

Задачи на концентрацию,  
смеси, сплавы

# Введение

Можно - при всей условности такого деления - выделить следующие основные группы задач по выполнению задания №21:

- ▶ арифметические (вычислительные) задачи с текстовым условием;
- ▶ задачи на проценты и доли;
- ▶ задачи на концентрацию, сплавы, смеси;
- ▶ задачи на движение;
- ▶ задачи на производительность

# Задачи на проценты, части, доли

- ▶ Так как процент - это сотая часть числа, для того чтобы найти  $k\%$  от числа  $a$ , достаточно умножить число  $a$  на  $k$  сотых. Получим  $\frac{k}{100} \cdot a$ .
- ▶ Если товар стоил  $a$  рублей, а потом его цена выросла, например, на 3,15 или 27%, это означает, что для нахождения новой цены нужно число  $a$  увеличить соответственно на 3,15 или 27 сотых. Получим  $1,03a$ ;  $1,15a$ ;  $1,27a$  соответственно.
- ▶ Если же цена уменьшилась на 3,15 или 27%, это означает, что для нахождения новой цены нужно число  $a$  уменьшить соответственно на 3,15 или 27 сотых. Получим  $0,97a$ ;  $0,85a$ ;  $0,73a$  соответственно.

Пример 1. Найдите 25% от 92 килограммов.

Ответ дайте в килограммах

- ▶ **Решение.** 25% данной величины - это 25 сотых этой величины. Поэтому 25% от 92 килограммов - это  $0,25 * 92 = \frac{1}{4} * 92 = 23$  кг.
- ▶ **Ответ:** 23.

«Если  $a$  дороже  $b$  на 25%, на сколько процентов  $b$  дешевле  $a$ ?»

► Кажется, ответ очевиден: на 25%. Но это не так. В самом деле,  $a = 1,25 * b = \frac{5}{4} b$ , значит,  $b = \frac{4}{5} * a = 0,8a$ , т. е.  $b$  меньше  $a$  на две десятых или на двадцать сотых, Таким образом,  $b$  дешевле  $a$  на 20%.

В городе два магазина. В первом висит объявление о снижении цен на 60%, во втором - о снижении цен в 2,5 раза. Спрашивается, в какой магазин пойти покупателю, если цены в обоих магазинах до снижения были одинаковыми

- ▶ Большинство почему-то выбирает второй магазин, хотя ответ здесь: «В ближайший к дому». И действительно, уменьшение величины  $a$  на 60% даёт  $0,4a$ . Но уменьшение величины  $a$  в 2,5 раза приводит к тому же результату: получаем  $\frac{a}{2,5} = \frac{a}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}a = 0,4a$ .

Пример 2. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Семён Петрович получил 13 920 р. Сколько рублей составляет заработка Семёна Петровича?

► **Решение.** Обозначим заработную плату Семёна Петровича буквой  $З$ , а его получку после удержания налога буквой  $П$ . Налог составляет 13%, поэтому  $П$  меньше  $З$  на 13 сотых, т. е.  $П = 0,87 * З$ .

По условию  $П = 13\ 920$ . Значит,  $0,87 * З = 13\ 920$ , откуда  $З = \frac{13\ 920}{0,87} = 16\ 000$  р.

► **Ответ:** 16 000.

**Пример 3.** В феврале товар стоил 10 000 р. В мае цену на товар подняли на 8%, а в августе снизили на 9%. Сколько рублей стоил товар после снижения цены в августе?

- **Решение.** Стоимость товара в мае увеличилась на 8 сотых, т. е. составила  $1,08 * 10\ 000 = 10\ 800$  р. Полученная стоимость уменьшилась в августе на 9 сотых, т. е. составила  $0,91 * 10\ 800 = 9828$  р.
- **Ответ:** 9828.

Пример 4. Пять рубашек дешевле куртки на 25%. На сколько процентов семь рубашек дороже куртки?

► **Решение.** Обозначим через  $P$  стоимость одной рубашки, через  $K$  - стоимость куртки.

Из условия задачи следует, что  $5P = 0,75K$ , откуда  $P = \frac{0,75K}{5} = 0,15K$ . Следовательно,  $7P = 0,15K * 7 = 1,05K$ . Значит, стоимость семи рубашек больше стоимости куртки на 5 сотых, т. е. семь рубашек дороже куртки на 5%.

► **Ответ:** 5.

Пример 5. В июне 1 кг огурцов стоил 50 р. В июле огурцы подешевели на 20%, а в августе еще на 50%. Сколько рублей стоил 1 кг огурцов после снижения цены в августе?

- ▶ Решение. Стоимость товара в июле уменьшилась на 20 сотых, т. е. составила  $0,8 * 50 = 40$  р.
- ▶ Полученная стоимость уменьшилась в августе на 50 сотых, т. е. составила  $0,50 * 40 = 20$  р.
- ▶ Ответ: 20 р.

Задачи на концентрацию,  
смеси, сплавы

# Теоретические основы решения задач на смеси и сплавы

Это различные определения, такие как концентрация, процентное содержание и др., а также и всевозможные допущения, например:

- ▶ 1) всё, что мы рассматриваем, считается однородным;
- ▶ 2) все процессы происходят мгновенно;
- ▶ 3) полученное вещество состоит из смешиаемых веществ и равно сумме их объемов;
- ▶ 4) величины, получаемые в результате вычислений, не могут быть со знаком минус.

# Теоретические основы решения задач на смеси и сплавы

- ▶ В задачах на смеси и сплавы важно уметь определять концентрацию и массу вещества.
- ▶ Концентрация вещества - это отношение массы или объема вещества к массе или объему всего раствора. Как правило, концентрация выражается в процентах.
- ▶ Масса раствора равна сумме масс всех составляющих.
- ▶ Алгоритм решения задач на смеси и сплавы:
- ▶ Определить, какое вещество влияет на концентрацию раствора («чистое» вещество).
- ▶ Следить за весом «чистого» вещества при добавлении других веществ в раствор.
- ▶ Исходя из данных об изменениях состояния «чистого» вещества - сделать выводы.

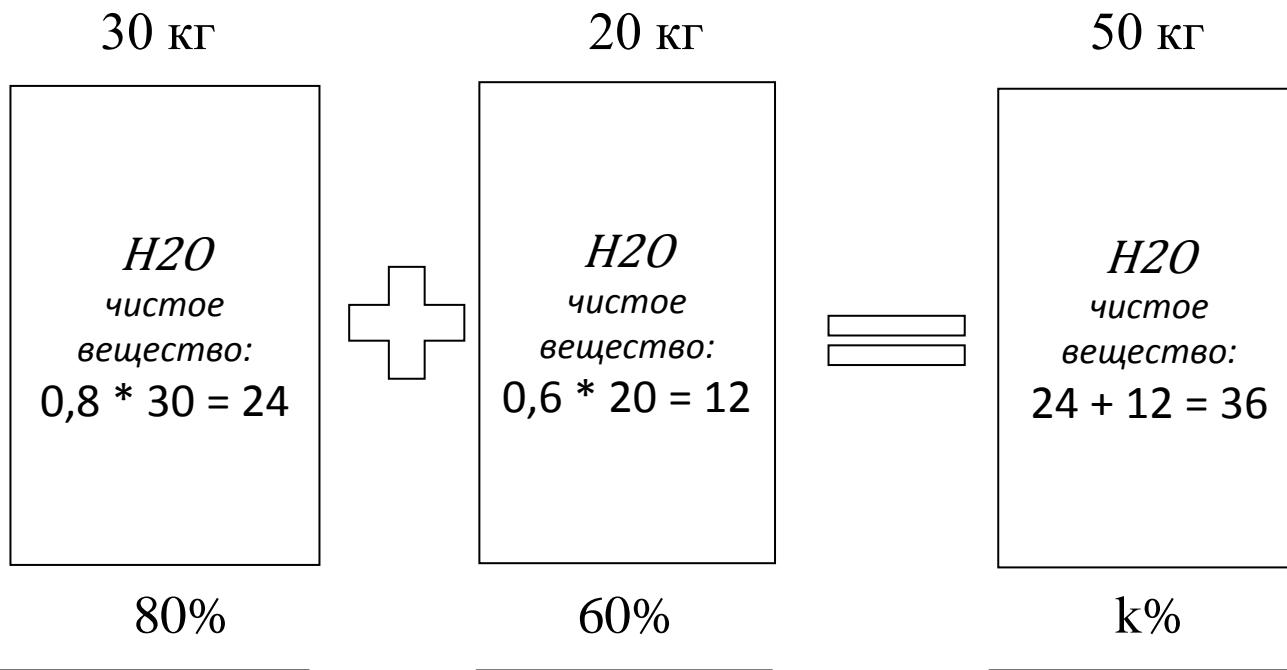
## Теоретические основы решения задач на смеси и сплавы

- Если мы смешаем 3 литра яблочного сока с 10% мякоти (0,3 л), и 5 литров яблочного сока с 5% мякоти (0,25 л), то получим 8 литров сока с содержанием 0,55 л мякоти

## Метод «прямоугольников»

- ▶ Название появилось потому, что указанные в задаче вещества изображаются в виде прямоугольников, каждая из которых делится на две части - верхнюю и нижнюю. В нижней записывается количество чистого или сухого вещества для каждого прямоугольника, что позволяет почти автоматически получить нужное уравнение или даже ответ. Проиллюстрируем метод прямоугольников несколькими задачами.

**Задача 1.** Найдите концентрацию кислоты, полученной при смешивании 30 кг её 80-процентного и 20 кг её 60-процентного растворов. Ответ выразите в процентах.

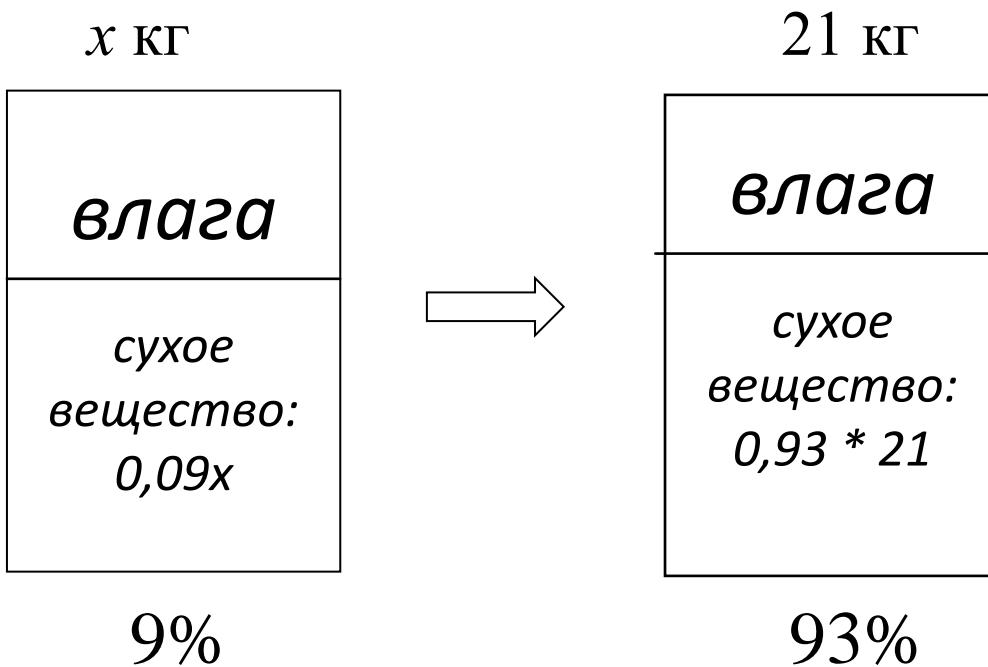


Искомая концентрация  $k = \frac{36}{50} * 100\% = 36 * 2\% = 72\%$ .

В данном случае можно было бы не использовать формулу: ведь если в 50 кг раствора содержится 36 кг чистой кислоты, то в 100 кг этого раствора будет ровно 72 кг чистой кислоты, т. е. 72 сотых от 100, а значит, искомая концентрация равна 72%.

**Ответ:** 72.

**Задача 2.** Виноград содержит 91% влаги, а изюм - 7%. Сколько килограммов винограда требуется для получения 21 кг изюма?



Поскольку масса сухого вещества винограда равна массе сухого вещества в 21 кг изюма, то по условию задачи можно составить уравнение:

$$0,09x = 0,93 * 21$$

$$9x = 93 * 21$$

$$x = 217$$

**Ответ:** 217 (кг)

**Задача 3.** Смешали  $a$  литров  $n$ -процентного водного раствора некоторого вещества с  $b$  литрами  $m$ -процентного водного раствора этого же вещества. Найдите концентрацию получившейся смеси. Ответ выразите в процентах.

► В первом растворе было  $\frac{a}{100} * n = \frac{an}{100}$  л, во втором растворе -  $\frac{b}{100} * m = \frac{bm}{100}$  л. Значит, количество чистого вещества в полученной смеси будет равно  $\frac{an}{100} + \frac{bm}{100}$  л, а всего этой смеси получится  $(a + b)$  л.

*a л*

$H2O$
чистое вещество
$\frac{a}{100} * n = \frac{an}{100}$

*n%*

*b л*

$H2O$
чистое вещество:
$\frac{b}{100} * m = \frac{bm}{100}$

*m%*

*a + b л*

$H2O$
чистое вещество:
$\frac{an}{100} + \frac{bm}{100}$

*k%*

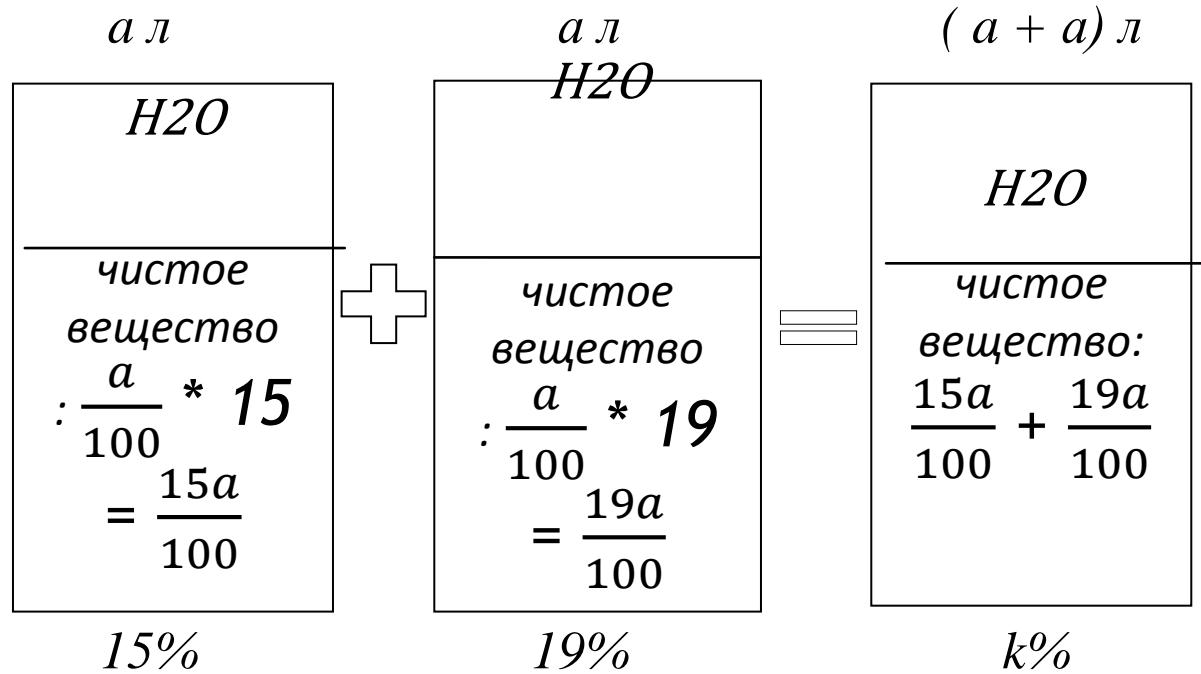
Теперь найти искомую концентрацию  $k$  не представляет труда:

$$k = \frac{\frac{an}{100} + \frac{bm}{100}}{a+b} * 100\% = \frac{an+bm}{a+b} \%$$

**Ответ:**  $\frac{an+bm}{a+b}$ .

**Задача 4.** Смешали некоторое количество 15-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 19-процентного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

► Проследим за изменениями, происходящими с чистым веществом. В первом растворе было  $\frac{a}{100} * 15 = \frac{15a}{100}$  л, во втором растворе -  $\frac{a}{100} * 19 = \frac{19a}{100}$  л. Значит, количество чистого вещества в полученной смеси будет равно  $\frac{15a}{100} + \frac{19a}{100}$  л, а всего этой смеси получится  $(a + a)$  л.



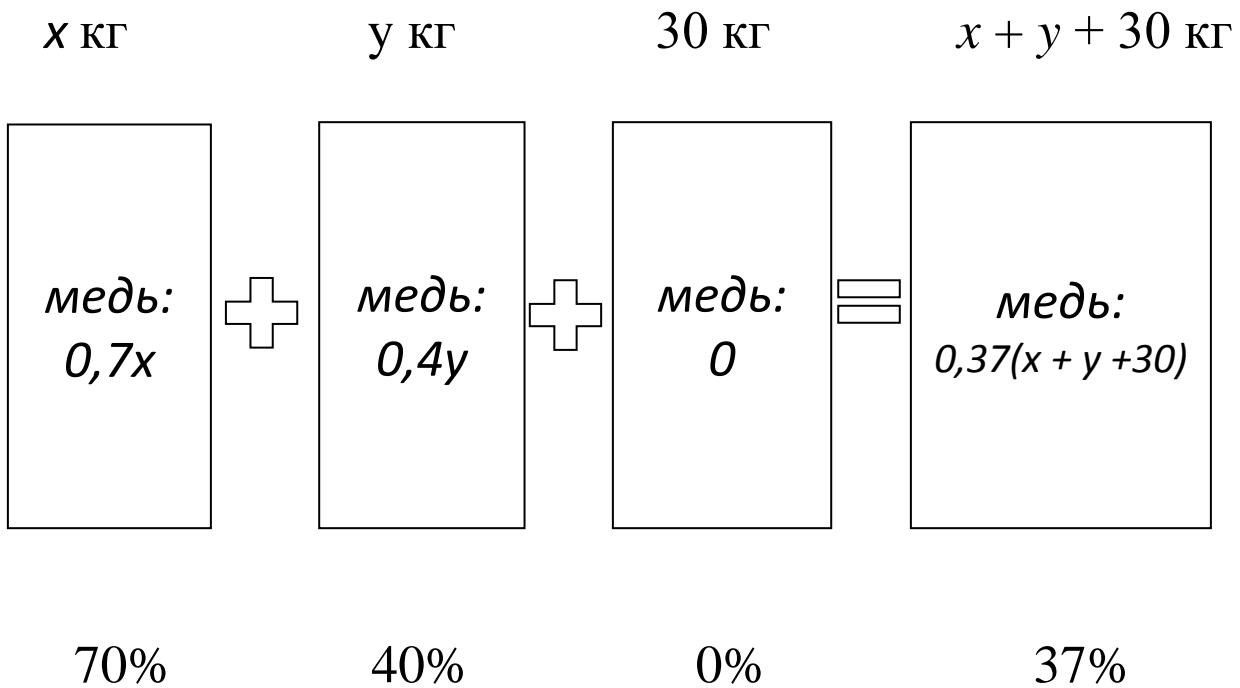
Теперь найти искомую концентрацию  $k$  не представляет труда:

$$k = \frac{\frac{15a}{100} + \frac{19a}{100}}{a+a} * 100\% = \frac{15a+19a}{a+a} \% = \frac{34}{2} \% = 17\%$$

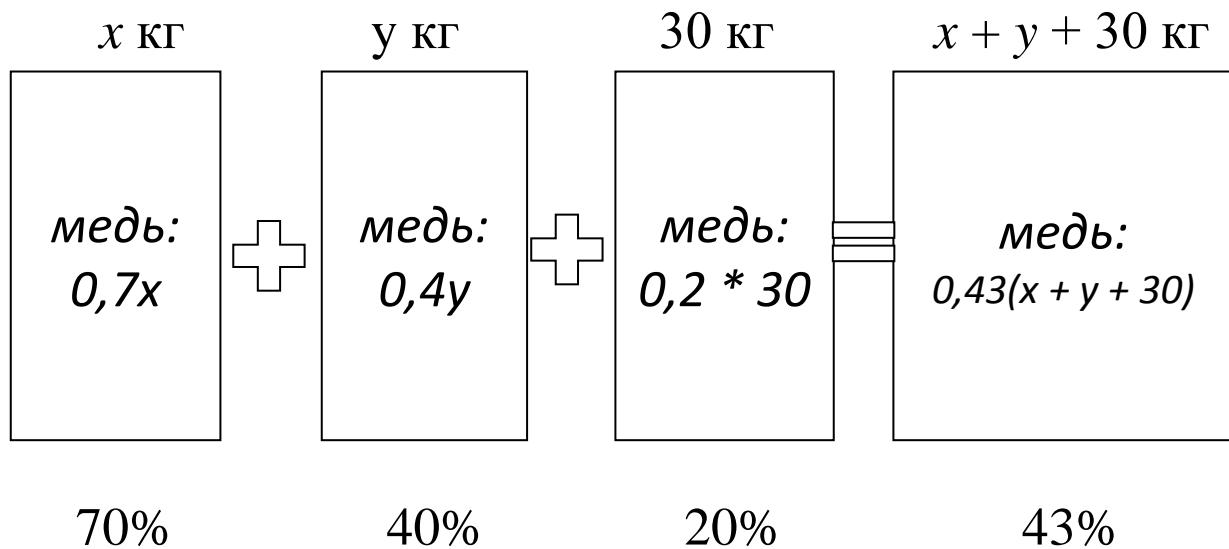
**Ответ: 17%**

**Задача 5.** Первый сплав содержит 70% меди, второй – 40% меди. Из этих двух сплавов и 30 кг третьего сплава, не содержащего меди, получили сплав, в котором меди оказалось 37%. Если бы к первым двум сплавам вместо третьего сплава добавили 30-килограммовый сплав, содержащий 20% меди, то получили бы сплав, в котором меди было бы 43%. Найти массу первого сплава. Ответ выразить в килограммах.

Тогда для первого случая получим следующую схему:



Для второго случая схема выглядит так:



Приведённые схемы позволяют сразу получить систему двух линейных уравнений для определения неизвестных  $x$  и  $y$ :

$$\begin{cases} 0,7x + 0,4y = 0,37(x + y + 30) \\ 0,7x + 0,4y + 6 = 0,43(x + y + 30). \end{cases}$$

$$\begin{cases} 70x + 40y = 37(x + y + 30) \\ 70x + 40y + 600 = 43(x + y + 30). \end{cases}$$

$$\begin{cases} 33x + 3y = 1110 \\ 27x - 3y = 690. \end{cases}$$

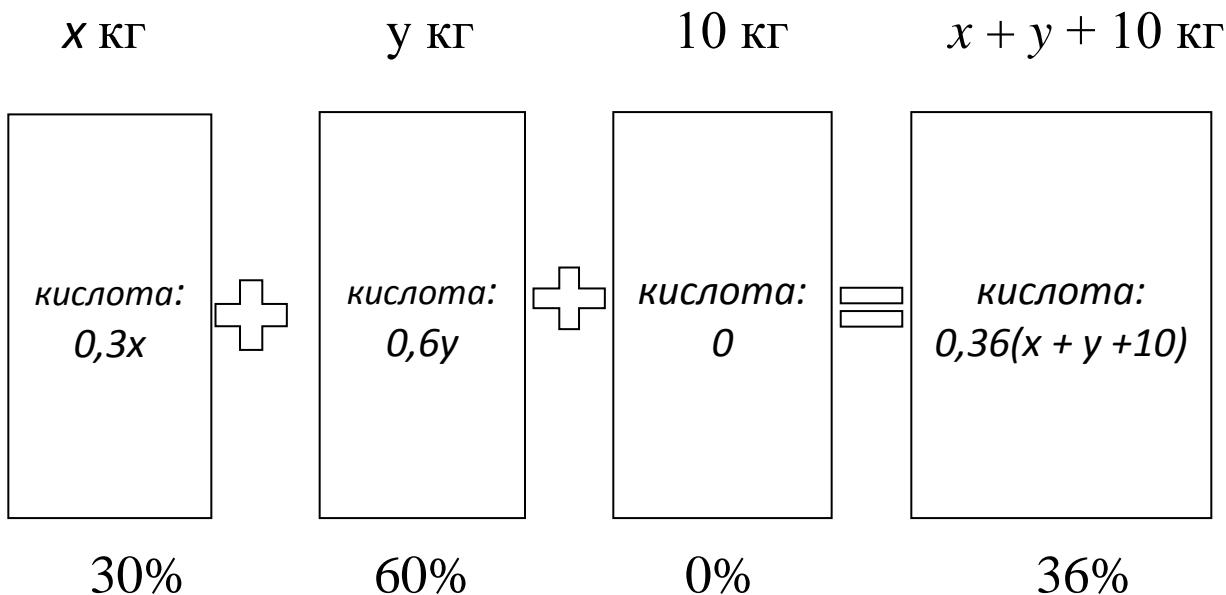
$$\begin{cases} 11x + y = 370 \\ 9x - y = 230. \end{cases}$$

Обратим внимание на то, что значение  $y$  в данной задаче находить необязательно. Сложим уравнения почленно:  $20x = 600$ , откуда

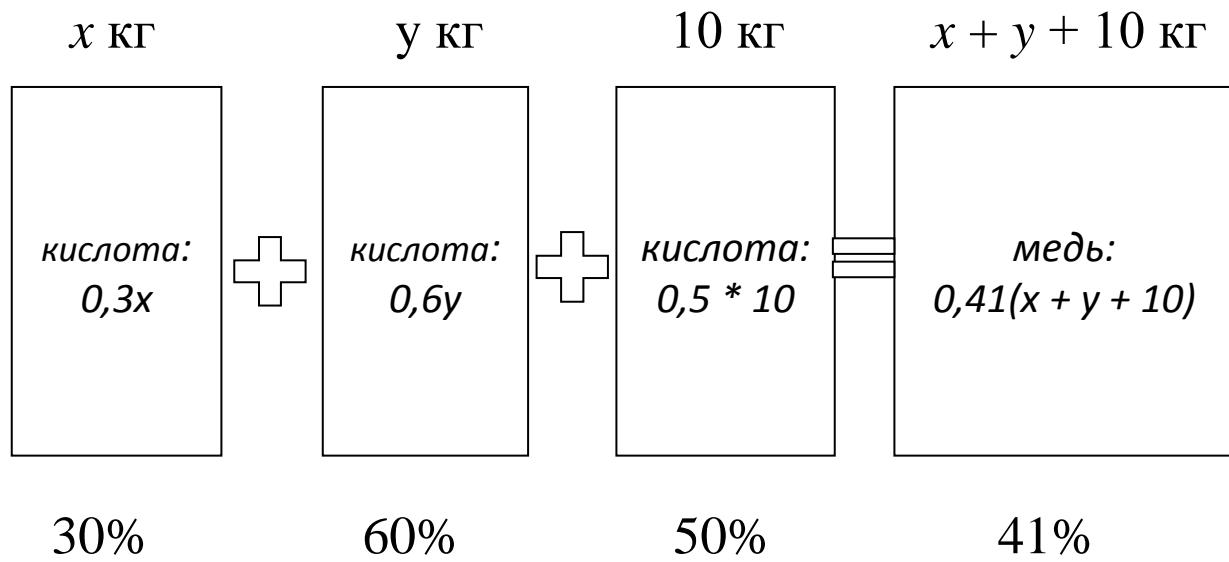
$$x = 30.$$

**Задача 6.** Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

Тогда для первого случая получим следующую схему:



Для второго случая схема выглядит так:



Приведённые схемы позволяют сразу получить систему двух линейных уравнений для определения неизвестных  $x$  и  $y$ :

$$\begin{cases} 0,3x + 0,6y = 0,36(x + y + 10) \\ 0,3x + 0,6y + 5 = 0,41(x + y + 10). \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30x + 60y = 36(x + y + 10) \\ 30x + 60y + 500 = 41(x + y + 10). \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x + 24y = 360 \\ 11x - 19y = 90. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 4y = -60 \\ 11x - 19y = 90. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -19x + 76y = 1140 \\ 44x - 76y = 360. \end{cases}$$

Сложим уравнения почленно:  $-19x + 44x = 1140 + 360$ , откуда

$$25x = 1500,$$

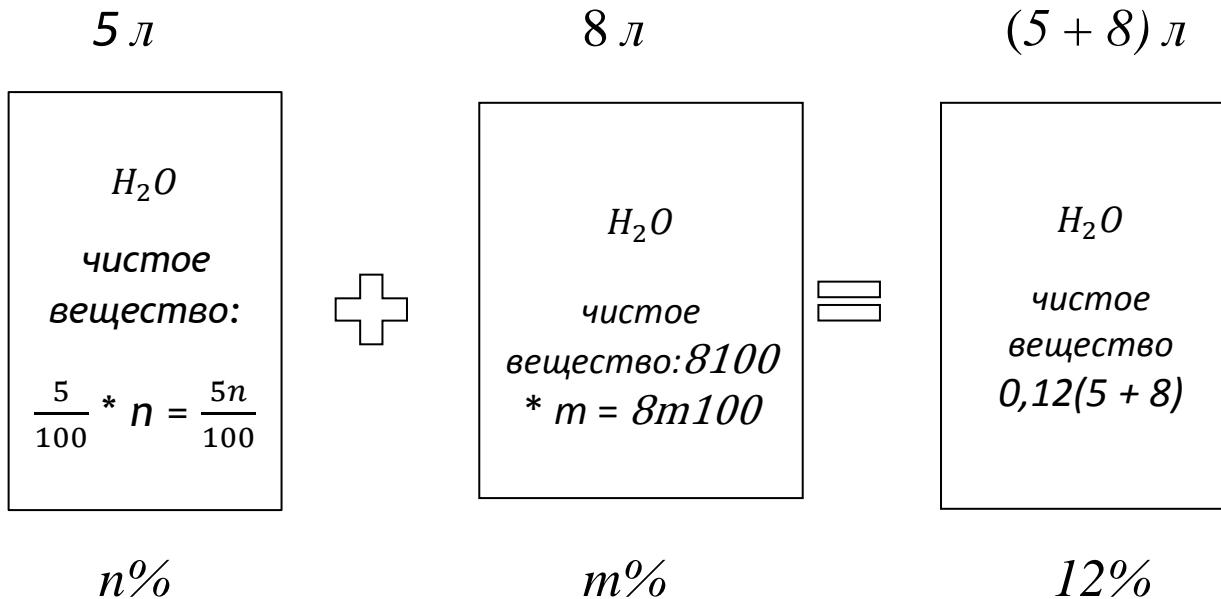
$$x = 60$$

Ответ: 60кг

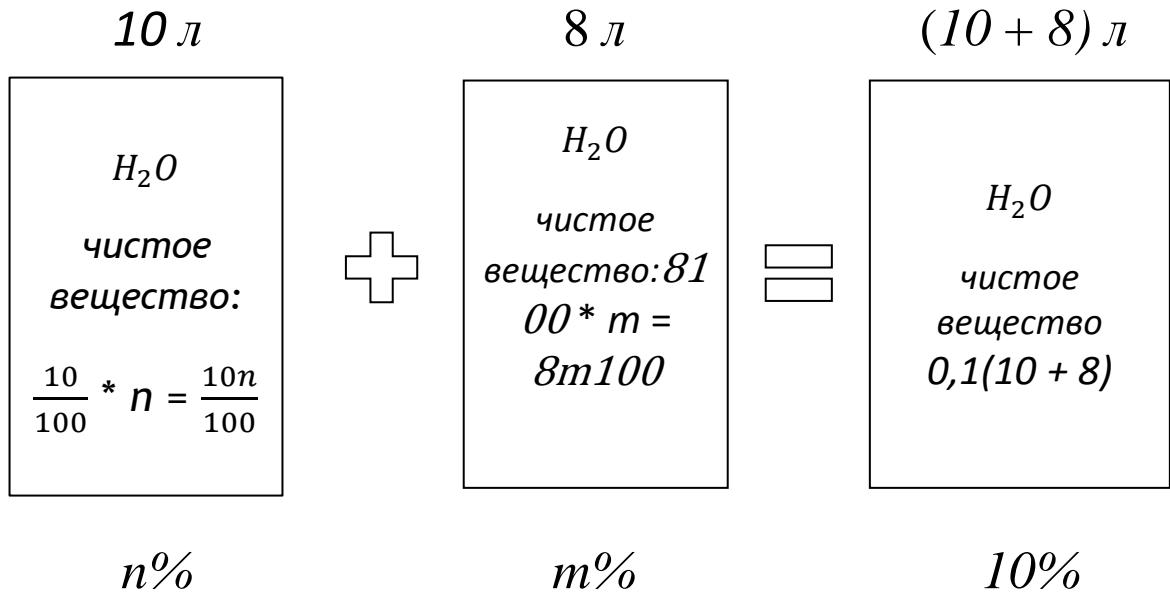
**Задача 7.** В первой банке объемом 5 литров находится раствор некоторого вещества. Во второй банке объемом 8 литров находится другой раствор того же вещества. Если слить вместе обе банки, то в получившимся растворе концентрация вещества будет 12%. Если бы в первой банке было 10 литров такого же раствора что был в ней изначально, а во второй банке ничего не изменилось, то в результате получился бы раствор с концентрацией 10%.

Найдите концентрацию вещества во второй банке.  
Ответ дайте в процентах.

Тогда для первого случая получим следующую схему:



Для второго случая схема выглядит так:



$$\begin{cases} 0,05n + 0,08m = 0,12(8 + 5) \\ 0,1n + 0,08m = 0,1(8 + 10). \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5n + 8m = 12(8 + 5) \\ 10n + 8m = 10(8 + 10). \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5n + 8m = 156 \\ 10n + 8m = 180 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10n - 16m = -312 \\ 10n + 8m = 180 \end{cases}$$

Обратим внимание на вопрос задачи: найдите концентрацию вещества во второй банке. А это значит, что значение  $n$  в данной задаче находить необязательно.

Сложим уравнения почленно:  $-16m + 8m = -312 + 180$ , откуда

$$-8m = -132,$$

$$m = 16,5$$

**Ответ:** 16,5%

## Адреса сайтов для подготовки к ОГЭ по МАТЕМАТИКЕ

Федеральный институт педагогических измерений «ФИПИ»:

<https://fipi.ru>

«ФИПИ» Открытый банк заданий ГИА-9 / Математика:

<http://oge.fipi.ru/os/xmodules/qprint/index.php?proj=DE0E276E497AB3784C3FC4CC20248DC0>

СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Математика»: <https://oge.sdamgia.ru/>

СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ. Каталог заданий по типам по темам:

[https://oge.sdamgia.ru/prob\\_catalog](https://oge.sdamgia.ru/prob_catalog)

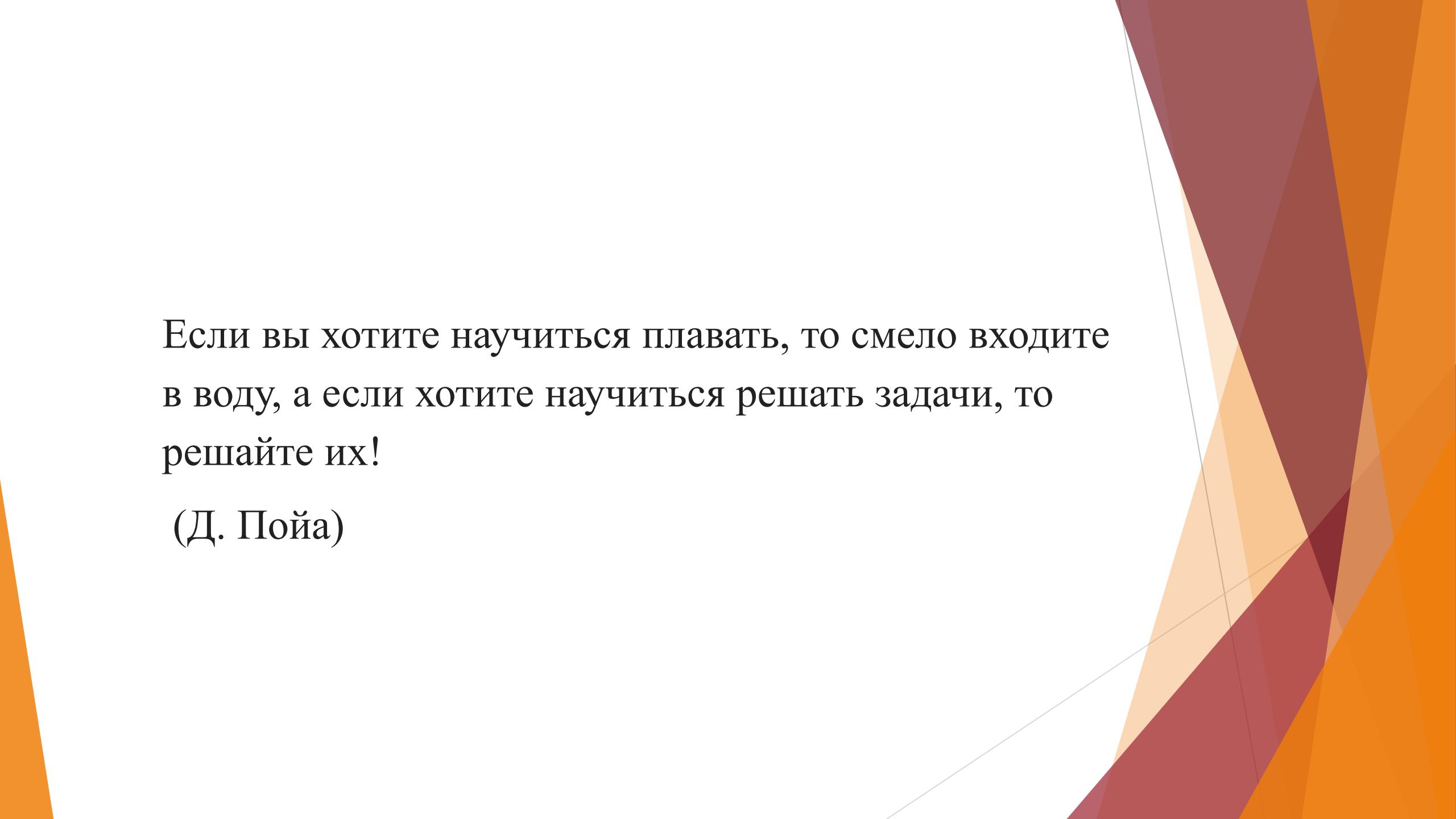
Подготовка к ЕГЭ и ОГЭ по математике: <https://math100.ru/>

ОГЭ Математика 2022. Открытый банк заданий с ответами:

<https://math100.ru/ogenew/>

ОГЭ 2022 по математике: онлайн подготовка:

[https://examer.ru/oge\\_po\\_matematike/2022/](https://examer.ru/oge_po_matematike/2022/)



Если вы хотите научиться плавать, то смело входите  
в воду, а если хотите научиться решать задачи, то  
решайте их!

(Д. Пойа)