

Решение геометрических задач ОГЭ (на примере задания № 23)

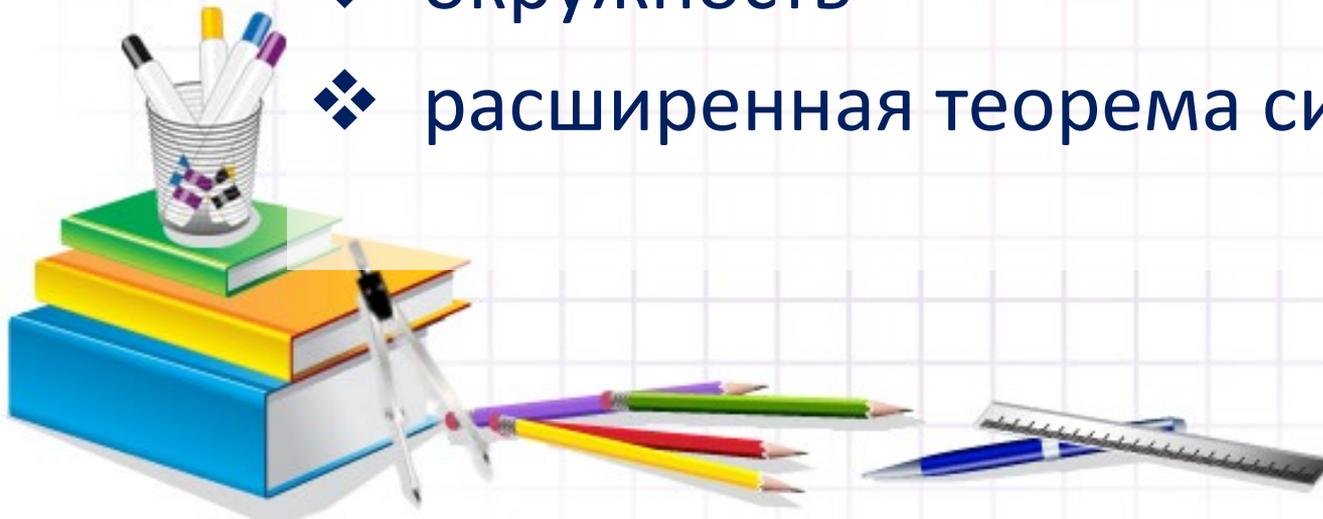
Подборка задач 23

Составитель: Трифонова Н.В.



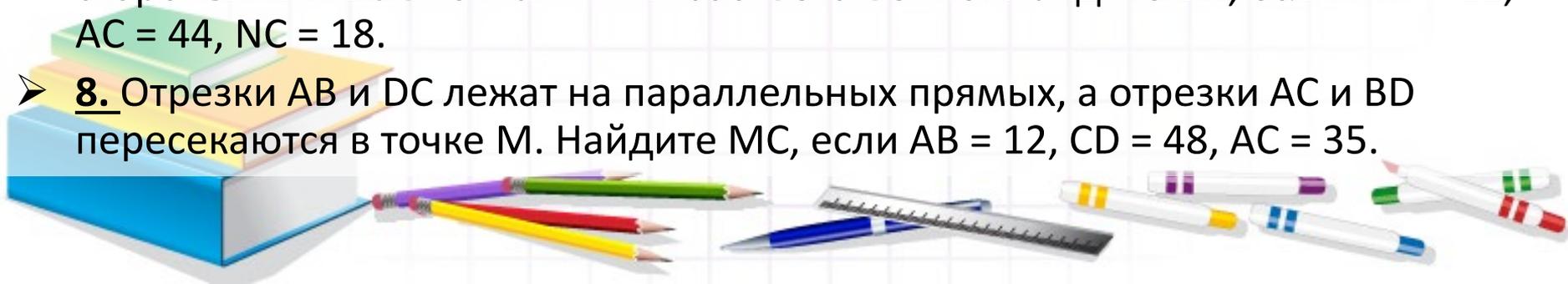
Геометрическая задача на вычисление

- ❖ прямоугольный треугольник
- ❖ параллелограмм
- ❖ ромб
- ❖ трапеция
- ❖ подобие треугольников
- ❖ окружность
- ❖ расширенная теорема синусов



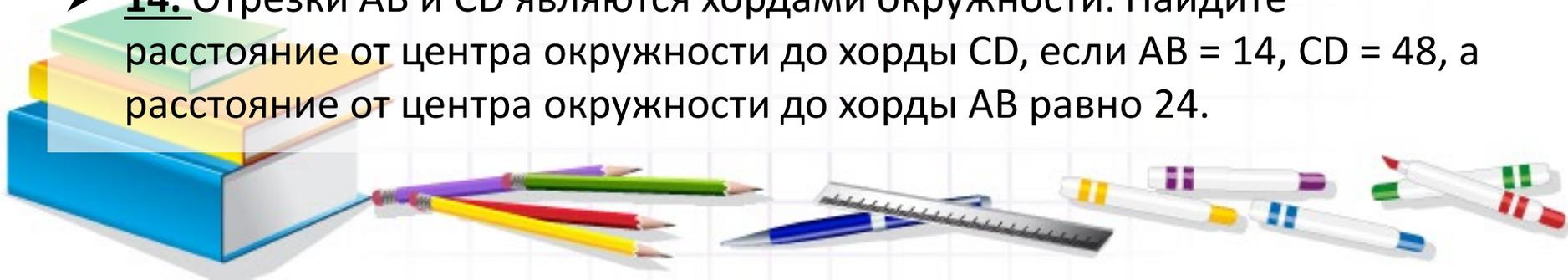
Геометрическая задача на вычисление

- **1.** Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K . Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 5$, $CK = 14$.
- **2.** Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 15 , а одна из диагоналей ромба равна 60 . Найдите углы ромба.
- **3.** Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 15$ и $CH = 2$. Найдите высоту ромба.
- **4.** Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20 . Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.
- **5.** Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны 21 и 75 . Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.
- **6.** Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 24$, $BF = 10$.
- **7.** Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN , если $MN = 11$, $AC = 44$, $NC = 18$.
- **8.** Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M . Найдите MC , если $AB = 12$, $CD = 48$, $AC = 35$.



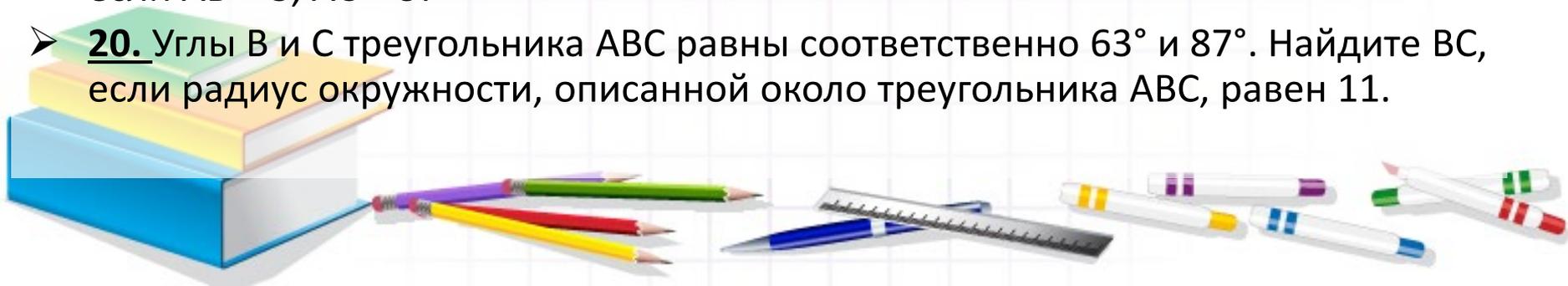
Геометрическая задача на вычисление

- **9.** Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC . Найдите AB , если $AH = 9$, $AC = 36$.
- **10.** Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно 60° и 135° , а $CD = 36$.
- **11.** Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно 30° и 135° , а $CD = 29$.
- **12.** Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF , если $AD = 42$, $BC = 14$, $CF:DF = 4:3$.
- **13.** Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD , если $AB = 24$, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны соответственно 16 и 12 .
- **14.** Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD , если $AB = 14$, $CD = 48$, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 24 .



Геометрическая задача на вычисление

- **15.** Точка H является основанием высоты VH , проведённой из вершины прямого угла V прямоугольного треугольника ABC . Окружность с диаметром VH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите VH , если $PK = 11$.
- **16.** Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C . Найдите длину отрезка KP , если $AP = 36$, а сторона BC в 1,8 раза меньше стороны AB .
- **17.** Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C . Найдите длину отрезка KP , если $AK = 14$, а сторона AC в 2 раза больше стороны BC .
- **18.** Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B . Найдите AC , если диаметр окружности равен 16, а $AB = 15$.
- **19.** Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B . Найдите диаметр окружности, если $AB = 3$, $AC = 9$.
- **20.** Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 63° и 87° . Найдите BC , если радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 11.



Критерии оценивания задания 23.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2



ЗАДАЧА 1.

**Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20.
Найдите высоту, проведенную к гипотенузе.**

Дано: $\triangle ABC$, $\angle B = 90^\circ$, $BC = 15$,

$$AB = 20, BH \perp AC.$$

20

15

Найти: BH

Решение:

1 способ

1. $\triangle ABC$ ($\angle B = 90^\circ$),

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25 \text{ (по теореме Пифагора).}$$

$$2. S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH \Rightarrow \text{или } S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC$$

$$3. \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH \Rightarrow BH = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12.$$

Ответ: 12



Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20. Найдите высоту, проведенную к гипотенузе.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle B = 90^\circ$, $BC = 15$,
 $AB = 20$, $BH \perp AC$.

Найти: BH

Решение:

II способ

1. $\triangle ABC$ ($\angle B = 90^\circ$),

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25$$

(по теореме Пифагора).

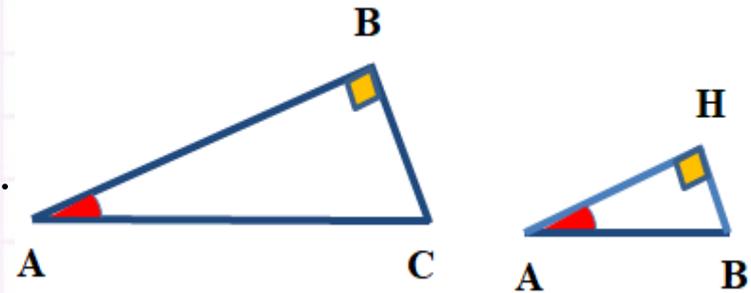
2. $\triangle ABC$ и $\triangle AHB$ – прямоугольные,
 $\angle A$ – общий $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AHB$ по двум углам.

3. Тогда $\frac{AB}{AC} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BH = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12$.

Ответ: 12

20

15



Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20.

Найдите высоту, проведенную к гипотенузе.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle B = 90^\circ$, $BC = 15$,
 $AB = 20$, $BH \perp AC$.

20

15

Найти: BH

Решение: III способ

1. $\triangle ABC$ ($\angle B = 90^\circ$),

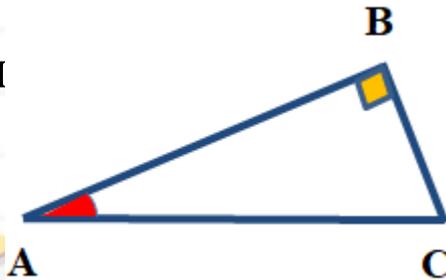
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} =$$

$$\sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25 \text{ (по}$$

теореме Пифагора).

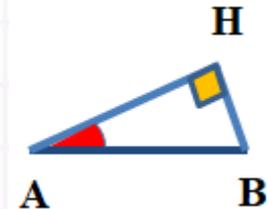
2. $\triangle ABC$ – пря

$$\sin \angle A = \frac{BC}{AC}$$



3. $\triangle AHB$ – прямоугольный,

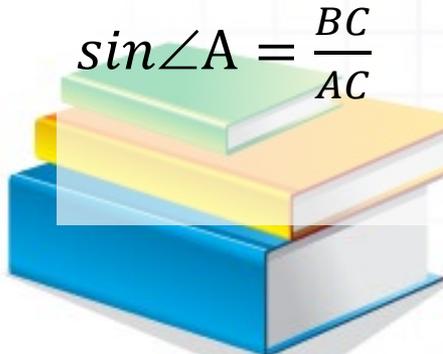
$$\sin \angle A = \frac{BH}{AB}$$



$$4. \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{BH}{AB},$$

$$BH = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12$$

Ответ: 12



Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20. Найдите высоту, проведенную к гипотенузе.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle B = 90^\circ$, $BC = 15$,
 $AB = 20$, $BH \perp AC$.

20

15

Найти: BH

Решение:

IV способ

1. $\triangle ABC$ ($\angle B = 90^\circ$),

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25$ (по теореме Пифагора).

2. BH – высота проведенная к гипотенузе $\Rightarrow BH = \frac{AB \cdot BC}{AC}$

$$BH = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12.$$

Ответ: 12



ЗАДАЧА 2

Прямая AD , перпендикулярная медиане BM треугольника ABC , делит её пополам. Найдите сторону AC , если сторона AB равна 4,5.

Дано: $\triangle ABC$, BM – медиана,
 $AD \perp BM$, $BD = DM$, $AB = 4,5$.

Найти: AC

Решение:

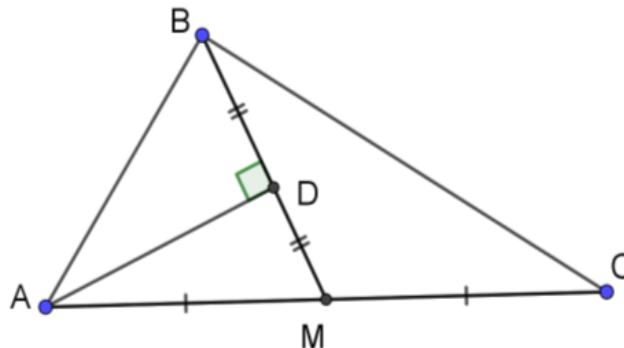
1 способ

Так как AD – медиана и высота в $\triangle ABM$, то $\triangle ABM$ – равнобедренный с основанием BM

$AB = AM$ (по определению равнобедренного треугольника).

BM – медиана для $\triangle ABC \Rightarrow AM = MC \Rightarrow AC = 2AM = 2AB = 2 \cdot 4,5 = 9$.

Ответ: 9



Прямая AD , перпендикулярная медиане BM треугольника ABC , делит её пополам. Найдите сторону AC , если сторона AB равна 4,5.

Дано: $\triangle ABC$, BM – медиана,
 $AD \perp BM$, $BD = DM$, $AB = 4,5$.

Найти: AC

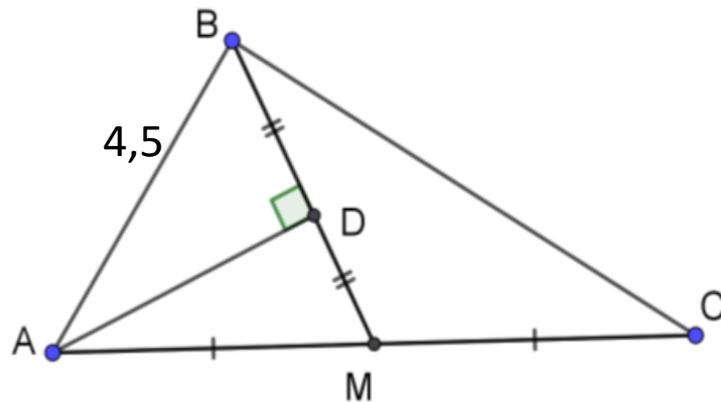
II способ

Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle AMD$ –прямоугольные:

$BD = DM$, AD – общая $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle AMD$ по двум катетам

Из равенства треугольников следует: $AB = AM$

BM – медиана для $\triangle ABC \Rightarrow AM = MC \Rightarrow AC = 2AM =$
 $= 2AB = 2 \cdot 4,5 = 9$.



Ответ: 9



ЗАДАЧА 3

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B .
Найдите диаметр окружности, если $AB = 3$, $AC = 9$.

Дано: $\triangle ABC$, $AB = 3$, $AC = 9$.

O – центр окружности, $O \in AC$,

AB – касательная.

Найти: d

Решение: *1 способ*

Пусть окружность пересекает прямую AC второй раз в точке D

AB – касательная, AC – секущая, поэтому $AB^2 = AC \cdot AD$,

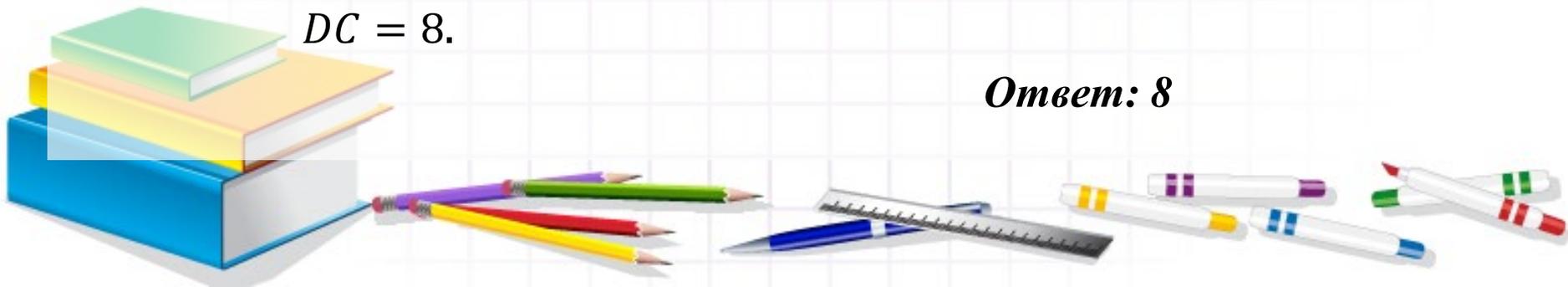
Пусть $DC = x$ тогда $AD = AC - DC = 9 - x$.

Получаем $3^2 = 9 \cdot (9 - x)$

$$x=8$$

$$DC = 8.$$

Ответ: 8



Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B .
Найдите диаметр окружности, если $AB = 3$, $AC = 9$.

Дано: $\triangle ABC$, $AB = 3$, $AC = 9$.

O – центр окружности, $O \in AC$,

AB – касательная.

Найти: d

Решение: *II способ*

$OB \perp AB$ по свойству радиуса, проведенного в точку касания. $BO = CO = R$, $\Rightarrow AO = AC - OC = 9 - R$.

в $\triangle AOB$, прямоугольном:

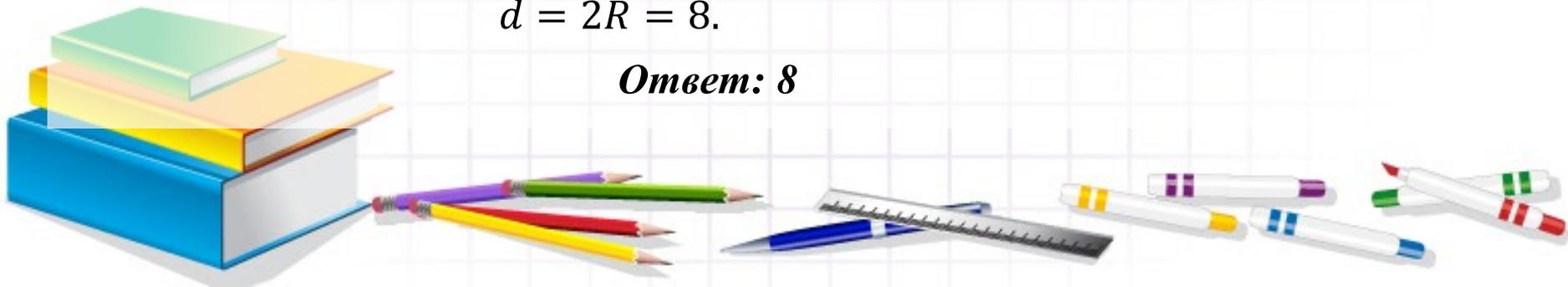
По теореме Пифагора $AO^2 = AB^2 + BO^2$.

$$(9 - R)^2 = 3^2 + R^2$$

$$R = 4,$$

$$d = 2R = 8.$$

Ответ: 8



Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B . Найдите диаметр окружности, если $AB = 3$, $AC = 9$.

Дано: $\triangle ABC$, $AB = 3$, $AC = 9$.

O – центр окружности, $O \in AC$,

AB – касательная.

Найти: d

Решение: ***III способ***

Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle ACB$. $\angle A$ – общий $\angle BCD = \frac{1}{2} \cup BD$ вписанный

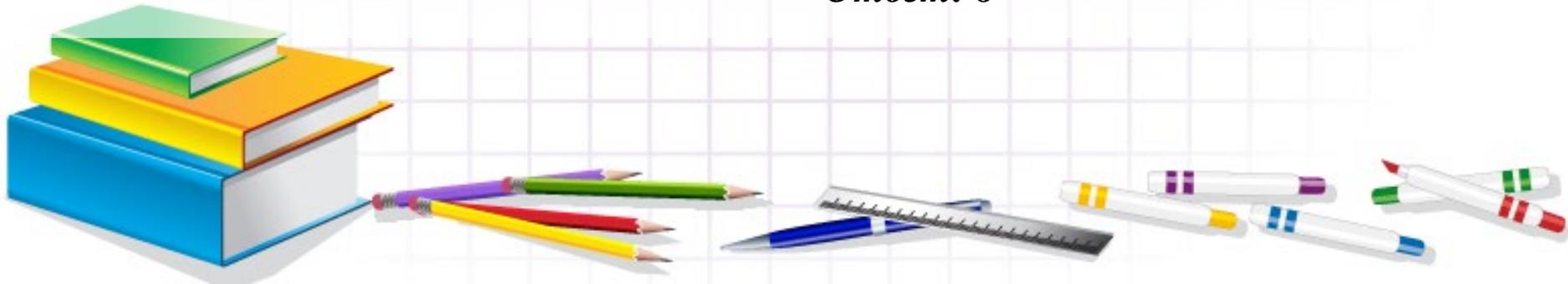
$\angle ABD = \frac{1}{2} \cup BD$ (угол между касательной и хордой равен половине отсекаемой дуги)

$\triangle ABD \sim \triangle ACB$ по двум углам

В подобных треугольниках сходственные стороны пропорциональны:

$$\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC} \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC} \quad AB^2 = AC \cdot AD \quad 3^2 = 9 \cdot (9 - d) \quad d = 8$$

Ответ: 8



Задача 4. (1 способ)

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K .
Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 12$, $CK = 16$.

Решение.

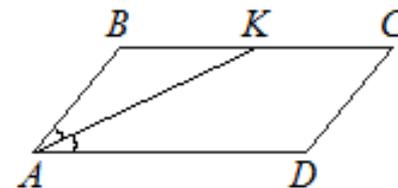
Углы BKA и KAD равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK , AK — биссектриса угла BAD .

Следовательно, $\angle BKA = \angle KAD = \angle BAK$. Значит, треугольник BKA равнобедренный и $AB = BK = 12$.

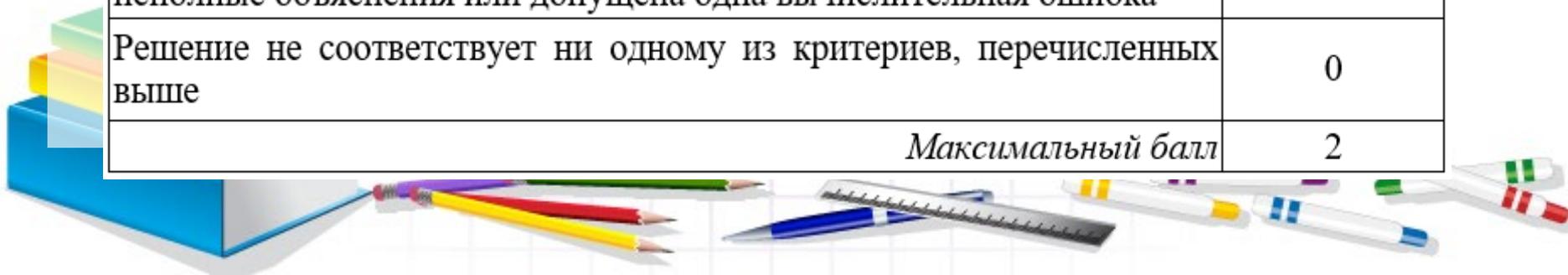
По формуле периметра параллелограмма находим:

$$P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 80.$$

Ответ: 80.



Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



Задача 4. (2 способ)

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K .
Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 12$, $CK = 16$.

Решение.

Углы BKA и KAD равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK .

AK — биссектриса угла BAD .

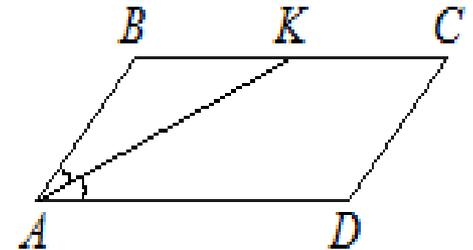
Следовательно, $\angle BKA = \angle KAD = \angle BAK$. Значит,

треугольник BKA равнобедренный и $AB = BK = 12$.

В параллелограмме $ABCD$: $AB = 12$, $BC = BK + KC = 28$.

$P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 80$.

Ответ: 80.



Задача 4. (3 способ)

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K .
Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 12$, $CK = 16$.

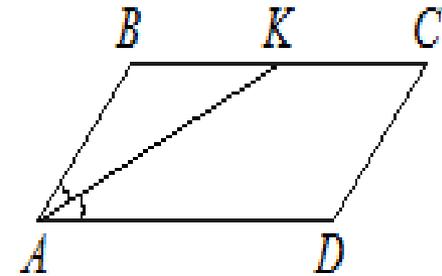
Решение.

Биссектриса параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник. AK — биссектриса угла BAD . Следовательно, треугольник BKA равнобедренный и $AB = BK = 12$.

В параллелограмме $ABCD$: $AB = 12$, $BC = BK + KC = 28$.

$$P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 80.$$

Ответ: 80.



ЗАДАЧА 5 (1 способ)

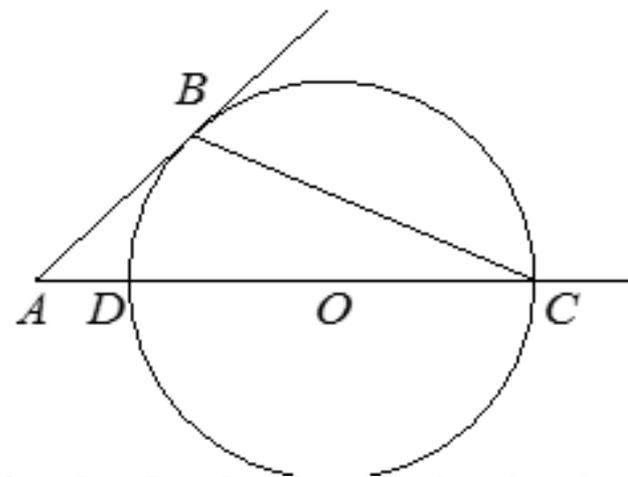
Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B . Найдите AC , если $AB = 8$, диаметр окружности равен $3,6$.

Решение.

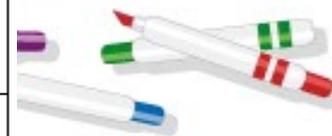
Пусть $AC = x$. Тогда по свойству касательной и секущей, проведённых из одной точки к окружности, получаем:

$$AB^2 = AC(AC - CD); 64 = x(x - 3,6), \text{ откуда} \\ x = 10.$$

Ответ: 10.



Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



ЗАДАЧА 5 (2 способ)

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B . Найдите AC , если $AB = 8$, диаметр окружности равен $3,6$.

Решение.

Прямая AB касается окружности, следовательно, радиус OB , равный $1,8$, перпендикулярен AB .

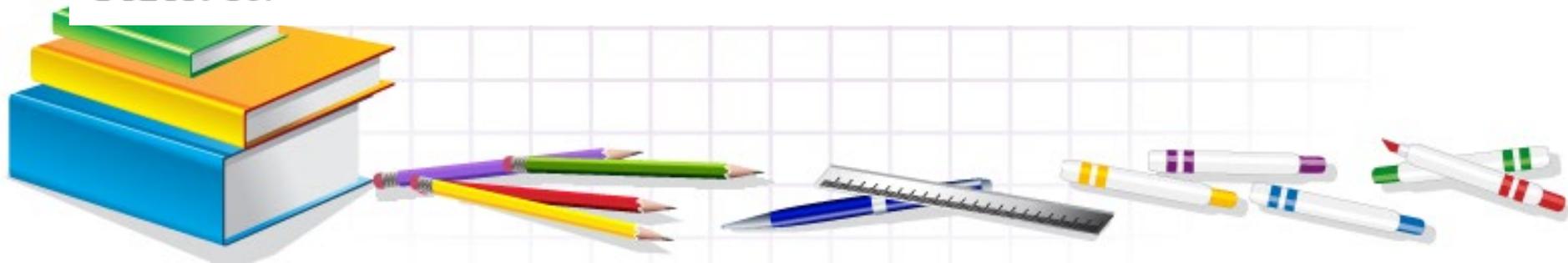
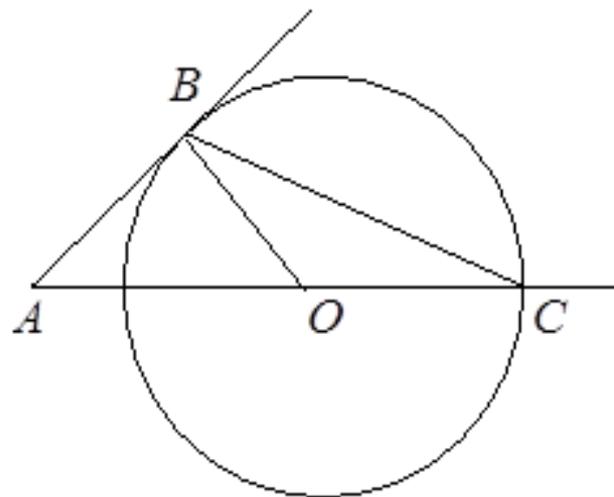
Треугольник AOB прямоугольный. По теореме Пифагора:

$$AO^2 = AB^2 + OB^2; \quad AO^2 = 8^2 + 1,8^2;$$

$$AO^2 = 67,24; \quad AO = 8,2.$$

$AC = AO + OC$, где OC – радиус, тогда
 $AC = 8,2 + 1,8 = 10$.

Ответ: 10.



ЗАДАЧА 5 (3 способ)

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B . Найдите AC , если $AB = 8$, диаметр окружности равен $3,6$.

Решение.

Треугольник BOC равнобедренный, тогда $\angle OCB = \angle OBC$.

Треугольник BOD равнобедренный, тогда $\angle ODB = \angle OBD$.

Прямая AB касается окружности в точке B , следовательно, радиус OB перпендикулярен AB .

Получаем:

$$\angle ABD = 90^\circ - \angle DBO = 90^\circ - \angle BDC = \angle BCD.$$

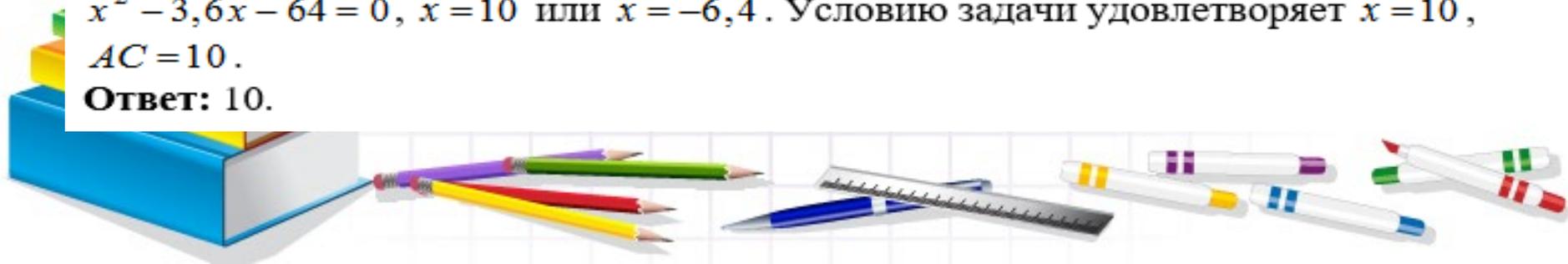
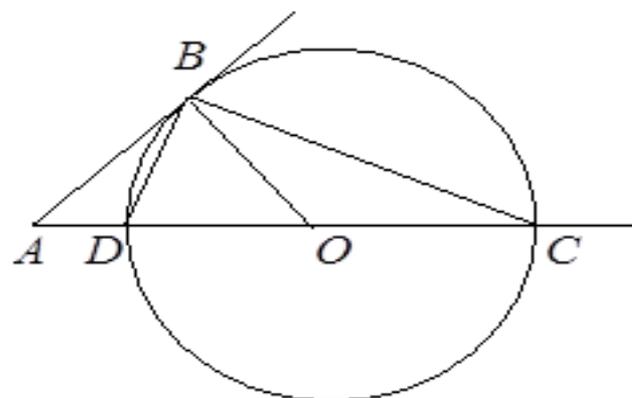
Треугольники ABD и ACB , имеющие общий угол BAC и равные углы ABD и BCD ,

подобны по двум углам, следовательно, $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$.

Пусть $AC = x$, получаем: $AB^2 = AC(AC - CD)$; $64 = x(x - 3,6)$;

$x^2 - 3,6x - 64 = 0$, $x = 10$ или $x = -6,4$. Условию задачи удовлетворяет $x = 10$, $AC = 10$.

Ответ: 10.



ЗАДАЧА 5 (4 способ)

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B . Найдите AC , если $AB = 8$, диаметр окружности равен $3,6$.

Решение.

Прямая AB является касательной, BD – секущей, следовательно, угол ABD равен половине дуги BD , заключенной внутри угла ABD , или половине центрального угла BOD .

Вписанный угол BCD , опирается на ту же дугу BD , следовательно, он равен ее половине или половине центрального угла BOD .

Получили: $\angle ABD = \angle BCD$.

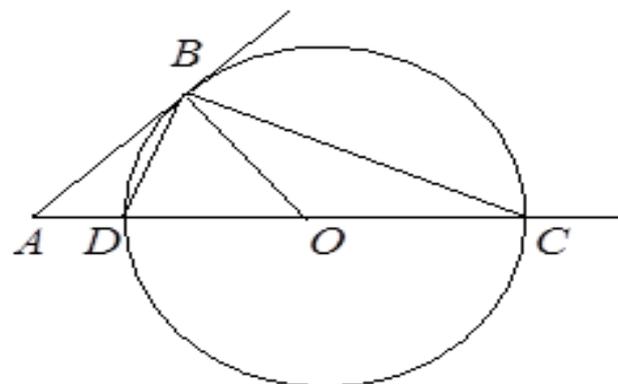
Треугольники ABD и ACB , имеющие общий угол BAC и равные углы ABD и BCD , подобны по двум углам,

следовательно, $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$.

Пусть $AC = x$, получаем: $AB^2 = AC(AC - CD)$; $64 = x(x - 3,6)$;

$x^2 - 3,6x - 64 = 0$, $x = 10$ или $x = -6,4$. Условию задачи удовлетворяет $x = 10$, $AC = 10$.

Ответ: 10.



ЗАДАЧА 6 (1 способ)

Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD , если $AB = 14$, $CD = 48$ а расстояние от центра окружности до хорд AB равно 24.

Решение.

Пусть OM и ON — перпендикуляры к хордам AB и CD соответственно. Треугольники AOB и COD равнобедренные, значит, $AM = MB$ и $CN = ND$.

Тогда в прямоугольном треугольнике MOB имеем:

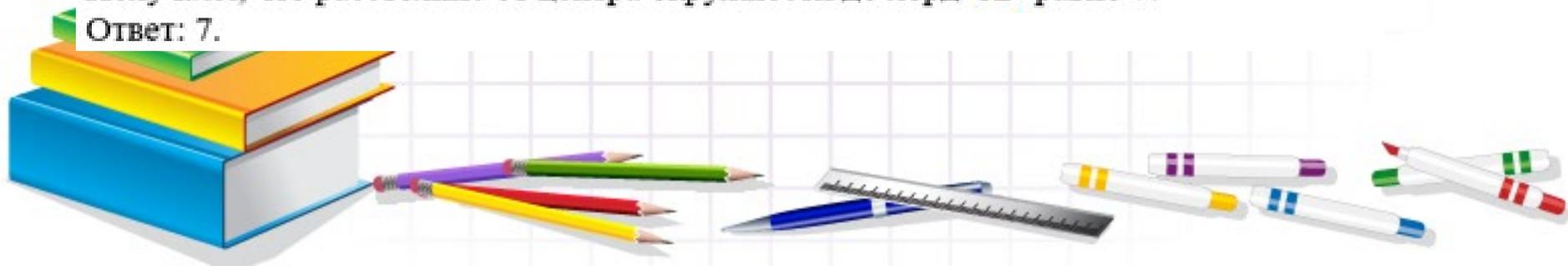
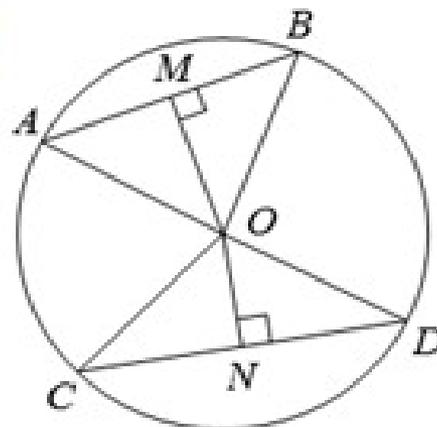
$$OB = \sqrt{OM^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 25.$$

В прямоугольном треугольнике CON гипотенуза

$$CO = OB = 25, \quad \text{откуда} \quad ON = \sqrt{OC^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2} = 7.$$

Получаем, что расстояние от центра окружности до хорд CD равно 7.

Ответ: 7.



ЗАДАЧА 6 (2 способ)

Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD , если $AB = 14$, $CD = 48$, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 24.

Решение.

Рассмотрим треугольники AOM и BOM , они прямоугольные, стороны AO и BO равны как радиусы окружностей, OM — общая, следовательно, треугольники AOM и BOM равны, откуда

$$AM = BM = \frac{AB}{2} = 7.$$

Аналогично равны треугольники CON и DON , откуда

$$CN = ND = \frac{CD}{2} = 24.$$

Рассмотрим треугольник MOB , найдем OB по теореме Пифагора.

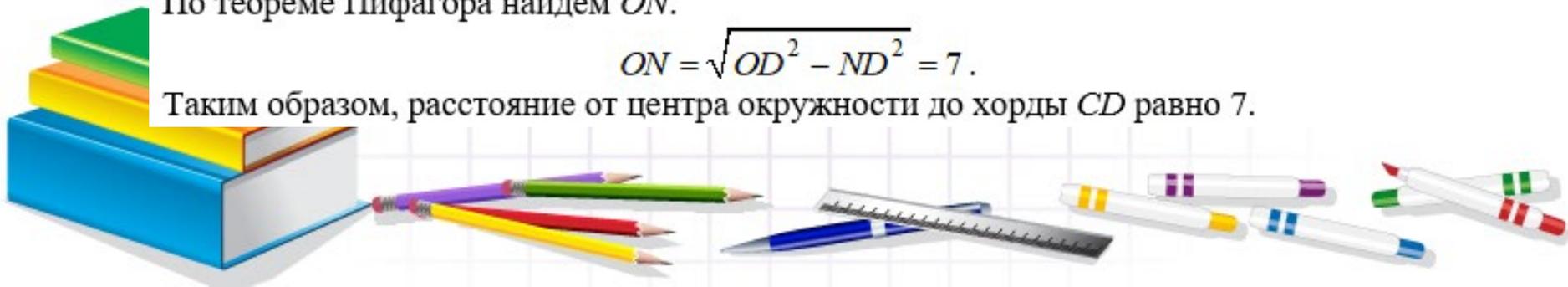
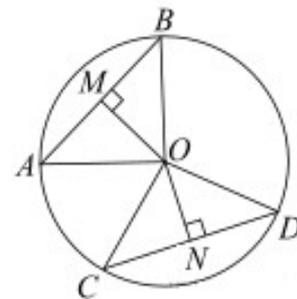
$$OB = \sqrt{OM^2 + MB^2} = 25.$$

Рассмотрим треугольник OND , он прямоугольный.

По теореме Пифагора найдем ON .

$$ON = \sqrt{OD^2 - ND^2} = 7.$$

Таким образом, расстояние от центра окружности до хорды CD равно 7.



ЗАДАЧА 6 (3 способ)

Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD , если $AB = 14$, $CD = 48$, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 24.

Решение.

Рассмотрим треугольники AOM и BOM , они прямоугольные, стороны AO и BO равны как радиусы окружностей, OM — общая, следовательно, треугольники AOM и BOM равны, откуда

$$AM = BM = \frac{AB}{2} = 7.$$

Аналогично равны треугольники CON и DON , откуда

$$CN = ND = \frac{CD}{2} = 24.$$

Рассмотрим прямоугольные треугольники OND и BMO :

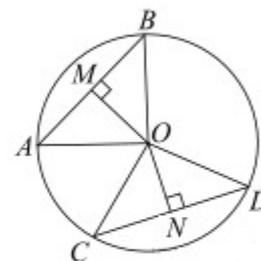
гипотенузы $OD = OB$ как радиусы;

катеты $DN = OM = 24$, следовательно, прямоугольные треугольники OND и BMO

равны, откуда получаем: $ON = BM = 7$.

Таким образом, расстояние от центра окружности до хорды CD равно 7.

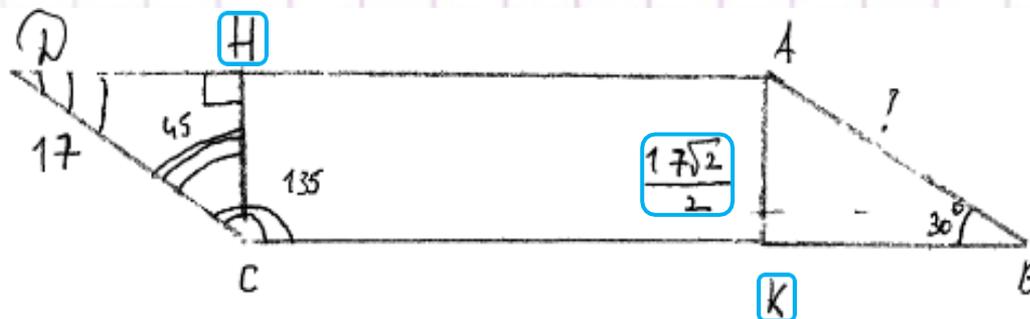
Ответ: 7.



ЗАДАЧА 6

Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно 30° и 135° , а $CD = 17$.

Ответ: $17\sqrt{2}$.



$$\angle DCH = 135 - 90 = 45^\circ$$

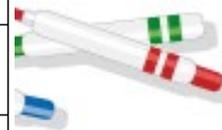
$$\triangle DHC \sim \text{МБ} \Rightarrow DH = HC = x \quad x^2 + x^2 = 17^2$$

$$\triangle AKB \Rightarrow AB = 2 \cdot \frac{17\sqrt{2}}{2} = 17\sqrt{2} \quad 2x^2 = 289 \Rightarrow x = \frac{17\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: $17\sqrt{2}$



Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



ЗАДАЧА 7

Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно 30° и 135° , а $CD = 17$.

Решение.

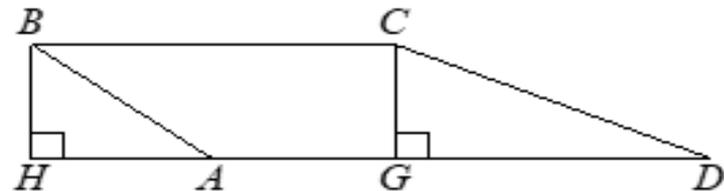
Проведём перпендикуляры $BH = CG$ к прямой AD .

В прямоугольном треугольнике CDG угол GCD равен 45° , следовательно,

$$CG = CD \cdot \cos 45^\circ = \frac{17\sqrt{2}}{2}.$$

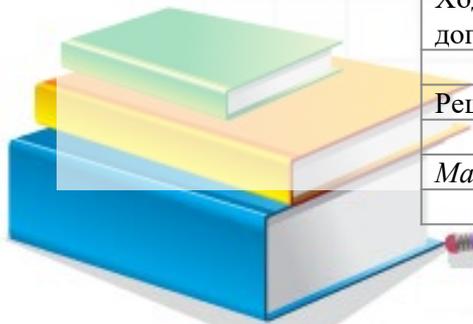
В прямоугольном треугольнике ABH катет $BH = CG = \frac{17\sqrt{2}}{2}$, а угол ABH

равен 60° . Значит, $AB = \frac{BH}{\cos 60^\circ} = \frac{17\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 17\sqrt{2}$.



Ответ: $17\sqrt{2}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения, или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



Спасибо за внимание!

