямоугольника, что позволяет почти автоматически получить нужное уравнение или даже ответ. Проиллюстрируем метод прямоугольников несколькими задачами.

Задача 1. Найдите концентрацию кислоты, полученной при смешивании 30 кг её 80-процентного и 20 кг её 60-процентного растворов. Ответ выразите в процентах.



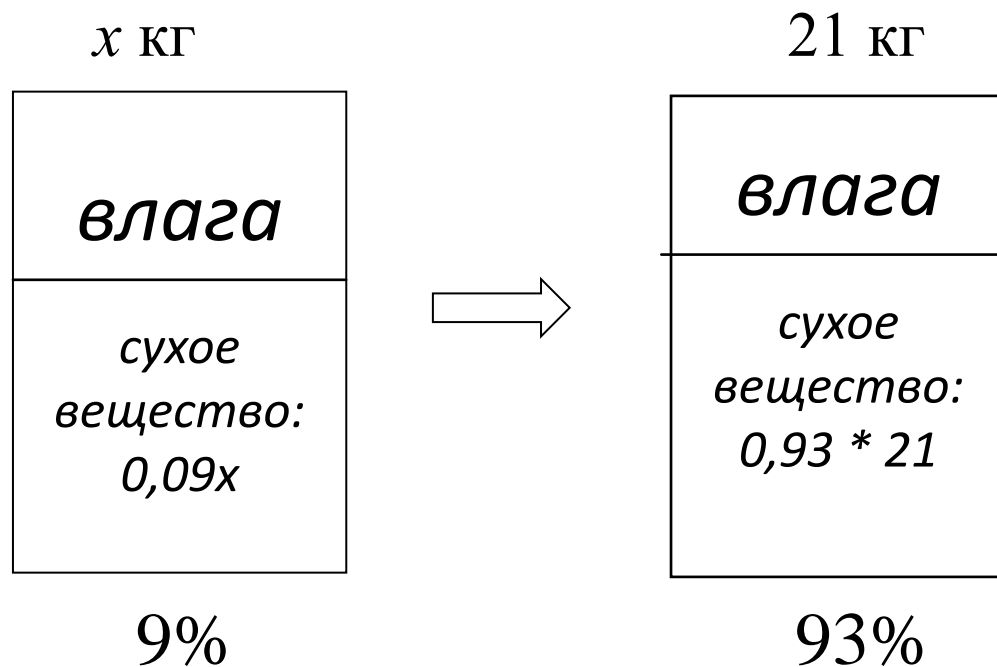


Искомая концентрация  $k = \frac{36}{50} * 100\% = 36 * 2\% = 72\%$ .

В данном случае можно было бы не использовать формулу: ведь если в 50 кг раствора содержится 36 кг чистой кислоты, то в 100 кг этого раствора будет ровно 72 кг чистой кислоты, т. е. 72 сотых от 100, а значит, искомая концентрация равна 72%.

**Ответ: 72.**

**Задача 2.** Виноград содержит 91% влаги, а изюм - 7%. Сколько килограммов винограда требуется для получения 21 кг изюма?



Поскольку масса сухого вещества винограда равна массе сухого вещества в 21 кг изюма, то по условию задачи можно составить уравнение:

$$0,09x = 0,93 * 21$$

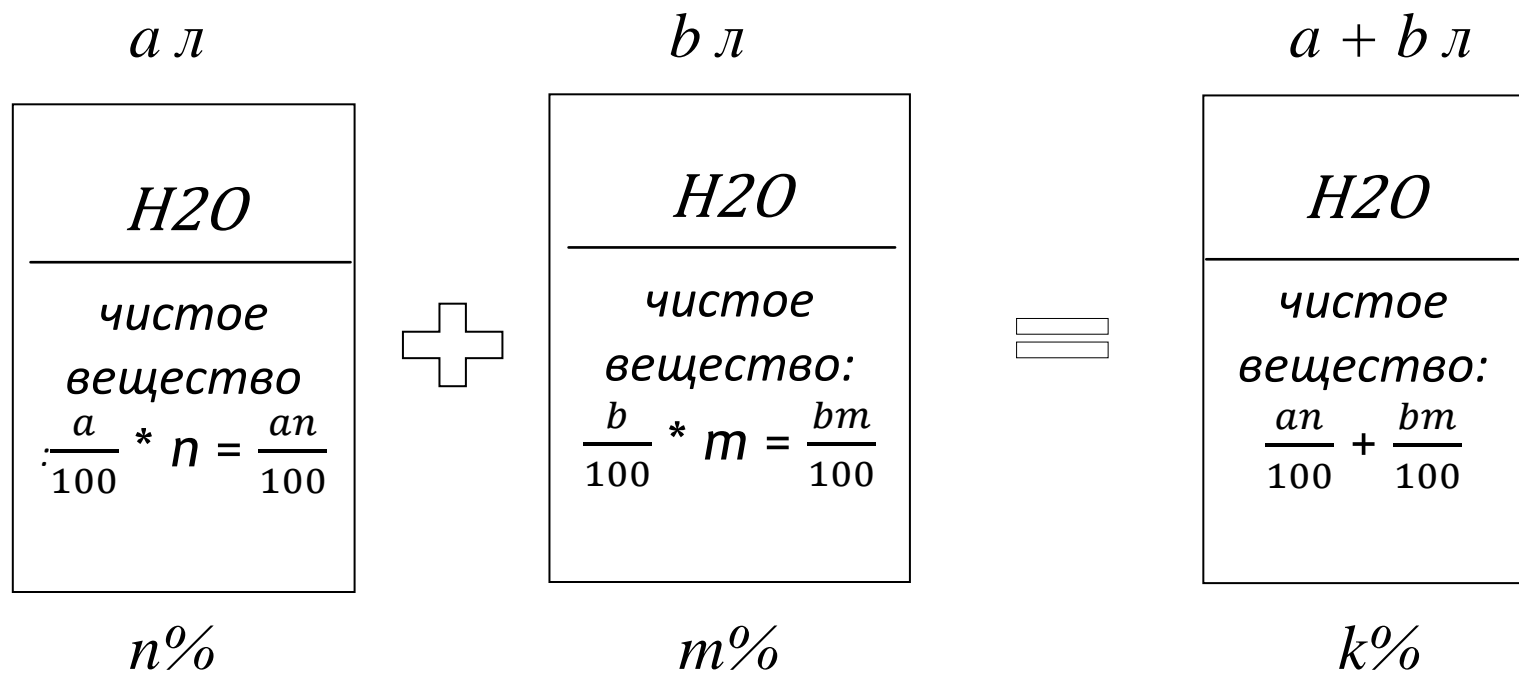
$$9x = 93 * 21$$

$$x = 217$$

**Ответ:** 217 (кг)

**Задача 3.** Смешали  $a$  литров  $n$ -процентного водного раствора некоторого вещества с  $b$  литрами  $m$ -процентного водного раствора этого же вещества. Найдите концентрацию получившейся смеси. Ответ выразите в процентах.

- В первом растворе было  $\frac{a}{100} * n = \frac{an}{100}$  л, во втором растворе -  $\frac{b}{100} * m = \frac{bm}{100}$  л. Значит, количество чистого вещества в полученной смеси будет равно  $\frac{an}{100} + \frac{bm}{100}$  л, а всего этой смеси получится  $(a + b)$  л.



Теперь найти искомую концентрацию  $k$  не представляет труда:

$$k = \frac{\frac{an}{100} + \frac{bm}{100}}{a+b} * 100\% = \frac{an+bm}{a+b} \%$$

**Ответ:**  $\frac{an+bm}{a+b}$ .

**Задача 4.** Смешали некоторое количество 15-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 19-процентного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

- Проследим за изменениями, происходящими с чистым веществом. В первом растворе было  $\frac{a}{100} * 15 = \frac{15a}{100}$  л, во втором растворе -  $\frac{a}{100} * 19 = \frac{19a}{100}$  л. Значит, количество чистого вещества в полученной смеси будет равно  $\frac{15a}{100} + \frac{19a}{100}$  л, а всего этой смеси получится  $(a + a)$  л.

$a$ л		$a$ л		$(a + a)$ л
$H_2O$		$H_2O$		$H_2O$
<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: space-around;"> <div style="border-top: 1px solid black; padding-top: 5px;"> <p style="text-align: center;">чистое вещество</p> <math display="block">: \frac{a}{100} * 15</math> <math display="block">= \frac{15a}{100}</math> </div> <div style="font-size: 2em;">+</div> <div style="border-top: 1px solid black; padding-top: 5px;"> <p style="text-align: center;">чистое вещество</p> <math display="block">: \frac{a}{100} * 19</math> <math display="block">= \frac{19a}{100}</math> </div> <div style="font-size: 2em;">=</div> <div style="border-top: 1px solid black; padding-top: 5px;"> <p style="text-align: center;">чистое вещество:</p> <math display="block">\frac{15a}{100} + \frac{19a}{100}</math> </div> </div>				
$15\%$		$19\%$		$k\%$

Теперь найти искомую концентрацию  $k$  не представляет труда:

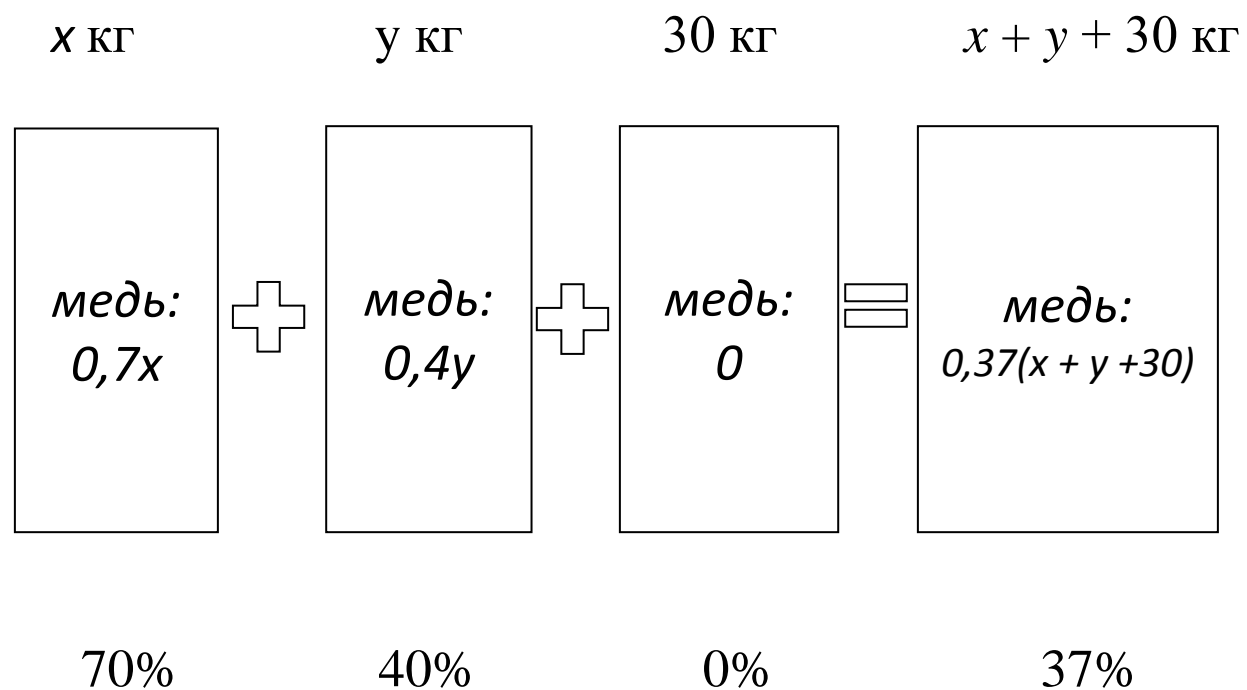
$$k = \frac{\frac{15a}{100} + \frac{19a}{100}}{a+a} * 100\% = \frac{15a+19a}{a+a} \% = \frac{34}{2} \% = 17\%$$

**Ответ: 17%**

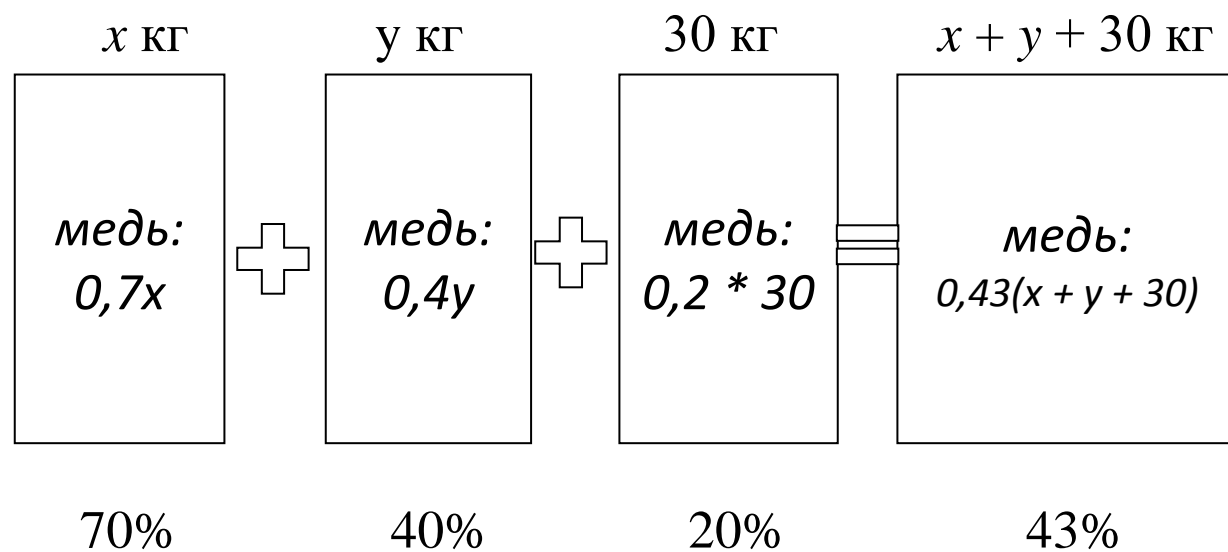
**Задача 5.** Первый сплав содержит 70% меди, второй – 40% меди. Из этих двух сплавов и 30 кг третьего сплава, не содержащего меди, получили сплав, в котором меди оказалось 37%. Если бы к первым двум сплавам вместо третьего сплава добавили 30-килограммовый сплав, содержащий 20% меди, то получили бы сплав, в котором меди было бы 43%. Найти массу первого сплава. Ответ выразить в килограммах.



Тогда для первого случая получим следующую схему:



Для второго случая схема выглядит так:



Приведённые схемы позволяют сразу получить систему двух линейных уравнений для определения неизвестных  $x$  и  $y$ :

$$\begin{cases} 0,7x + 0,4y = 0,37(x + y + 30) \\ 0,7x + 0,4y + 6 = 0,43(x + y + 30). \end{cases}$$

$$\begin{cases} 70x + 40y = 37(x + y + 30) \\ 70x + 40y + 600 = 43(x + y + 30). \end{cases}$$

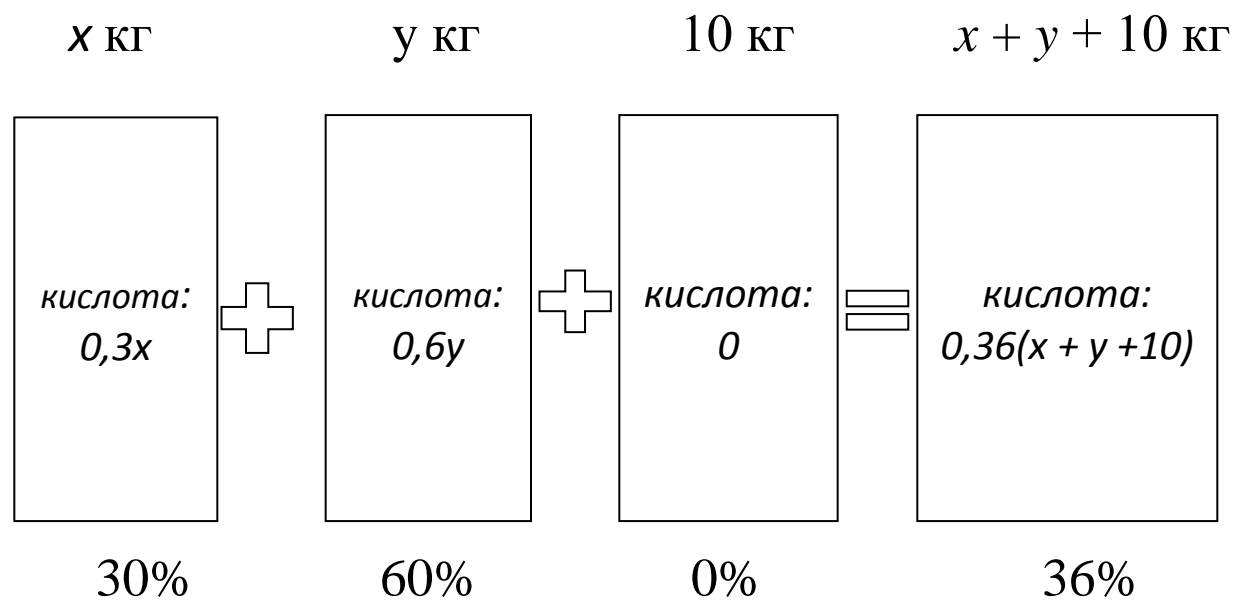
$$\begin{cases} 33x + 3y = 1110 \\ 27x - 3y = 690. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11x + y = 370 \\ 9x - y = 230. \end{cases}$$

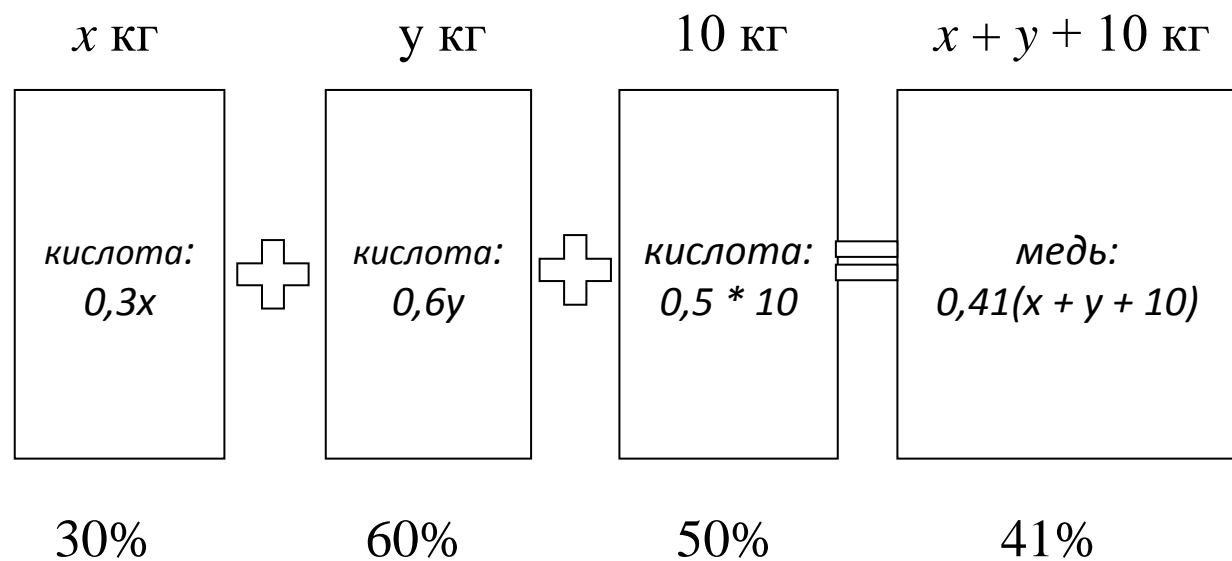
Обратим внимание на то, что значение  $y$  в данной задаче находить необязательно. Сложим уравнения почленно:  $20x = 600$ , откуда  
 $x = 30$ .

**Задача 6.** Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

Тогда для первого случая получим следующую схему:



Для второго случая схема выглядит так:



Приведённые схемы позволяют сразу получить систему двух линейных уравнений для определения неизвестных  $x$  и  $y$ :

$$\begin{cases} 0,3x + 0,6y = 0,36(x + y + 10) \\ 0,3x + 0,6y + 5 = 0,41(x + y + 10). \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30x + 60y = 36(x + y + 10) \\ 30x + 60y + 500 = 41(x + y + 10). \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x + 24y = 360 \\ 11x - 19y = 90. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 4y = -60 \\ 11x - 19y = 90. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -19x + 76y = 1140 \\ 44x - 76y = 360. \end{cases}$$

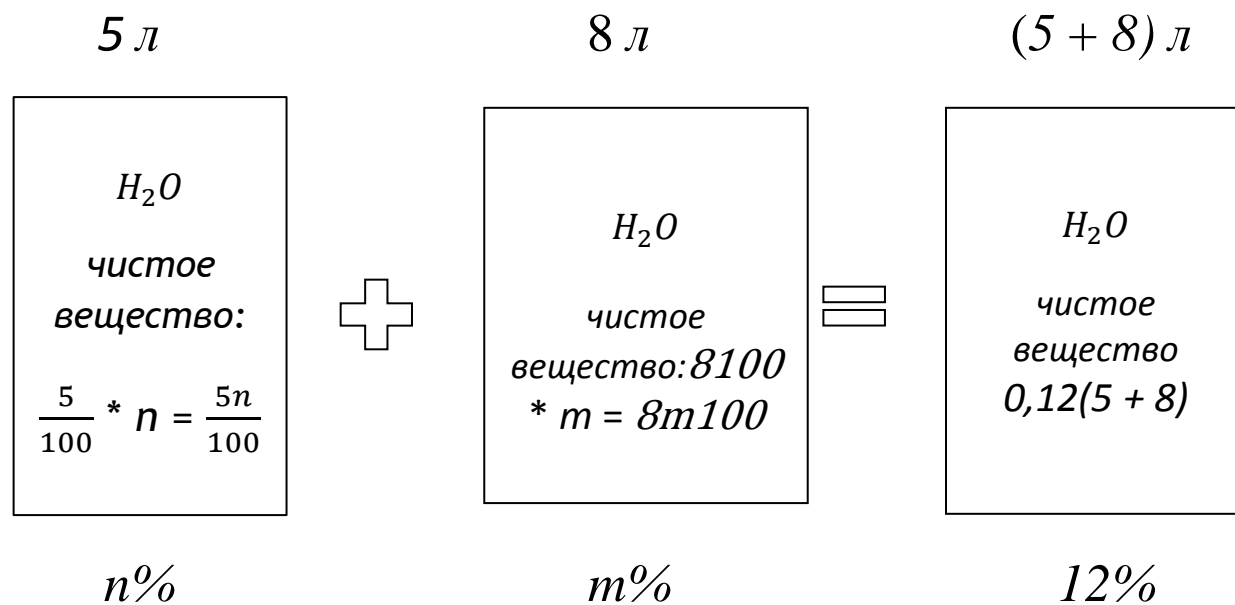
Сложим уравнения почленно:  $-19x + 44x = 1140 + 360$ , откуда  
 $25x = 1500$ ,  
 $x = 60$

**Ответ:** 60кг

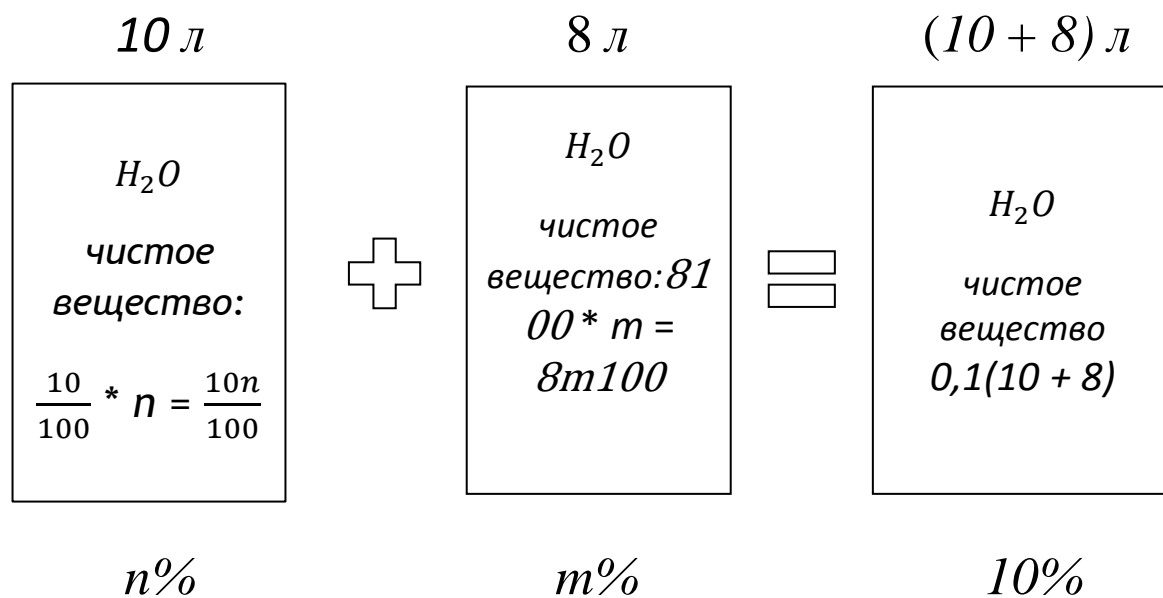
**Задача 7.** В первой банке объемом 5 литров находится раствор некоторого вещества. Во второй банке объемом 8 литров находится другой раствор того же вещества. Если слить вместе обе банки, то в получившемся растворе концентрация вещества будет 12%. Если бы в первой банке было 10 литров такого же раствора что был в ней изначально, а во второй банке ничего не изменилось, то в результате получился бы раствор с концентрацией 10%. Найдите концентрацию вещества во второй банке. Ответ дайте в процентах.



Тогда для первого случая получим следующую схему:



Для второго случая схема выглядит так:



$$\begin{cases} 0,05n + 0,08m = 0,12(8 + 5) \\ 0,1n + 0,08m = 0,1(8 + 10). \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5n + 8m = 12(8 + 5) \\ 10n + 8m = 10(8 + 10). \end{cases} \quad \begin{cases} 5n + 8m = 156 \\ 10n + 8m = 180 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10n - 16m = -312 \\ 10n + 8m = 180 \end{cases}$$

Обратим внимание на вопрос задачи: найдите концентрацию вещества во второй банке. А это значит, что значение  $n$  в данной задаче находить необязательно.

Сложим уравнения почленно:  $-16m + 8m = -312 + 180$ , откуда

$$-8m = -132,$$

$$m = 16,5$$

**Ответ:** 16,5%

## Адреса сайтов для подготовки к ОГЭ по МАТЕМАТИКЕ

Федеральный институт педагогических измерений «ФИПИ»:

<https://fipi.ru>

«ФИПИ» Открытый банк заданий ГИА-9 / Математика:

<http://oge.fipi.ru/os/xmodules/qprint/index.php?proj=DE0E276E497AB3784C3FC4CC20248DC0>

СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Математика»: <https://oge.sdangia.ru/>

СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ. Каталог заданий по типам по темам:  
[https://oge.sdangia.ru/prob\\_catalog](https://oge.sdangia.ru/prob_catalog)

Подготовка к ЕГЭ и ОГЭ по математике: <https://math100.ru/>

ОГЭ Математика 2022. Открытый банк заданий с ответами:  
<https://math100.ru/ogenew/>

ОГЭ 2022 по математике: онлайн подготовка:  
[https://examer.ru/oge\\_po\\_matematike/2022/](https://examer.ru/oge_po_matematike/2022/)

Если вы хотите научиться плавать, то смело входите  
в воду, а если хотите научиться решать задачи, то  
решайте их!

(Д. Пойа)