# *Всероссийская олимпиада школьников по математике*

***8 класс***

***Сургут - 2015***

***Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап)***
***2012-2013 учебный год***
**8 класс**

**Задание 1**

В числе 3141592653589793 зачеркните 7 цифр так, чтобы осталось как можно большее число.

**Задание 2**

Постройте график функции:

$$\mathbf{y} = |2x-4| - |x|.$$

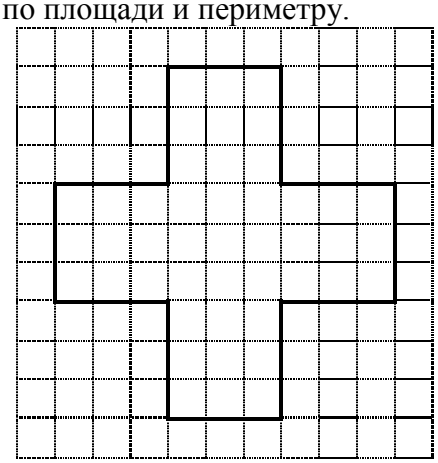
**Задание 3**

Решите уравнение, содержащее 2012 пар скобок:

$$x\text{-}(x\text{-}(x\text{-}\ldots\text{-}(x\text{-}(x\text{-}1005))..))=1007.$$

**Задание 4**

Разрежьте крест, составленный из пяти одинаковых квадратов размером 3 х 3, на три многоугольника, равных по площади и периметру.



**Задание 5**

На скамейке сидят 10 детей. Может ли случиться, что между каждыми двумя мальчи-ками сидит чётное число детей, а между каждыми двумя девочками — нечётное число де-тей?

## *Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап) 2012-2013 учебный год*

***8 класс.***

***Ответы и решения***

1. В числе 3141592653589793 зачеркните 7 цифр так, чтобы осталось как можно большее число.

**Решение:**

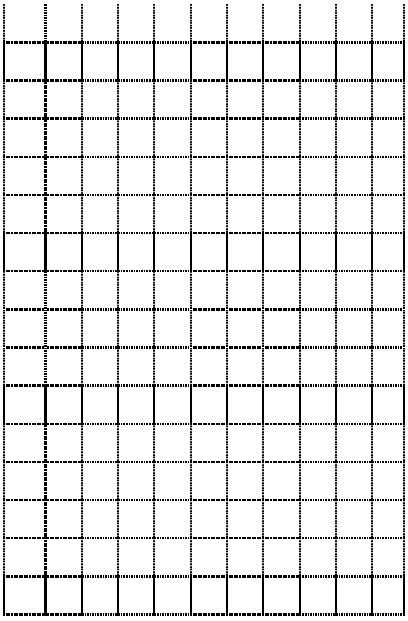
Число тем больше, чем больше цифра старшего разряда. Чтобы число начиналось с 9, на до зачеркнуть первые пять цифр 3141592653589793. Осталось зачеркнуть еще 2 цифры. Зачеркивая 2, получаем на втором месте 6 (больше 6 нам получить не удастся). Чтобы вторая цифра числа была как можно больше, мы можем зачеркнуть только 2. Наибольшей цифрой из возможных на третьем и четвертом местах могут быть 5. Для этого нам надо зачеркнуть 3.

Ответ: 965589793.

2. Постройте график функции:

$y = |2x-4| - |x|$.

**Решение:**



3. Решите уравнение, содержащее 2012 пар скобок:

$x$-($x$-($x$-…-($x$-($x$-1005))..))=1007.

Ответ: 2012

Решение: 1) При раскрытии первой пары скобок уравнение примет вид

($x$-($x$-…-($x$-($x$-1005))..))=1007

2) При раскрытии второй пары скобок уравнение примет вид

$x$-($x$-($x$-…-($x$-($x$-1005))..))=1007

3) При раскрытии третьей пары скобок уравнение примет вид

($x$-($x$-…-($x$-($x$-1005))..))=1007

4) При раскрытии четвёртой пары скобок уравнение примет вид

$x$-($x$-($x$-…-($x$-($x$-1005))..))=1007

……..

2012) При раскрытии 2012 пары скобок уравнение примет вид

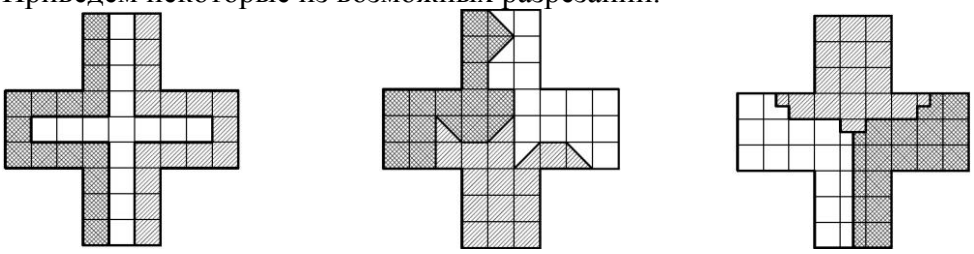
$x$-1005=1007

откуда $x$ = 2012

4. Разрежьте крест, составленный из пяти одинаковых квадратов размером 3 х 3, на три многоугольника, равных по площади и периметру.

**Решение.**

Приведём некоторые из возможных разрезаний.



5. На скамейке сидят 10 детей. Может ли случиться, что между каждыми двумя мальчиками сидит чётное число детей, а между каждыми двумя девочками — нечётное число детей?

Ответ: Не может.

**Решение:**

Пронумеруем сидящих на скамейке слева направо. Пусть под номером 1 — девочка. Тогда на всех местах с чётными номерами сидят мальчики (ведь между первой девочкой и любым ребёнком под чётным номером — чётное число детей). Но между любыми двумя такими мальчиками — нечётное число детей, что противоречит условию. Значит, под номером 1 — мальчик. Тогда на местах 3, 5, 7, 9 — девочки. Две девочки не могут сидеть рядом (иначе между ними 0 детей — чётное число), поэтому на местах 2, 4, 6, 8 — мальчики. Но между любыми двумя из этих четырёх мальчиков — нечётное число детей. Противоречие.

***Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап)***
***2013-2014 учебный год***

**8 класс**

**Задание 1**

Упростите $(2n+1)^2+(2n^2+2n)^2-(2n^2+2n+1)^2$

**Задание 2**

Постройте график функции: $y = \frac{x-5}{x^2-25} + \frac{2x+9}{x+5}$

**Задание 3**

Высоты $AA_1$ и $CC_1$ остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что если OA = OC, то треугольник ABC равнобедренный.

**Задание 4**

Арбуз весил 10 кг и содержал 99% воды. Когда он немного усох, то стал содержать 98% воды. Сколько теперь весит арбуз?

**Задание 5**

Малыш и Карлсон поочередно берут конфеты из одного пакета. Малыш берет одну конфету, Карлсон – 2, затем Малыш берет 3 конфеты, Карлсон – 4 и так далее. Когда количество оставшихся в пакете конфет станет меньше необходимого, тот, чья очередь наступила, берет все оставшиеся конфеты. Сколько конфет было в пакете первоначально, если у Малыша в итоге оказалась 101 конфета.

## *Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап) 2013-2014учебный год*

***8 класс.***
***Ответы и решения***

**1.** Упростите $(2n+1)^2+(2n^2+2n)^2-(2n^2+2n+1)^2$

**Ответ:** 0

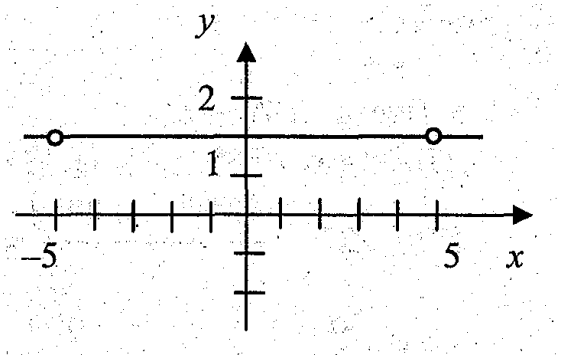
**Решение:**

$(2n+1)^2+(2n^2+2n)^2-(2n^2+2n+1)^2 = 4n^2+4n+1+4n^4+8n^3+4n^2-4n^4-4n^3-2n^2-4n^3-4n^2-2n-2n^2-2n-1=0$

**2**. Постройте график функции: $y = \frac{x-5}{x^2-25} + \frac{2x+9}{x+5}$

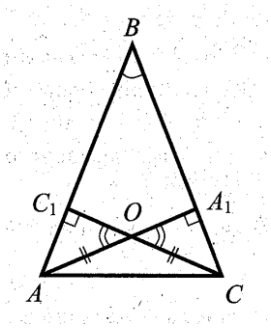
**<u>Решение</u>**

$y=2,\ x \neq \pm 5$




**3.** Высоты $AA_1$ и $CC_1$ остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что если OA = OC, то треугольник ABC равнобедренный.

**Доказательство:**




$\Delta AOC_1 = \Delta COA_1$ по гипотенузе и острому углу. Из равенства треугольников получаем $OC_1=OA_1$, поэтому $AA_1=CC_1$ и $\Delta ABA_1 = \Delta CBC_1$ по катету и острому углу. Откуда получаем AB=BC, то есть $\Delta ABC$ равнобедренный.

**4.** Арбуз весил 10 кг и содержал 99% воды. Когда он немного усох, то стал содержать 98% воды. Сколько теперь весит арбуз?

**Ответ:** 5 кг.

**Решение:** Масса «сухого вещества» арбуза составляет 1 % первоначальной массы, или 10 • 0,01 = 0,1 (кг). После того, как арбуз усох, масса «сухого вещества» составляла 2 % от новой массы арбуза. Найдем эту новую массу: 0,1:0,02 = 5 (кг). После того как арбуз усох, его масса уменьшилась вдвое.

**5.** Малыш и Карлсон поочередно берут конфеты из одного пакета. Малыш берет одну конфету, Карлсон – 2, затем Малыш берет 3 конфеты, Карлсон – 4 и так далее. Когда количество оставшихся в пакете конфет станет меньше необходимого, тот, чья очередь наступила, берет все оставшиеся конфеты. Сколько конфет было в пакете первоначально, если у Малыша в итоге оказалась 101 конфета.

Ответ: 211

**Решение:**

Решение: Так как 1+3+5+…+17+19=100, то следует, что Малыш в предпоследний раз взял 19 конфет, а в последний раз – одну оставшуюся конфету. Поэтому первоначально в пакете находилось 1+2+3+4+…+19+20+1=211 (конфет)

***Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап)***
***2014-2015 учебный год***

**8 класс**

**Задание 1**

Найдите угол между часовой и минутной стрелками в 7 ч 38 мин.

**Задание 2**

Решите уравнение $x - 2 = \frac{|x-1|}{(x-1)}$.

**Задание 3**

По прогнозу экспертов, цены на квартиры в Сургуте через год упадут: в рублях на 20%, в евро на 40%. А в Сочи цены в рублях упадут на 10%. На сколько упадут цены в Сочи в евро?

**Задание 4**

В прямоугольнике *ABCD* на стороне *BC* взята точка *M* так, что ∠AMD = ∠AMB. Найдите эти углы, если AD = 2AB.

**Задание 5**

Найдите все тройки положительных чисел, для которых выполняется равенство $a^2(a-1)+b^2(b-1)+c^2(c-1) = a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)$.

***Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап)***
***2014-2015 учебный год***
**8 класс**

**Решение:**

**<u>Задание 1</u>**

Найдите угол между часовой и минутной стрелками в 7 ч 38 мин.

**Решение:** Часовая стрелка проходит за час 30°, а за минуту – 0,5°. Значит, к данному моменту времени она прошла 7·30° + 38·0,5° = 229° от положения в полночь. Минутная стрелка проходит за минуту 6°, т.е. за 38 минут – 228°. Значит, искомый угол равен 1°**Ответ. 1°**

**<u>Задание 2</u>**

Решите уравнение $x - 2 = \frac{|x-1|}{(x-1)}$

**Решение:** Если x>1, то x - 2=1, откуда x=3. Условие x>1 выполнено. Получили x=3 – корень данного уравнения. Если x<1, то x - 2= -1, откуда x=1, что невозможно. x=1 брать нельзя, поскольку на ноль делить нельзя.

**Ответ. 3**

**<u>Задание 3</u>**

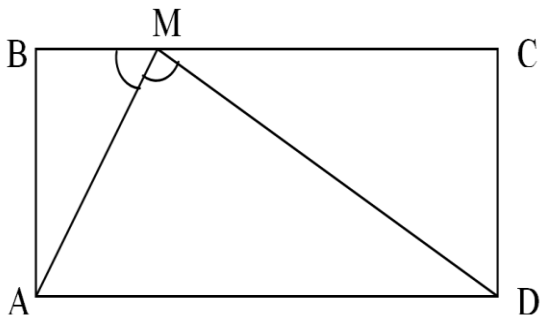
По прогнозу экспертов, цены на квартиры в Сургуте через год упадут: в рублях на 20%, в евро на 40%. А в Сочи цены в рублях упадут на 10%. На сколько упадут цены в Сочи в евро?

**Решение**. В Сургуте через год цены на жилье составят 80% в рублях и 60% в евро от нынешних. Значит, цена самого евро в рублях изменится в 0,6 : 0,8 = 3/4 раз. В Сочи цена квартиры в рублях будет составлять 90%, а в евро – 90%·3/4 = 67,5% от нынешней. Значит, она уменьшится на 32,5%.

**Ответ. 32,5%.**

**<u>Задание 4</u>**

В прямоугольнике *ABCD* на стороне *BC* взята точка *M* так, что ∠AMD = ∠AMB. Найдите эти углы, если AD = 2AB.




**Решение:** т. к. *ABCD* – прямоугольник, то прямые *BC*|| *AD* по свойству. ∠AMB и ∠MAD накрест лежащие, образованные параллельными прямыми *BC*|| *AD* при секущей AM, то ∠AMB =∠MAD. Из ∠AMB =∠AMD и ∠ AMB = ∠MAD следует ∠AMD = ∠MAD. Значит, треугольник ΔAMD –равнобедренный по признаку. Тогда, *AD* = *DM*. Т. к. *ABCD* – прямоугольник, то *AB* = *CD*. По условию *AD* = 2*AB*. Получаем в прямоугольном треугольнике ΔCMD: *MD* = 2*CD*. Следовательно, ∠CMD = 30°. Т.к. ∠AMB + ∠FMD

$+\angle DMC = 180°$ и $\angle AMB = \angle AMD$, $\angle CMD = 30°$, то$\angle AMB = \angle AMD = (180° - 30°) : 2 = 75°$.
**Ответ:**$\angle AMD = \angle AMB = 75°$.

**<u>Задание 5</u>**

Найдите все тройки положительных чисел, для которых выполняется равенство $a^2(a-1)+b^2(b-1)+c^2(c-1) = a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)$.

**Решение:** Перенесем все слагаемые в левую часть. Используем то, что $x^2(x-1) - x(x-1) = (x^2 - x)(x-1) = x(x-1)^2$. Получим $a(a-1)^2 + b(b-1)^2 + c(c-1)^2 = 0$. Так как a, b, c - положительные числа, слева стоит сумма неотрицательных слагаемых. Их сумма равна нулю, только если каждое слагаемое равно нулю. Но это возможно только при $a = b = c = 1$.

**Комментарий:** Верный ответ без обоснования -0 баллов. Ошибочным является рассуждения вида: если $a^2 > a$, то $a^2(a-1) > a(a-1)$. Такое .доказательство должно оцениваться в 0 баллов. **Ответ.** $a = b = c = 1$.

## *Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап) 2015-2016 учебный год*

**8 класс**

**Задание 1**

Какой цифрой оканчивается сумма $9^{2007}+9^{2006}$ ?

**Задание 2**

Три математика ехали в разных вагонах одного поезда. Когда поезд подъезжал к станции, математики насчитали на перроне 7, 12 и 15 скамеек. Когда поезд отъезжал, каждый из них насчитал еще несколько скамеек, причем один из них насчитал в три раза больше, чем другой. А сколько насчитал третий?

**Задание 3**

Найдите 3 числа, обладающие следующими свойствами: они целые, положительные и сумма обратных величин этих чисел равна 1.

**Задание 4**

Фирма изготавливает лимонный напиток, разбавляя лимонный сок водой. Сначала фирма производила напиток, содержащий 15% лимонного сока. Через некоторое время генеральный директор отдал указание снизить содержание лимонного сока до 10%. На сколько процентов увеличится количество производимого лимонного напитка при тех же объёмах поставок лимонов?

**Задание 5**

Один из углов треугольника на 120° больше другого. Докажите, что биссектриса треугольника, проведённая из вершины третьего угла, вдвое длиннее, чем высота, проведенная из той же вершины.

## *Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап) 2015-2016 учебный год*

**8 класс**
**Решение:**

**Задание 1**

Какой цифрой оканчивается сумма $9^{2007}+9^{2006}$ ?

**Ответ:** Нулём.

**Решение:** $9^{2007}+9^{2006}=9^{2006}(9+1)=9^{2006}\cdot 10$.

**Задание 2**

Три математика ехали в разных вагонах одного поезда. Когда поезд подъезжал к станции, математики насчитали на перроне 7, 12 и 15 скамеек. Когда поезд отъезжал, каждый из них насчитал еще несколько скамеек, причем один из них насчитал в три раза больше, чем другой. А сколько насчитал третий?

**Ответ:** 7 скамеек.

**Решение:** Очевидно, что тот, кто до остановки проехал большую часть перрона, насчитал большее число скамеечек. Пусть первый насчитал 15 скамеек, второй 12, третий 7. Так как первый насчитал на 3 скамейки больше, чем второй, то, когда поезд будет отъезжать, второй увидит эти 3 скамейки, т.е. насчитает на 3 скамейки больше, чем первый. Аналогично третий насчитает на 8 скамеек больше, чем первый, и на 5 скамеек больше, чем второй. Раз кто-то насчитал в 3 раза больше, чем другой, то разница между насчитанными ими скамейками – четное
число (3x-x=2x). В нашем случае разность насчитанных скамеек четна только между первым и третьим и она равна 8. Значит, первый насчитал 8:2=4 скамейки, тогда второй 4+3=7 скамеек.
***Замечание:*** Можно было обойтись и без четности. Пусть первый насчитал x скамеек. Тогда второй x+3, а третий x+8. А дальше составить всевозможные пары и решить получившиеся три уравнения (один насчитал в три раза больше, чем другой в паре): 3x=x+3, 3x=x+8, 3(x+5)=x+8. Только одно из них имеет целое решение.

**Задание 3**

Найдите 3 числа, обладающие следующими свойствами: они целые, положительные и сумма обратных величин этих чисел равна 1.

**Ответ:** (2; 4; 4), (2; 3; 6), (3; 3; 3)

**Задание 4**

Фирма изготавливает лимонный напиток, разбавляя лимонный сок водой. Сначала фирма производила напиток, содержащий 15% лимонного сока. Через некоторое время генеральный директор отдал указание снизить содержание лимонного сока до 10%. На сколько процентов увеличится количество производимого лимонного напитка при тех же объёмах поставок лимонов?
**Ответ:** На 50%.

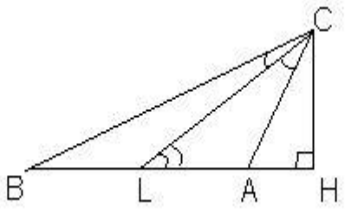
**Решение:** ***<u>1 способ</u>***. Содержание лимонного сока в напитке после указания генерального директора снизилось в полтора раза. Значит, из тех же лимонов можно приготовить в полтора раза больше лимонного напитка. Иными словами, количество производимого лимонного напитка увеличится в полтора раза или на 50%.

***<u>2 способ.</u>*** Пусть x – количество производимого напитка до указания генерального директора. Тогда количество лимонного сока в этом напитке – $0{,}15 \cdot x$. Пусть теперь y – количество производимого напитка после указания генерального директора. Тогда количество лимонного сока в этом напитке – $0{,}1 \cdot y$. Так как подразумевается, что количество лимонного сока не изменилось, получаем равенство $0{,}15 \cdot x = 0{,}1 \cdot y$. Умножив обе части этого равенства на 10, получим: $y = 1{,}5 \cdot x$; или: $y = x + 0{,}5 \cdot x$. Значит, количество производимого напитка увеличилось на 50%.

**<u>Задание 5</u>**

Один из углов треугольника на 120° больше другого. Докажите, что биссектриса треугольника, проведённая из вершины третьего угла, вдвое длиннее, чем высота, проведенная из той же вершины.

**Доказательство:**




Пусть ABC — данный треугольник, $\angle B = \alpha$, $\angle A = 120° + \alpha$. Тогда $\angle C = 60° - 2\alpha$. Если CL — биссектриса данного треугольника, то $\angle CLA = \angle LCB + \angle LBC = (30° - \alpha) + \alpha = 30°$. Пусть CH - высота треугольника ABC, тогда в треугольнике CLH катет CH, лежащий против угла в 30°, в два раза меньше, чем гипотенуза CL.

## *Примерные критерии оценивания заданий по математике*
## *8 класс*

В соответствии с регламентом проведения математических олимпиад школьников каждая задача оценивается из 7 баллов.

Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

| Баллы | Правильность (ошибочность) решения |
|---|---|
| **7** | Полное верное решение. |
| **6 -7** | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| **5 - 6** | Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| **4** | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка. |
| **2 - 3** | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| **1** | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| **0** | Решение неверное, продвижения отсутствуют. Решение отсутствует. |

***Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике***

***Ханты-Мансийский автономный округ – Югра***

***2012-2013 учебный год***

**8 класс**

1. Если к любому трехзначному числу приписать слева любую, кроме нуля, цифру, то получится четырехзначное число. Если к тому же трехзначному числу приписать справа ту же цифру, то получится второе четырехзначное число. Если теперь из большего четырехзначного числа вычесть меньшее, то разность разделится на 9. Докажите.

2. На координатной плоскости *xOy* укажите множество точек (*x*; *y*), координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2 > xy$ .

3. На двух смежных сторонах *AB* и*BC* параллелограмма*ABCD* вне его построены равносторонние треугольники*ABM* и*BCN*соответственно. Докажите, что треугольник *DMN* – равносторонний.

4. Известно, что $a < 1, b > 2$ . Докажите, что .

5. В классе 30 учеников. Они сидят по двое за 15 партами так, что ровно половина всех девочек сидят с мальчиками. Докажите, что учеников класса не удастся пересадить так, чтобы ровно половина всех мальчиков сидели с девочками.

**Решение:**

**8 класс**

1. Если к любому трехзначному числу приписать слева любую, кроме нуля, цифру, то получится четырехзначное число. Если к тому же трехзначному числу приписать справа ту же цифру, то получится второе четырехзначное число. Если теперь из большего четырехзначного числа вычесть меньшее, то разность разделится на 9. Докажите.

   ***Доказательство.*** Пусть $\overline{abc}$ исходное трехзначное число и к нему слева и справа приписывается не нулевая цифра *d*. Тогда при приписывании слева получим четырехзначное число $\overline{dabc} = 1000d + \overline{abc}$, а при приписывании справа получим четырехзначное число $\overline{abcd} = 10\overline{abc} + d$ . Если первое число больше, то их разность равна $999d - 9\overline{abc}$, если больше второе, то разность равна $9\overline{abc} - 999d$ . В обоих случаях разность делится на 9.

   *Примечание. Рассмотрен один случай разности – минус 1 балл. Если в качестве доказательства рассмотрены частные случаи (конкретные примеры) – 0 баллов.*

2. На координатной плоскости *xOy* укажите множество точек (*x*; *y*), координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2 > xy$ .

   ***Первое решение.*** Заметим, что точки (0; *y*), лежащие на оси *Oy*, не удовлетворяют данному неравенству, а точки (*x*; 0), $x \neq 0$ , лежащие на оси Ox, - удовлетворяют. Далее, рассмотрим точки каждой координатной четверти отдельно. В первой четверти координаты точек положительны: *x*> 0 и *y*> 0. Поэтому, после сокращения на *x*, получим равносильное неравенство $x > y$ . Следовательно, в первой четверти неравенству $x^2 > xy$ удовлетворяют все точки, лежащие под прямой $y = x$ . Для точек второй и четвертой четвертей - $x < 0, \quad y > 0$ и $x > 0, y < 0$ –правая часть неравенства $xy < 0$ , а левая часть $x^2 > 0$ .Следовательно, требуемому неравенству удовлетворяют все точки этих четвертей. В третьей четверти обе координаты всех точек отрицательны: $x < 0, y < 0$ . Поэтому исходное неравенство, после сокращения на отрицательное *x*, будет равносильно неравенству $x < y$ . Следовательно, в этой четверти нашему неравенству удовлетворяют все точки, лежащие над прямой *y* = *x*.

   ***Второе решение***. Перепишем наше неравенство: $x^2 - xy > 0 \Leftrightarrow x(x - y) > 0$ .

   Последнее неравенство равносильно совокупности двух систем: $\begin{cases} x > 0 \\ x > y \end{cases}$ и $\begin{cases} x < 0 \\ x < y \end{cases}$ . Первой системе удовлетворяют координаты всех точек справа от оси *Oy*, лежащие под прямой *y* = *x*. Второй системе удовлетворяют координаты всех точек слева от оси*Oy*, лежащие над прямой *y* = *x*.

*Примечание. Если указаны не все точки, удовлетворяющие данному неравенству, - минус 2-4 балла. Если наряду с верными точками указаны точки, не удовлетворяющие неравенству, - 1-2 балла.*

3. На двух смежных сторонах *AB* и*BC* параллелограмма*ABCD* вне его построены равносторонние треугольники*ABM* и*BCN*соответственно. Докажите, что треугольник *DMN* – равносторонний.

   ***Доказательство.*** Обозначим угол *BAD* параллелограмма через $\alpha$ . Треугольники *ADM*и*DCN* равны по двум сторонам и углу между ними. Действительно, имеем $AM = AB = CD$ , $AD = BC = CN$ , а каждый из углов *DAM*и *DCN* равен $\alpha + 60^0$. Следовательно, *DM* = *DN*. Теперь покажем, что треугольник *BMN*равен треугольнику *ADM* по тому же признаку. В самом деле,*AM* = *BM*, *AD* = *BC* = *BN*, иугол*MBN* =$360^0 - 60^0 - 60^0 - (180^0 - \alpha) = 60^0 + \alpha$ . Таким образом, *MN* = *DM*= *DN*, т. е. треугольник *DMN*– равносторонний.

   *Примечание. Если доказано равенство двух сторон треугольника – 3 балла.*

4. Известно, что $a < 1, b > 2$ . Докажите, что .

   ***Доказательство.*** Выполним преобразования: . Учитывая, что $b - a > 2 - 1 = 1,$ $b - 1 > 1$ и что функция $f(x) = x^2$ при положительных*x* возрастающая, получим .

   *Примечание. Если в левую часть требуемого неравенства подставляются значения a = 1 и b = 2 – 0 баллов.*

5. В классе 30 учеников. Они сидят по двое за 15 партами так, что ровно половина всех девочек сидят с мальчиками. Докажите, что учеников класса не удастся пересадить так, чтобы ровно половина всех мальчиков сидели с девочками.

   ***Доказательство.*** Так как половина всех девочек сидит с мальчиками, то число девочек четно, а значит и число мальчиков четно. Далее, вторая половина девочек, которые не сидят с мальчиками, сидят друг с другом. Это значит, что они разбиты на пары, т. е. половина девочек тоже четное число. Следовательно, общее число девочек кратно 4. Но так как число 30 не кратно 4, то число мальчиков четно, но не кратно 4, а это значит, что если половина мальчиков будет сидеть с девочками, то вторую половину нельзя разбить на пары, чтобы они сидели друг с другом.

   *Примечание. Доказано, что число мальчиков четно – 2 балла. Доказано, что число девочек кратно четырем – 4 балла.*

## *Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике*

## *Ханты-Мансийский автономный округ – Югра*

## *2013-2014 учебный год*

**1. Решите задачу (7 баллов)**

Сколько раз в сутки часовая и минутная стрелки образуют прямой угол?

**2. Решите задачу (7 баллов)**

Аня и Соня были правдивыми девушками и врали только в день своего рождения. Толя знает об этом. 11 ноября Толя спросил каждую из них: «Когда твой день рождения?» Аня сказала: «Он был вчера», а Соня сказала: «Он будет завтра». На следующий день Толя задал тот же вопрос и услышал такие же ответы. Может ли теперь Толя определить дань рождения каждой из девушек?

**3. Решите задачу (7 баллов)**

Дедушка с внуком участвовали в лыжных соревнованиях. Бабушка знает, что по ровному месту оба едут со скоростью 7 км/ч, под гору дедушка развивает скорость 8 км/ч, а внук – 20 км/ч, а в гору дедушка поднимается со скоростью 6 км/ч, внук – 4 км/ч. Может ли бабушка определить, что больше: протяженность спусков или подъемов на трассе соревнований, если лучшее время показал а) внук; б) дедушка?

**4. Решите задачу (7 баллов)**

В любом ли восьмизначном числе можно изменить 7 цифр так, чтобы результат делился на 12345678?

**5. Решите задачу (7 баллов)**

Имеется клетчатое поле 100 х 100 клеток. Каждый узелок сетки покрашен в синий, красный или зеленый цвет. Докажите, что существует прямоугольник, образованный линиями сетки, вершины которого одного цвета.

## Ответы к заданиям

**1. Решите задачу (7 баллов)**

Сколько раз в сутки часовая и минутная стрелки образуют прямой угол?

**Решение.** В сутки часовая стрелка делает два оборота, а минутная – 24 (на 22 оборота больше). В течение каждого такого оборота есть два момента времени, когда стрелки образуют прямой угол.

**Ответ:** 44

**Оценивание.** За верное решение 7 баллов

**2. Решите задачу (7 баллов)**

Аня и Соня были правдивыми девушками и врали только в день своего рождения. Толя знает об этом. 11 ноября Толя спросил каждую из них: «Когда твой день рождения?» Аня сказала: «Он был вчера», а Соня сказала: «Он будет завтра». На следующий день Толя задал тот же вопрос и услышал такие же ответы. Может ли теперь Толя определить дань рождения каждой из девушек?

**Решение.** Одинаковые ответы девушек, которые они давали два дня подряд, говорят о том, что каждая из них солгала хотя бы один раз, а с учетом условия задачи - ровно один раз в день своего рождения. Значит, и Аня, и Соня родились 11 или 12 ноября. Разберём все возможные случаи.

Если Аня родилась 11 ноября, то 11 ноября она солгала, а 12 ноября сказала правду, как и должно быть по условию задачи. Если же Аня родилась 12 ноября, то она солгала дважды, чего не должно быть. Таким образом, Аня родилась 11 ноября.

Если Соня родилась 11 ноября, то она солгала дважды, чего не должно быть. Если же Соня родилась 12 ноября, то 11 ноября она сказала правду, а 12 ноября солгала, как и должно быть по условию. Таким образом, Соня родилась 12 ноября.

**Замечание.** Можно рассуждать по-другому. После того, как выяснено, что девушки родились 11 или 12 ноября, можно заметить, что они не могли родиться в один и тот же день (в этом случае они давали бы одинаковые ответы). Поэтому если мы узнали дату рождения одной из дедушек, то день рождения второй определяется автоматически.

**Ответ:** может. Аня родилась 11 ноября, а Соня – 12 ноября.

**Оценивание.** За верное решение 7 баллов. Если приведены верные рассуждения только по поводу одной из девушек – 4 балла. Если показано, что Аня могла родиться 11 ноября, но не показано, что она не родилась 12 ноября – 2 балла. Аналогично по Соню

**3. Решите задачу (7 баллов)**

Дедушка с внуком участвовали в лыжных соревнованиях. Бабушка знает, что по ровному месту оба едут со скоростью 7 км/ч, под гору дедушка развивает скорость 8 км/ч, а внук – 20 км/ч, а в гору дедушка поднимается со скоростью 6 км/ч, внук – 4 км/ч.

Может ли бабушка определить, что больше: протяженность спусков или подъемов на трассе соревнований, если лучшее время показал а) внук; б) дедушка?

**Решение.** Пусть общая протяженность спусков *x км.*, а подъемов *y км.* Ровную часть пути дедушка и внук проходят за одинаковое время, анна неровную тратят соответственно $t_1 = \frac{x}{8} + \frac{y}{6}$ *и* $t_2 = \frac{x}{20} + \frac{y}{4}$, при этом $t_1 - t_2 = \frac{9x - 10y}{120}$.

Если дедушка преодолел трасу за большее время, то $t_1 - t_2 > 0$ *и* $9x > 10y$, *îòêóäà* $x > y$.

Если дедушка преодолел трассу за меньшее время, то $t_1 - t_2 < 0$ *и* $9x < 10y$. Из последнего неравенства нельзя определить, что больше, *x* или *y*.

**Ответ:** а) да, и при этом протяженность спусков больше протяженности подъемов;

б) нет.

**Оценивание.** За верное решение 7 баллов

**4. Решите задачу (7 баллов)**

В любом ли восьмизначном числе можно изменить 7 цифр так, чтобы результат делился на 12345678?

**Решение.** Выпишем в столбик восьмизначные числа, кратные 12345678:

12345678

24691356

37037034

49382712

61728390

74074068

86419746

98765424

Таких чисел – восемь, поэтому для каждого столбца найдется цифра, которой нет в этом столбце. Составив число из таких цифр (в том же порядке), получим число, которое не совпадает ни с одним числом, кратным 12345678, никакой цифрой.

**Ответ:** нет, например 53256889.

**Оценивание.** За верное решение 7 баллов

**5. Решите задачу (7 баллов)**

Имеется клетчатое поле 100 х 100 клеток. Каждый узелок сетки покрашен в синий, красный или зеленый цвет. Докажите, что существует прямоугольник, образованный линиями сетки, вершины которого одного цвета.

**Решение.** Возьмем 4 вертикальные линии сетки и рассмотрим узлы этих линий. Всего имеется $3^4 = 81$ вариант раскраски четырех точек в три цвета. Поскольку горизонтальных прямых больше 81, то найдутся две горизонтальные прямые на которых лежат одинаково раскрашенные четвёрки клеток. Возьмем любую из них. Среди 4 точек, раскрашенных в три цвета, найдутся две точки одного цвета. Эти точки вместе с соответствующими точками другой четверки и являются вершинами искомого прямоугольника.

**Оценивание.** За верное решение 7 баллов

## *Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике*

## *Ханты-Мансийский автономный округ – Югра*

## *2014-2015 учебный год*

1. Имеется правильная дробь. Ее перевернули и снова получили дробь. Какая из двух дробей ближе к единице: исходная или перевернутая?

2. Можно ли на прямой отметить точки $A,B,C,D,E$ так, чтобы расстояния между ними в сантиметрах оказались равными: $AB = 6, BC = 7, CD = 10, DE = 9, AE = 12$? Если да – приведите пример, если нет – объясните, почему нельзя.

3. Есть три двузначных числа. Если сложить те из них, в записи которых есть цифра 3, получится 80, а если сложить те, в записи которых есть цифра 4, получится 90. Определите, а сколько получится, если сложить все три числа. Приведите все возможные варианты ответов.

4. В ящике лежат 2014 одинаковых шариков четырех различных цветов. Если наугад вытащить 1900 шариков, то среди них обязательно найдутся 4 шарика различных цветов. Какое наименьшее число шариков нужно вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них наверняка нашлись 3 шарика различных цветов?

5. В некоторые клетки шахматной доски $8 \times 8$ поместили 33 жука. Изначально в каждой клетке находится не более одного жука. Каждую секунду жуки переползают в одну из соседних по стороне клетку. Может ли так оказаться, что в какой-то момент времени они все соберутся в одной клетке?

**Ответы и решения**

1. Ответ: ближе к единице исходная дробь.

   Решение. Пусть $\frac{a}{b}$ исходная дробь. Так как она правильная, то $a < b$ и $\frac{a}{b} < 1$, а $\frac{b}{a} > 1$. Тогда расстояние от исходной дроби до единицы равно $1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$, а от перевернутой дроби до единицы равно $\frac{b}{a} - 1 = \frac{b-a}{a}$. Так как $a < b$, то первое расстояние меньше.

   *Критерии.* Рассмотрение конкретных примеров – 0 баллов.

2. Ответ: да, можно.

   Пример расположения точек на прямой с указанными расстояниями: слева на право *A,D,B,E,C*, где $AD = 3, \quad DB = 3, \quad BE = 6, \quad EC = 1$.

   *Критерии.* Любой правильный пример – 7 баллов.

3. Ответ: 127.

   Решение. Пусть $\overline{ab}, \quad \overline{cd}, \quad \overline{ef}$ –двузначные числа и $\overline{ab} + \overline{cd} = 80$. Сумма 80 не может состоять из одного числа – в нем нет цифры 3, и не может быть суммой трех чисел, так как она наименьшая из данных сумм. Следовательно, в записи чисел $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ имеется цифра 3. Цифры *b* и*d* не могут одновременно равняться 3, так как их сумма не будет оканчиваться 0. Цифры*a* и*c* тоже не могут быть одновременно тройками, так как в этом случае сумма чисел не превосходит 39 + 39 = 78 < 80. Следовательно, в этих числах одна из цифр десятков и одна из цифр единиц – тройки. Пусть $a = d = 3$. Тогда $b = 7$, а $c = 4$. Число $\overline{cd} = 43$ содержит в своей записи цифру 4, $\overline{ab} = 37$ – нет. Следовательно, $43 + \overline{ef} = 90$. Отсюда $\overline{ef} = 47$, и полученное число имеет цифру 4. Таким образом, 37 + 43 + 47 = 127. Решение единственное.

   *Критерии.* Верный ответ без обоснования единственности – 4 - 5 баллов.

4. Ответ: 1785 шариков.

   Решение. Из условия следует, что шариков любого цвета в ящике не менее 115. В противном случае можно вытащить 1900 шариков – всех, кроме тех, которых меньше 115, среди которых не все цвета будут представлены. Следовательно, среди любых $1785 = 2014 - 115 - 115 + 1$ шариков, вытащенных из ящика, всегда найдутся три разного цвета. Если, например, в ящике шариков трех цветов будет по 115, а остальные – четвертого цвета, то меньшим числом обойтись нельзя.

*Критерии.* Обосновано, что шариков любого цвета в ящике не менее 115 – 4 балла, неверный ответ из за арифметической ошибки в подсчете – минус 1 балл.

5. Ответ: нет, не может.

На шахматной доске имеется 32 белые и 32 черные клетки, причем каждая клетка граничит только с клетками другого цвета. Следовательно, переползая в соседнюю клетку, жук меняет цвет клетки. Вначале все жуки располагаются в разных клетках. Так как их 33, то найдутся два жука, которые сидят в клетках разного цвета. Поскольку они одновременно переползают в соседние клетки, то в любой момент времени они будут находится в клетках разного цвета, а следовательно, не смогут оказаться в одной клетке.

*Критерии.* Отмечено, что среди клеток, на которых находятся жуки в начальный момент, имеются клетки разного цвета – 4 балла.

***Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике***

***Ханты-Мансийский автономный округ – Югра***

***2015-2016 учебный год***

***8 класс***

1. Представьте числовое выражение $2 \cdot 2015^2 + 2 \cdot 2016^2$ в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

2. Пятизначное число, все цифры которого различны, умножили на 4. В результате получилось число, записываемое теми же цифрами, но в обратном порядке. Какое число было вначале?

3. В треугольнике *ABC* медиана *BM* в два раза меньше стороны *AB* и образует с ней угол в $40^\circ$. Найдите угол *ABC*.

4. Школьный чемпионат по настольному теннису проводили по олимпийской системе. Победитель выиграл 6 партий. Сколько участников турнира выиграло игр больше, чем проиграло? (На турнире по олимпийской системе участников разбивают на пары. Те, кто проиграл игру в первом туре, выбывают. Тех, кто выиграл в первом туре, снова разбивают на пары. Те, кто проиграл во втором туре, выбывают и так далее. В каждом туре для каждого участника нашлась пара.)

5. Винни-Пух и Пятачок вышли одновременно навстречу друг другу из противоположных концов аллеи. Каждый из них идёт с постоянной скоростью и, дойдя до конца аллеи, поворачивает обратно. Первый раз они встретились через две с половиной минуты после начала движения. Через сколько времени после начала движения они встретятся во второй раз, если во время второй встречи каждый из них шел в обратном направлении?

**8 класс**

**Решение:**

1. **Ответ**: например $4031^2 + 1^2$.

*Решение*. 1) Так как , то полагая $n = 2015$ , получим требуемое представление.

2) Воспользуемся известным тождеством $2a^2 + 2b^2 = (a+b)^2 + (a-b)^2$. Имеем $2 \cdot 2015^2 + 2 \cdot 2016^2 = (2015 + 2016)^2 + (2015 - 2016)^2 = 4031^2 + 1^2$.

*Критерии*. Любой верный ответ – 7 баллов.

2. **Ответ**: 21978.

*Решение*. Пусть $\overline{abcde}$ – исходное число. Согласно условию, имеем $\overline{abcde} \cdot 4 = \overline{edcba}$. Так как после умножения исходного числа на 4 получается тоже пятизначное число, то $a \leq 2$ , а так как число $\overline{edcba}$, очевидно, четное, то $a = 2$ . Тогда *e* равно 8 или 9. Но число $4 \cdot$ *e* должно оканчиваться цифрой 2, следовательно, $e = 8$ . При умножении столбиком, из числа 32 = $4 \cdot 8$ три единицы десятков переносятся в следующий разряд. Поэтому *b* есть цифра единиц в числе . Последнее число нечетное, поэтому *b* – нечетная цифра, и $b < 3$ , так нет переноса из разряда тысяч в десятки тысяч. Следовательно, $b = 1$ . Тогда *d* равно 2 или 7, но поскольку $a = 2$ , а цифры в исходном числе различны, то $d = 7$ . При этом три единицы десятков числа 31 = $4 \cdot 7 + 3$ переходят в следующий разряд. Наконец, число должен оканчиваться цифрой *c*. Этому условию удовлетворяет только цифра 9. Остается убедиться в справедливости равенства $\overline{21978} \cdot 4 = \overline{87912}$.

*Критерии*. Верный, обоснованный ответ – 7 баллов; верно найдены первая и последняя цифры – 2 балла; верно найдена вторая цифра – еще плюс 2 балла; только верный ответ (найден перебором) – 3 балла.

3. **Ответ**: $110^0$.

*Решение*. Пусть *N* – середина стороны *AB*. Отрезок *MN* является средней линией треугольника *ABC*, параллельный стороне *BC*, а потому угол *ABC* равен углу *ANM*. С другой стороны, раз *BM* в два раза меньше стороны *AB*, то *BM* = *BN* и треугольник *BMN* равнобедренный. Угол при вершине этого треугольника равен $40^0$, а значит углы при основании *BNM* и *BMN* равны по $70^0$. Угол *ANM* является смежным углу *BNM* и равен $180^0 - 70^0 = 110^0$.

*Критерии*. Верный, обоснованный ответ – 7 баллов; верный ответ без обоснования – 1 балл.

4. **Ответ**: 16.

*Решение*. Так как в каждом туре для каждого игрока нашлась пара, и в каждой паре один из игроков выбывал, то общее количество игроков после каждого тура уменьшалось в два раза. Победитель участвовал в каждом туре и побеждал, следовательно, всего туров было 6. Так как после шестого тура победитель определился однозначно, то всего участников было . Проигравшие в первом туре имеют одно поражение и ноль побед, проигравшие во втором туре имеют одну победу и одно поражение. Все вышедшие в третий тур имеют не менее двух побед и не более одного поражения (после которого они выбыли из турнира), то есть у них количество побед больше чем поражений. Так как после каждого тура число участников уменьшалось в два раза, то в третий тур вышло 16 участников.

*Критерии*. Верный, обоснованный ответ – 7 баллов; получен верный ответ и в целом верные рассуждения, но необоснованно уменьшение числа участников в два раза после каждого тура; приведен верный ответ бес обоснования – 1 балл.

5. Ответ: через 7,5 минуты.

*Первое решение* (алгебраическое). Пусть $S$ – длина аллеи, $u$ – скорость Винни Пуха, а $v$ – скорость Пятачка. Без ограничения общности, будем считать, что $u \geq v$ . Имеем $\frac{S}{u+v} =$ 2,5. По условию, во время второй встречи каждый шел в обратном направлении. Следовательно, , то есть , иначе Винни Пух на обратном пути догонит Пятачка, не дошедшего еще до конца аллеи. Так как скорость Винни Пуха не меньше скорости Пятачка, то Пятачок дойдет до противоположного конца аллеи после того, как Винни Пух дойдет до своего противоположного конца аллеи. На это Пятачок затратит время $t = \frac{S}{v}$. За это время Винни Пух пройдет расстояние $u \cdot \frac{S}{v} \geq S$ . Следовательно, когда Пятачок повернет обратно, Винни Пух будет идти в обратном направлении и расстояние между ними будет равно . Тогда время их встречи после поворота Пятачка будет равно $t_1 = S \cdot \frac{2v-u}{v(u+v)}$, где $u+v$ – скорость сближения Винни Пуха и Пятачка. Следовательно, время второй встречи с момента начала движения будет равно $\frac{S}{v} + S\frac{2v-u}{v(u+v)} = S\frac{u+v+2v-u}{v(u+v)} = \frac{S}{u+v} \cdot 3 = 3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$ мин.

*Второе решение* (арифметическое). Поскольку в момент второй встречи Винни Пуха и Пятачка каждый шел в обратном направлении, то вместе они прошли к этому моменту пути. Следовательно, время второй встречи равно  минуты.

*Критерии*. Верный, обоснованный ответ – 7 баллов; верно составлено уравнение для времени второй встречи, но решено с ошибками – минус 1-2 балла; верный ответ без обоснования – 1 балл.