

Игровые стратегии

Разбор задачи №26
ЕГЭ по информатике



- все позиции в простых играх делятся на **выигрышные** и **проигрышные**
- **выигрышная позиция** – это такая позиция, в которой игрок, делающий первый ход, может гарантированно выиграть при любой игре соперника, если не сделает ошибку; при этом говорят, что у него есть **выигрышная стратегия** – алгоритм выбора очередного хода, позволяющий ему выиграть
- если игрок начинает играть в **проигрышной** позиции, он обязательно проиграет, если ошибку не сделает его соперник; в этом случае говорят, что у него **нет выигрышной стратегии**; таким образом, общая стратегия игры состоит в том, чтобы своим ходом **создать проигрышную позицию** для соперника

из теории игры

- выигрышные и проигрышные позиции можно охарактеризовать так:
 - позиция, из которой все возможные ходы ведут в выигрышные позиции – **проигрышная**;
 - позиция, из которой хотя бы один из возможных ходов ведет в проигрышную позицию – **выигрышная**, при этом стратегия игрока состоит в том, чтобы перевести игру в эту проигрышную (для соперника) позицию.

из теории игры

Одна куча камней демо 2015

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит **куча камней**. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу **один** или **три** камня или увеличить количество камней в куче **в два раза**. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 18 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 35.

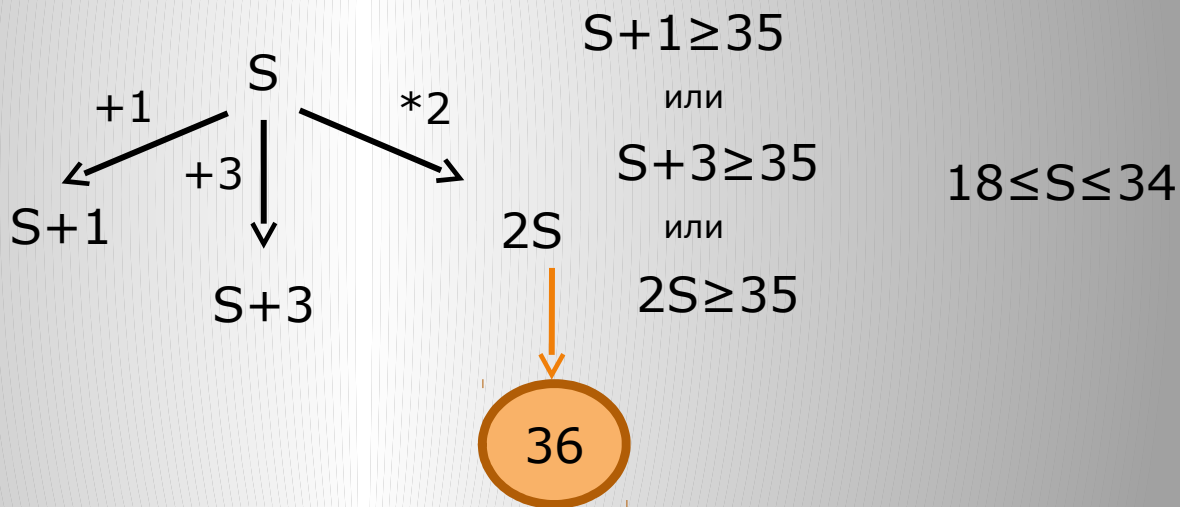
Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу, в которой будет 35 или больше камней. В начальный момент в куче было S камней; $1 \leq S \leq 34$. Будем говорить, что игрок имеет *выигрышную стратегию*, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

Одна куча камней демо 2015

Задание 1

а) Укажите все такие значения числа S , при которых Петя может выиграть в один ход. Обоснуйте, что найдены все нужные значения S , и укажите выигрывающие ходы.

б) Укажите такое значение S , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Вани.



Одна куча камней

демо 2015

Задание 1

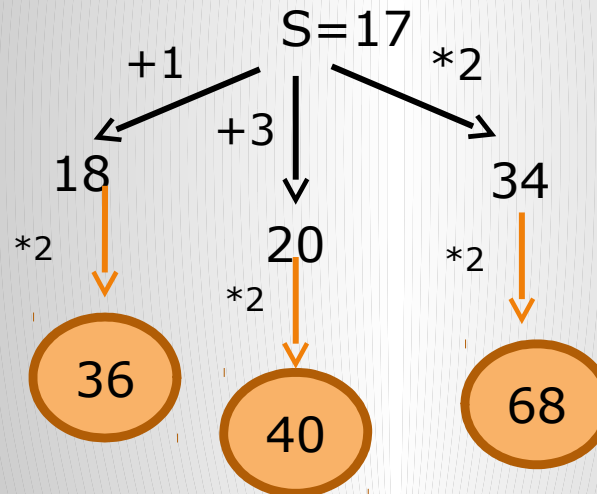
а) Укажите все такие значения числа S , при которых Петя может выиграть в один ход. Обоснуйте, что найдены все нужные значения S , и укажите выигрывающие ходы.

б) Укажите такое значение S , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Вани.

Должно быть $S < 18$

Петя

Ваня



Одна куча камней демо 2015

Ответ к Заданию 1.

а) Петя может выиграть, удвоив количество камней в куче, если $S = 18, \dots, 34$. При меньших значениях S за один ход нельзя получить кучу, в которой не менее 35 камней.

б) Ваня может выиграть первым ходом (как бы ни играл Петя), если исходно в куче будет $S = 17$ камней. Тогда после первого хода Пети в куче будет 18, 20 камней или 34 камня. Во всех случаях Ваня удваивает количество камней и выигрывает в один ход.

Задание 2

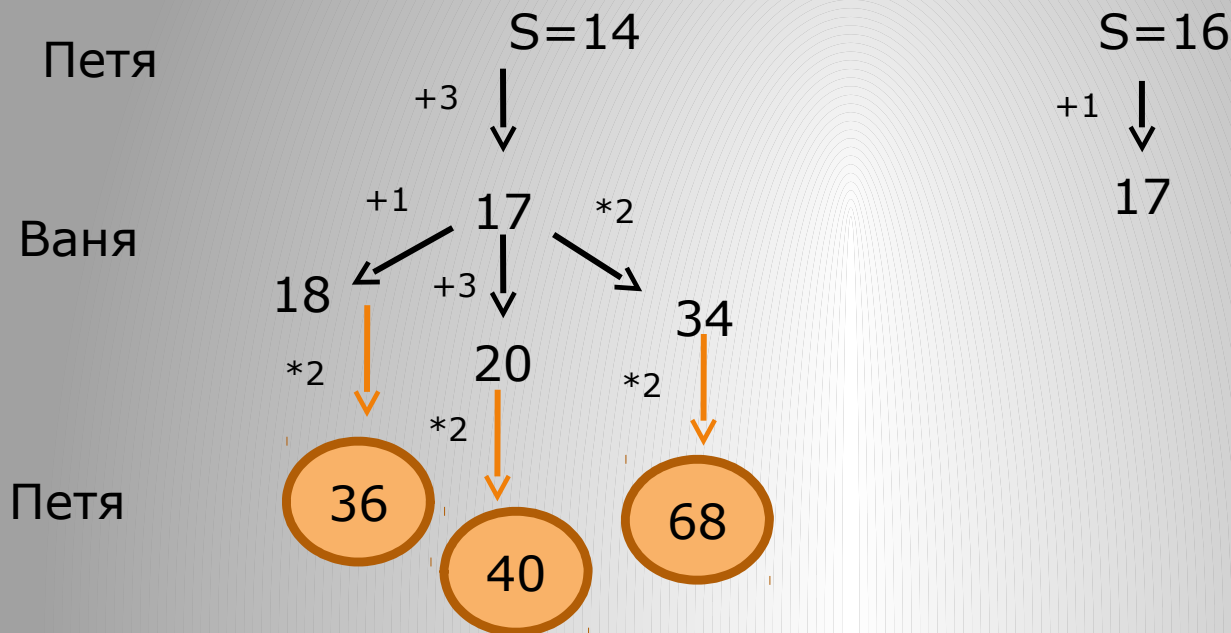
Укажите два таких значения S , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- ~ Петя не может выиграть за один ход;
- ~ Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Для каждого указанного значения S опишите выигрышную стратегию Пети.

Одна куча камней

демо 2015



Ответ к Заданию 2. Возможные значения S : 14, 16. В этих случаях Петя, очевидно, не может выиграть первым ходом. Однако он может получить кучу из 17 камней и создать проигрышную позицию для Вани. Эта позиция разобрана в п. 16. В ней игрок, который будет ходить (теперь это Ваня), выиграть не может, а его противник (т.е. Петя) следующим ходом выиграет.

Одна куча камней демо 2015

Задание 3

Укажите значение S , при котором одновременно выполняются два условия:

- ~ у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- ~ у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Вани. Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вани (в виде рисунка или таблицы). На рисунке на рёбрах дерева указывайте, кто делает ход; в узлах – количество камней в позиции

Одна куча камней

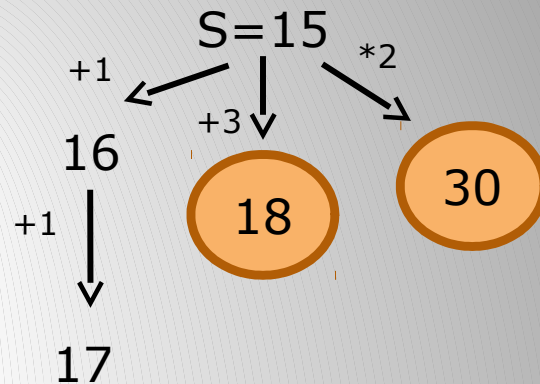
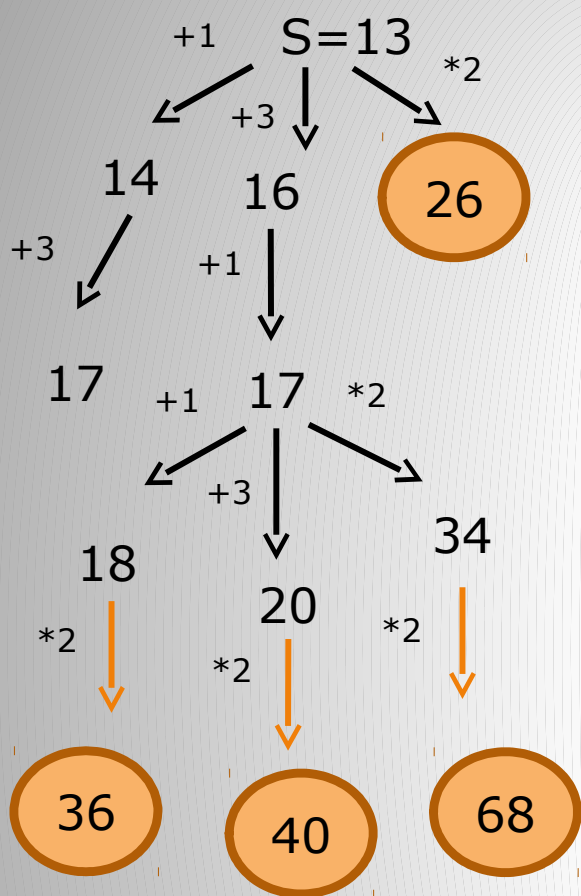
демо 2015

Петя

Ваня

Петя

Ваня



Одна куча камней демо 2015

Ответ к Заданию 3. Возможные значения S : 13, 15.

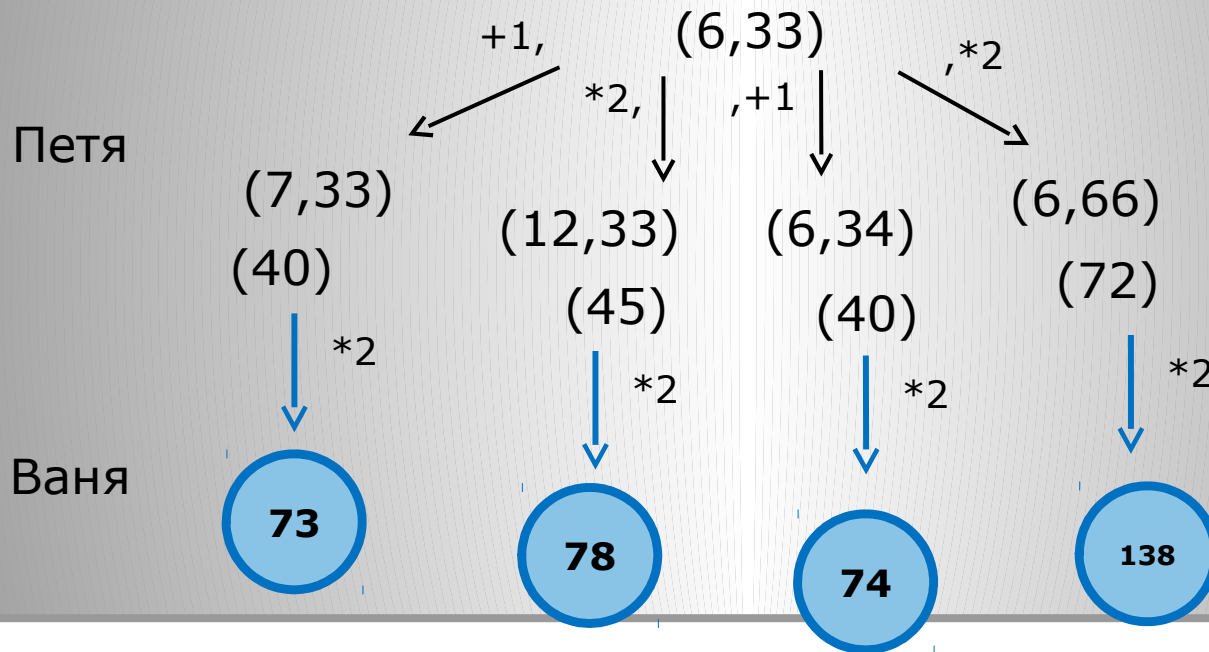
Например, для $S = 13$ после первого хода Пети в куче будет 14, 16 или 26 камней. Если в куче станет 26 камней, Ваня удвоит количество камней и выиграет первым ходом (в случае ошибки Пети). У Вани нет стратегии гарантированно позволяющей ему выиграть первым ходом, но существует выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть вторым ходом при любом ходе Пети. Так после первого хода Пети в куче остается 14 или 16 камней. Эта ситуация разобрана в п. 2. В этой ситуации игрок, который будет ходить (теперь это Ваня), выигрывает своим вторым ходом, создавая, проигрышную позицию для Пети (17 камней), которая разобрана в п.16. Дерево возможных партий представлено в виде графа.

Две кучи камней демо 2016

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат **две кучи камней**. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) **один** камень или увеличить количество камней в куче в **два раза**. Например, пусть в одной куче **10 камней, а в другой 7 камней**; такую позицию в игре будем обозначать $(10, 7)$. Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций: $(11, 7)$, $(20, 7)$, $(10, 8)$, $(10, 14)$. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится **не менее 73**. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 73 камня или больше.

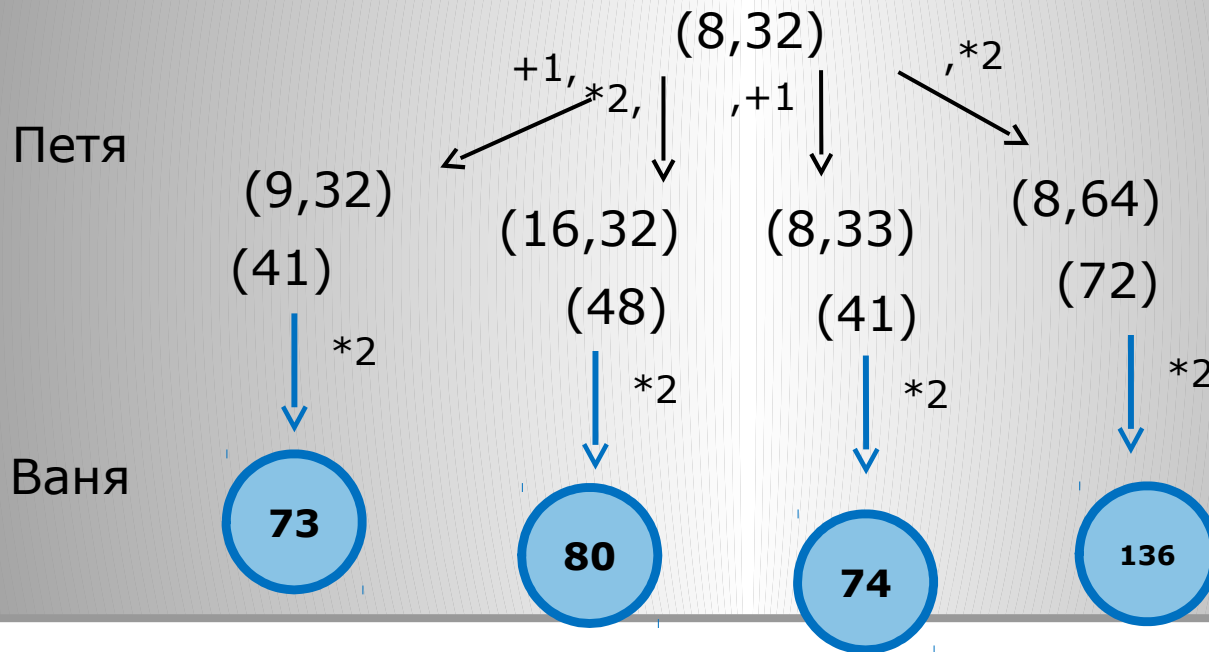
Две кучи камней демо 2016

Задание 1. Для каждой из начальных позиций $(6, 33)$, $(8, 32)$ укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.



Две кучи камней демо 2016

Задание 1. Для каждой из начальных позиций $(6, 33)$, $(8, 32)$ укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.



Две кучи камней демо 2016

Ответ к Заданию 1.

В начальных позициях $(6, 33)$, $(8, 32)$ выигрышная стратегия есть у Вани.

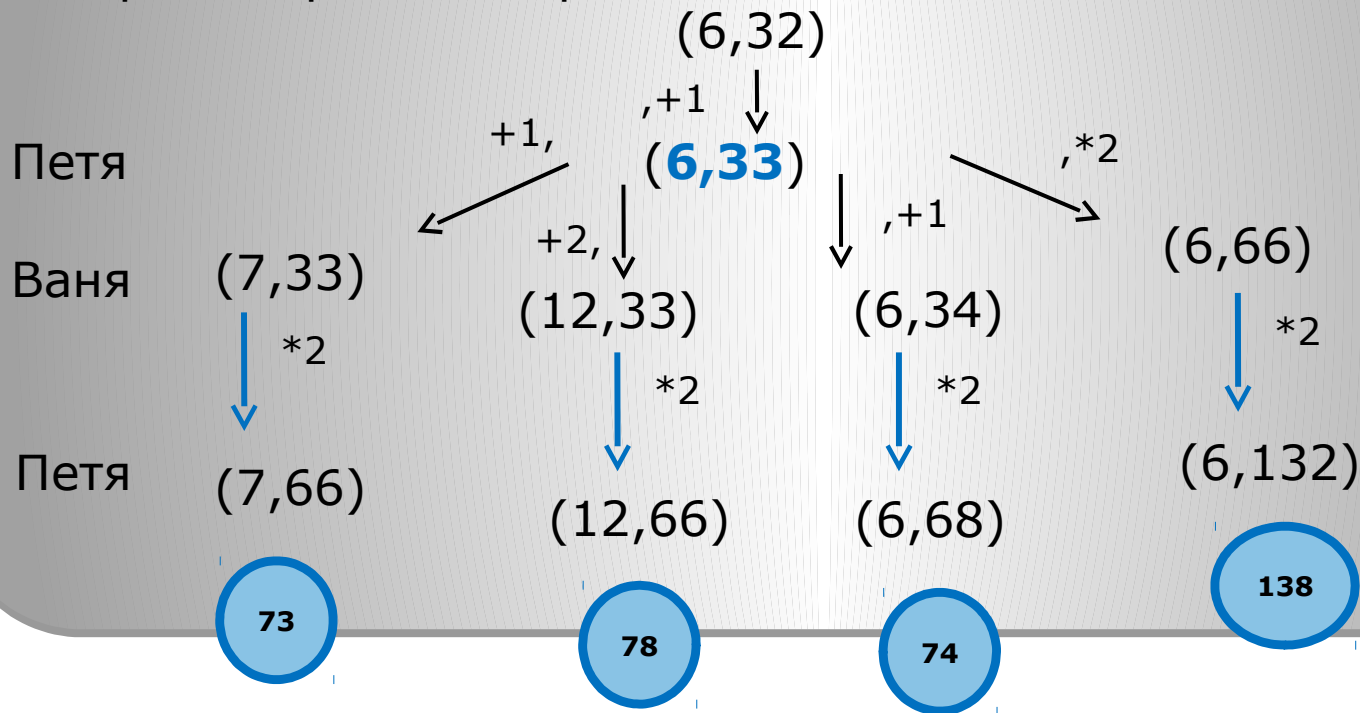
При начальной позиции $(6, 33)$ после первого хода Пети может получиться одна из следующих четырёх позиций: $(7, 33)$, $(12, 33)$, $(6, 34)$, $(6, 66)$. Каждая из этих позиций содержит менее 73 камней. При этом из любой из этих позиций Ваня может получить позицию, содержащую не менее 73 камней, удвоив количество камней во второй куче. Для позиции $(8, 32)$ после первого хода Пети может получиться одна из следующих четырёх позиций: $(9, 32)$, $(16, 32)$, $(8, 33)$, $(8, 64)$. Каждая из этих позиций содержит менее 73 камней. При этом из любой из этих позиций Ваня может получить позицию, содержащую не менее 73 камней, удвоив количество камней во второй куче.

Таким образом, Ваня при любом ходе Пети выигрывает своим первым ходом.

Две кучи камней демо 2016

Задание 2.

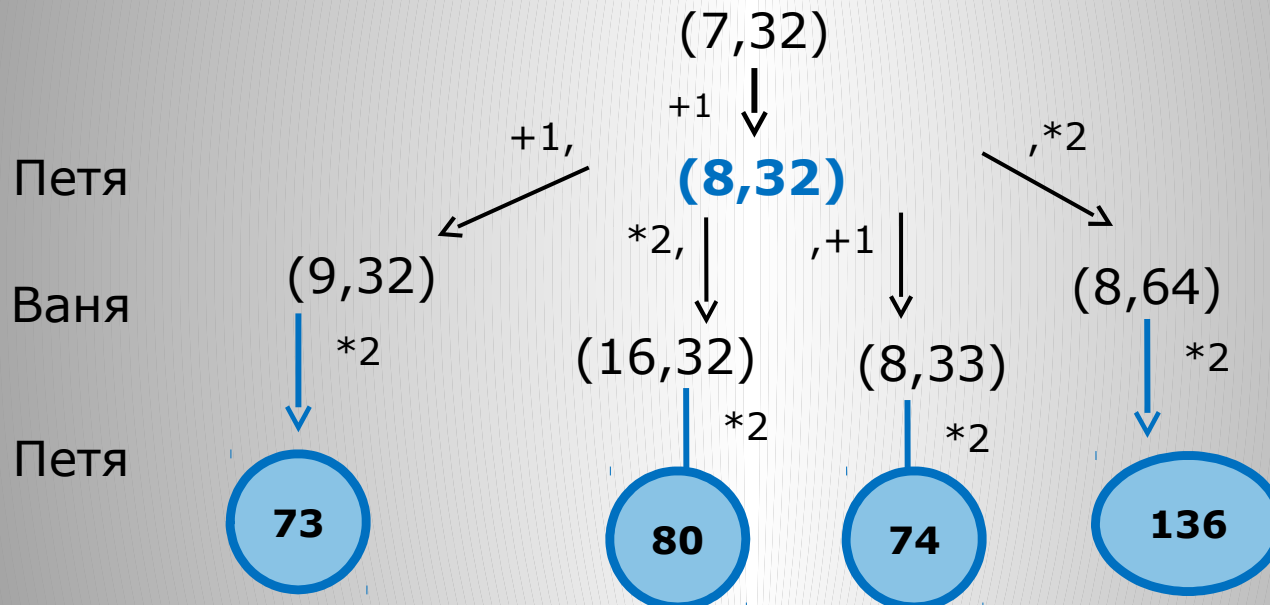
Для каждой из начальных позиций $(6, 32)$, $(7, 32)$, $(8, 31)$ укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.



Две кучи камней демо 2016

Задание 2.

Для каждой из начальных позиций $(6, 32)$, $(7, 32)$, $(8, 31)$ укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.



**При любом ходе Вани приведет к победе Пети
(рассматривалась в задании 1)**

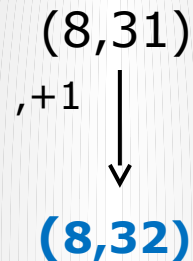
Две кучи камней демо 2016

Задание 2.

Для каждой из начальных позиций $(6, 32)$, $(7, 32)$, $(8, 31)$ укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.

Петя

Ваня



**При любом ходе Вани приведет к победе Пети
(рассматривалась в задании 1)**

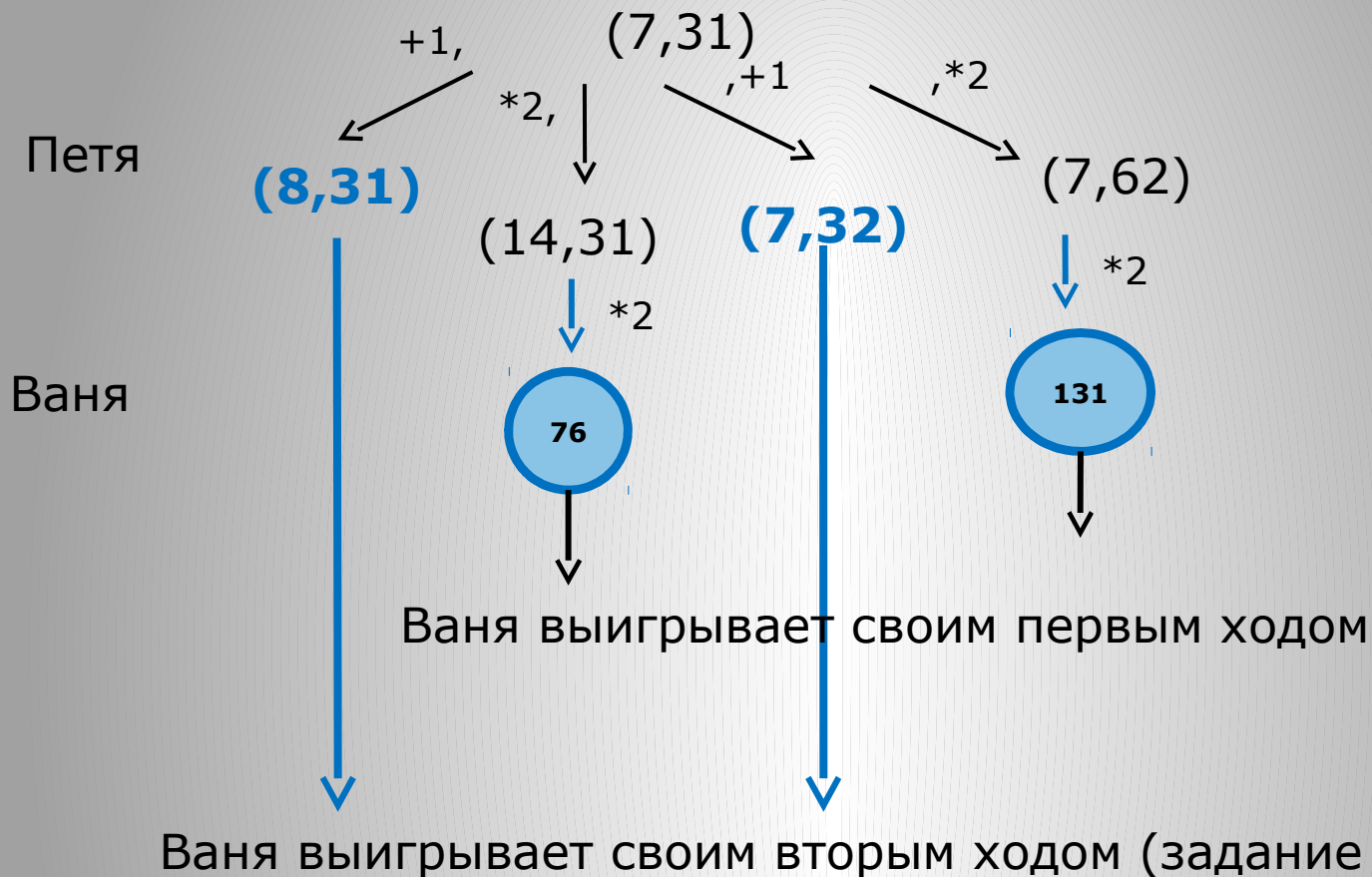
Две кучи камней демо 2016

Ответ к Заданию 2.

В начальных позициях $(6, 32)$, $(7, 32)$ и $(8, 31)$ выигрышная стратегия есть у Пети. При начальной позиции $(6, 32)$ он должен первым ходом получить позицию $(6, 33)$, из начальных позиций $(7, 32)$ и $(8, 31)$. Петя после первого хода должен получить позицию $(8, 32)$. Позиции $(6, 33)$ и $(8, 32)$ рассмотрены при разборе задания 1. В этих позициях выигрышная стратегия есть у игрока, который будет ходить вторым (теперь это Петя). Эта стратегия описана при разборе задания 1. Таким образом, Петя при любой игре Вани выигрывает своим вторым ходом.

Задание 3. Для начальной позиции $(7, 31)$ укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной Вами выигрышной стратегии. Представьте дерево в виде рисунка или таблицы.

Две кучи камней демо 2016

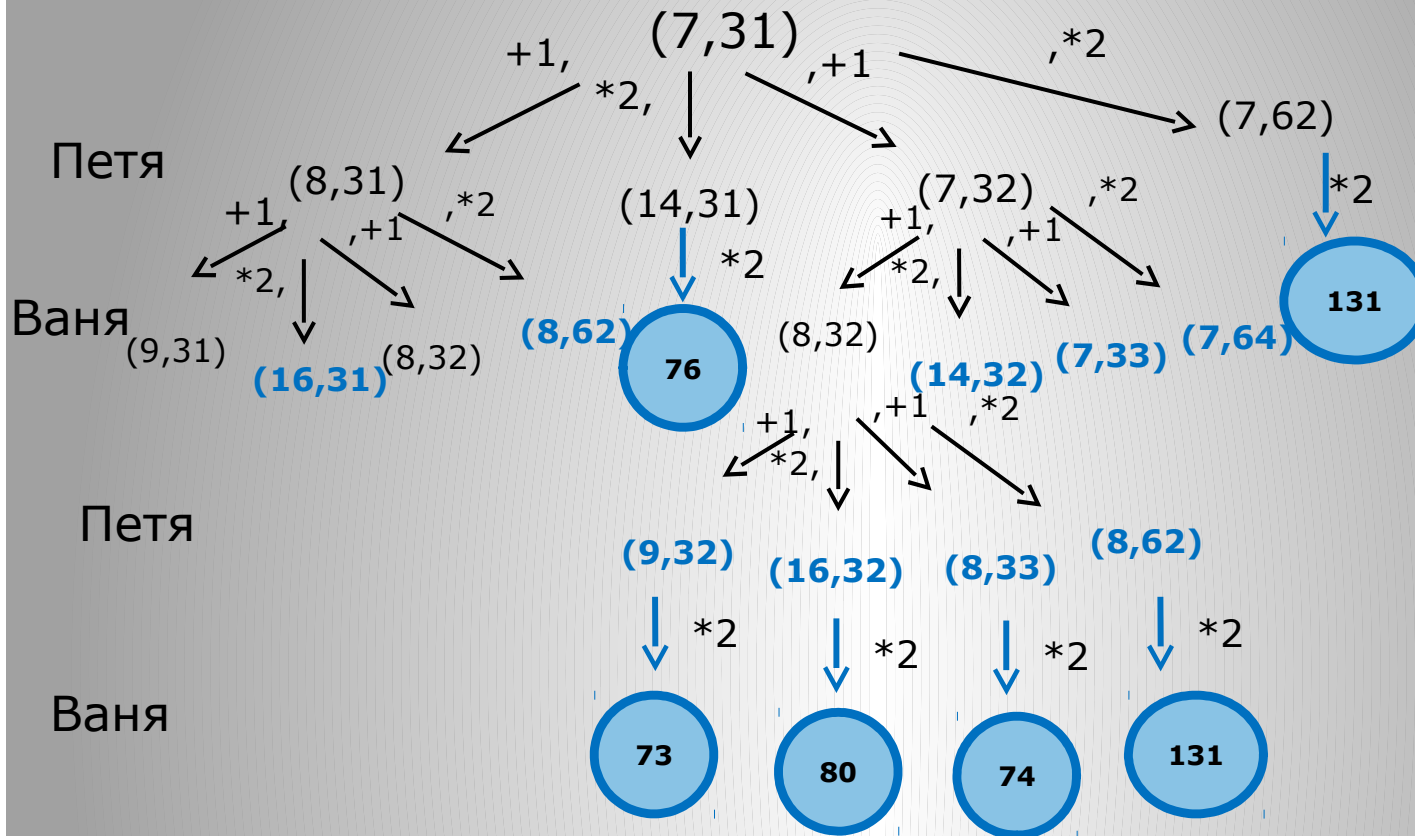


Две кучи камней демо 2016

Ответ к Заданию 3.

В начальной позиции $(7, 31)$ выигрышная стратегия есть у Вани. После первого хода Пети может возникнуть одна из четырёх позиций: $(8, 31)$, $(7, 32)$, $(14, 31)$ и $(7, 62)$. В позициях $(14, 31)$ и $(7, 62)$ Ваня может выиграть одним ходом, удвоив количество камней во второй куче. Позиции $(8, 31)$ и $(7, 32)$ были рассмотрены при разборе задания 2. В этих позициях у игрока, который должен сделать ход (теперь это Ваня), есть выигрышная стратегия. Эта стратегия описана при разборе задания 2. Таким образом, в зависимости от игры Пети Ваня выигрывает на первом или втором ходу.

Две кучи камней демо 2016



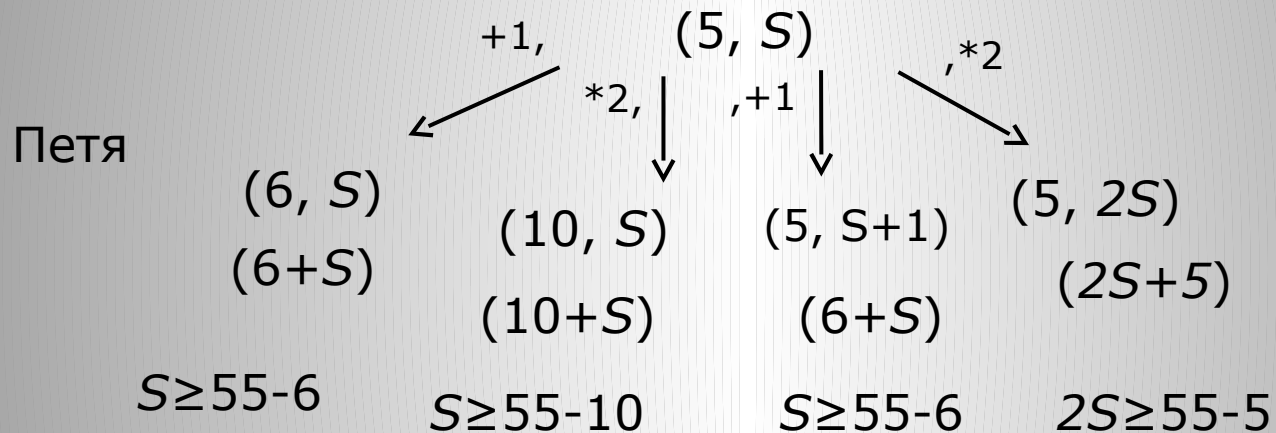
Две кучи камней первый поток 2015

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат **две кучи камней**. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) **один** камень или увеличить количество камней в куче в **два раза**. Например, например в позиции $(10, 7)$ можно получить $(11, 7)$, $(20, 7)$, $(10, 8)$, $(10, 14)$. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится **не менее 55**. Победителем считается игрок, сделавший последний ход. Первоначально в куче было $(5, S)$ камней $1 \leq S \leq 49$.

Две кучи камней первый поток 2015

Задание 1. а) Укажите все такие значения числа S , при которых Петя может выиграть в один ход и соответствующие выигрышные ходы. Если при некотором значении S Петя может выиграть несколькими способами достаточно указать один выигрышный ход.

б) Сколько существует значений S , при которых Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

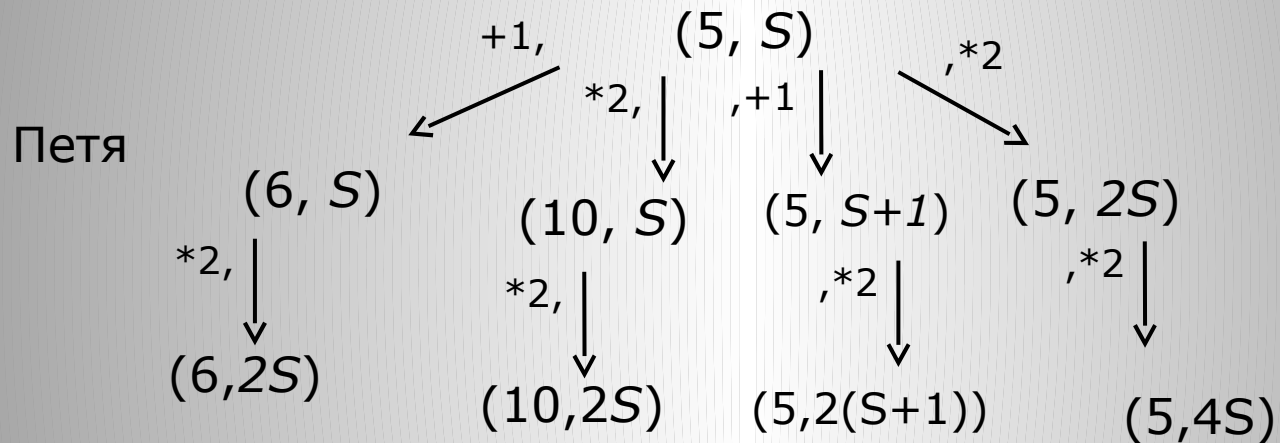


Если $25 \leq S \leq 49$, то Петя выигрывает своим первым ходом

Две кучи камней первый поток 2015

Задание 1. а) Укажите все такие значения числа S , при которых Петя может выиграть в один ход и соответствующие выигрышные ходы. Если при некотором значении S Петя может выиграть несколькими способами достаточно указать один выигрышный ход.

б) Сколько существует значений S , при которых Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.



$$6+2S \geq 55 \quad \text{и} \quad 10+2S \geq 55 \quad \text{и} \quad 7+2S \geq 55 \quad \text{и} \quad 5+4S \geq 55$$

Две кучи камней первый поток 2015

$S \geq 25$ и

$S \geq 23$ и

\Rightarrow

$S \geq 25$

$S \geq 24$ и

$S \geq 13$

Ответ к Заданию 1.

а) Петя может выиграть, удвоив количество камней в куче, если $S = 25, \dots, 49$. При меньших значениях S за один ход нельзя получить кучу, в которой не менее 55 камней.

б) Чтобы второй игрок Ваня выиграл первым ходом (как бы ни играл Петя), число камней должно быть ≥ 25 , однако как следует из обоснования решения задания 1а при $S \geq 25$ своим первым ходом выигрывает Петя. Это означает, что таких значений S не существует, т.е. $S=0$ камней, при которых первый игрок Петя не может выиграть первым ходом. камней.

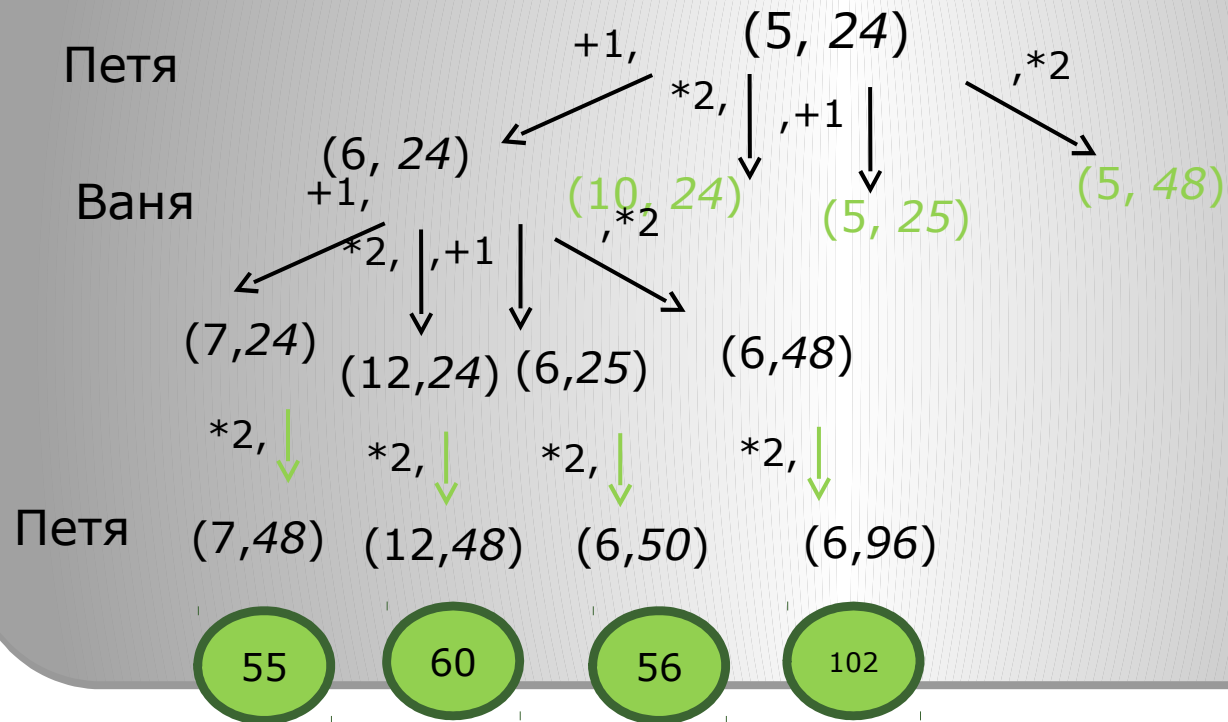
Две кучи камней первый поток 2015

Задание 2

Укажите такие значения S , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- ~ Петя не может выиграть за один ход;
- ~ Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Пети.



Две кучи камней первый поток 2015

Ответ к Заданию 2.

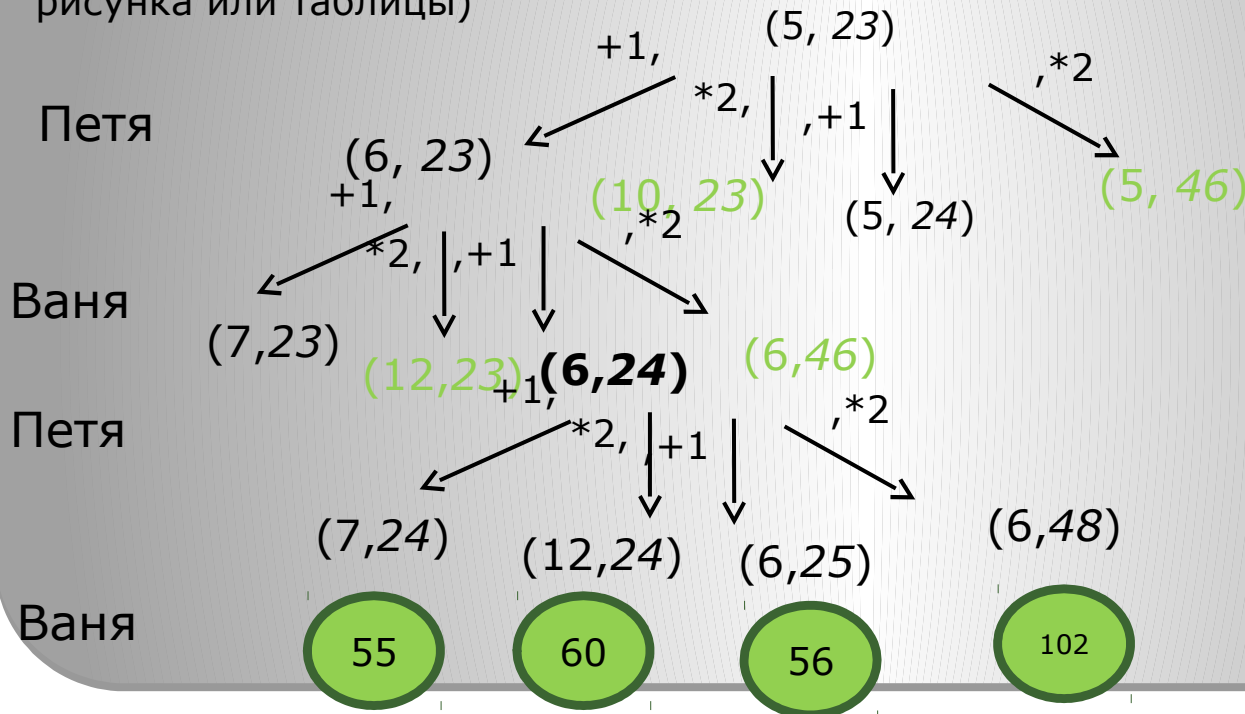
При значении $S=24$ у Пети есть выигрышная стратегия. Причем выполняются два условия одновременно: Петя не может выиграть своим первым ходом (это рассматривалось в п. 1Б). После первого хода Пети возможны четыре позиции $(6,24)$ $(10,24)$ $(5,25)$ и $(5,48)$. Три последних позиции не могут быть реализованы, т.к. ведут к выигрышу Вани первым ходом и не входят в выигрышную стратегию Пети. Поэтому после первого хода Пети получается позиция $(6,24)$, из которой после первого хода Вани получаются четыре позиции $(7,24)$ $(12,24)$ $(6,25)$ и $(6,48)$, которые все приводят к выигрышу Пети (удвоением камней во второй кучи) вторым ходом.

Две кучи камней первый поток 2015

Задание 3

- Укажите такое значения S , при котором одновременно выполняются два условия:
 - у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
 - у Вани нет стратегии, которая позволяет ему гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Вани. Постройте дерево всех партий возможных при этой выигрышной стратегии Вани (в виде рисунка или таблицы)



Две кучи камней первый поток 2015

Ответ к Заданию 3.

При значении $S=23$ у Вани есть выигрышная стратегия. Причем выполняются два условия одновременно: Ваня не может гарантированно выиграть своим первым ходом, но выигрывает своим вторым ходом при любом ходе Пети. Для начала игры в позиции $(5,23)$ после первого хода Пети возможны четыре позиции $(6,23)$ $(10,23)$ $(5,24)$ и $(5,46)$. Позиции $(10,23)$ и $(5,46)$ ведут к выигрышу Вани первым ходом и не рассматриваются, так у Вани нет стратегии гарантированного выигрыша первым ходом. Поэтому после первого хода Пети получаются позиции $(6,23)$ и $(5,24)$. Так как у Вани есть выигрышная стратегия, то его первый ход приводит к позиции $(6,24)$. Эта выигрышная позиция для второго игрока (теперь это Ваня) описана в задании 2. После второго хода Пети получаются четыре позиции $(7,24)$ $(12,24)$ $(6,25)$ и $(6,48)$, которые все приводят к выигрышу Вани (удвоением камней во второй кучи) вторым ходом.