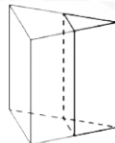
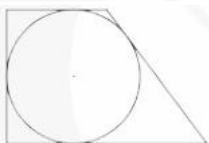


Вариант 9 2024

- 1 Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 40, её большая боковая сторона равна 11. Найдите радиус окружности.

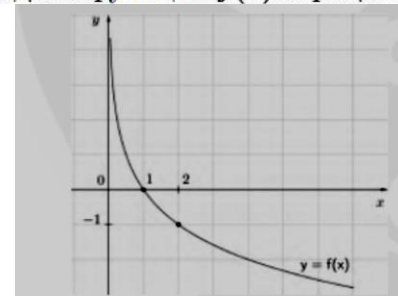
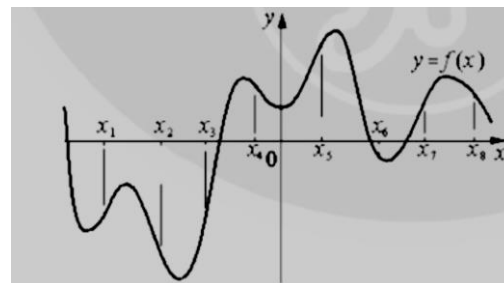


- 2 На плоскости отмечены точки $A(1; 1)$, $B(3; 2)$ и $C(2; 4)$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
- 3 Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 75. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы.
- 4 В чемпионате по гимнастике участвуют 70 спортсменов: 25 из США, 17 из Мексики, остальные из Канады. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Канады.
- 5 Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,32. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.
- 6 Найдите корень уравнения $\frac{1}{3x-1} = 5$.

- 7 Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[15]{5} \cdot 5 \cdot \sqrt[10]{5}}{\sqrt[6]{5}}$.

- 9 Водолазный колокол, содержащий $\nu = 2$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1,75$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2 . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 13,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – постоянная, $T = 300\text{К}$ – температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атм) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 15960 Дж.

- 8 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены восемь точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



- 10 Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 24 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 2 часа, а в исходный пункт теплоход возвращается через 34 часа после отправления из него. Сколько километров прошел теплоход за весь рейс?
- 11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \log_a x$. Найдите значение $f(8)$.
- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - x^2 - 8x + 4$ на отрезке $[1; 7]$.

Часть 2

- 13 а) Решите уравнение $\sin 2x + 2 \sin x = \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3}$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.
- 14 В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .
а) Докажите, что $A_1 P : P B_1 = 3 : 1$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.
б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани $BB_1 C_1 C$.
- 15 Решите неравенство $\log_5^2(25 - x^2) - 3 \log_5(25 - x^2) + 2 \geq 0$.

16 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0,6S$	$0,25S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн рублей.

17 Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Окружность с центром O , построенная на боковой стороне AB как на диаметре, касается боковой стороны CD и второй раз пересекает большее основание AD в точке H , точка Q – середина CD .

а) Докажите, что четырёхугольник $DQOH$ – параллелограмм.

б) Найдите AD , если $\angle BAD = 60^\circ$ и $BC = 2$.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy + 3x - y - 6)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}} = 0, \\ x + y - a = 0. \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

19 На доске написали несколько не обязательно различных двухзначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.