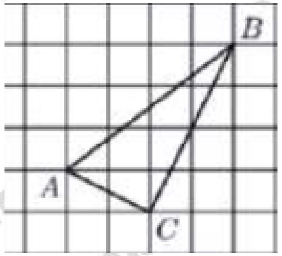
Контрольно измерительные материалы по математике (профиль)

Вариант 39 2024

1. Острые углы прямоугольного треугольника равны 24° и 66°. Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

2. На клетчатой бумаге с размером 1×1 изображен треугольник ABC. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.



3. Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем шара равен 28. Найдите объем конуса.

4. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Физик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Физик» выиграет жребий ровно два раза.

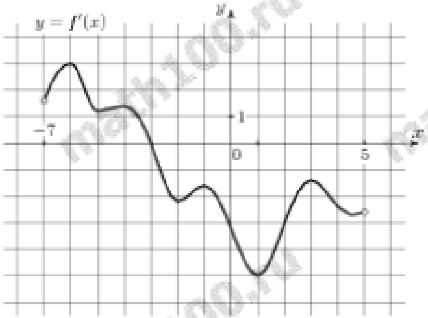
5. Телефон передаёт SMS-сообщение. В случае неудачи телефон делает следующую попытку. Вероятность того, что сообщение удастся передать без ошибок в каждой отдельной попытке, равна 0,4. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше двух попыток.

6. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{25}\right)^{x-1}=5.$

7. Найдите $26\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\cos\alpha=\frac{12}{13}$ и $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$

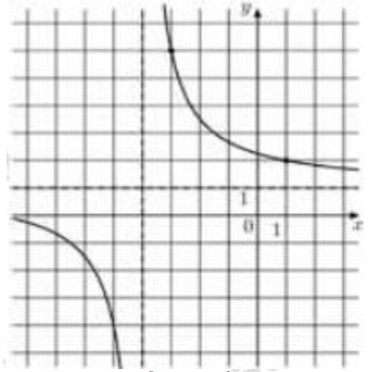
9. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t)=H_0-\sqrt{2gH_0}\,kt+\frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0=20$ м — начальная высота столба воды, $k=\frac{1}{50}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g=10$ м/с^2). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма воды?

8. На рисунке изображен график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7;5)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $[-6;4]$.



10. Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 25 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 30 часов после отплытия из него. Сколько километров прошел теплоход за весь рейс?

11. На рисунке изображён график функции $f(x)=\frac{kx+a}{x+b}$. Найдите a.



12. Найдите точку максимума функции $y=8\ln(x+7)-8x+3$

2 часть

13. а) Решите уравнение $\left(4\cos^4 x - 1\right)\sqrt{\sin x} = 0$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

14. Плоскость α перпендикулярна основанию правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S и делит стороны AB и BC основания пополам.

а) Докажите, что плоскость α делит боковое ребро в отношении $1:3$, считая от вершины S.

б) Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если известно, что сторона основания равна 2, а высота пирамиды равна 4.

15. Решите неравенство:

$$\frac{\left(x^2 - 7x + 12\right)\cdot \log_{x-2}(x-3)\cdot \ln(x-6)^2}{2x^2 - 11x + 14} \le 0$$

16. В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

— в январе каждого года долг увеличивается на 30% по сравнению с предыдущим годом;

— с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Определите, на какую сумму взяли кредита банке, если известно, что кредит был выплачен тремя равными платежами (за 3 года) и общая сумма выплат на $78\,030$ рублей больше суммы взятого кредита.

17. В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно. Известно, что около четырехугольника $AMNC$ можно описать окружность.

а) Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

б) На стороне AC отмечена точка F, такая что $\angle AFB = 135^\circ$. Отрезок BF пересекает отрезок MN в точке E. Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $AMNC$, если $\angle ABC = 120^\circ$ и $EF = 6\sqrt{2}$.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x-2}\ln(x-a) = \sqrt{3x-2}\ln(2x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

19. В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 46, а вместе солдат меньше чем 111. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 8, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 13 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?