Ответы и решения для варианта реального варианта ЕГЭ 10.07.2020

1)

За 8 недель в офисе расходуется $700 \cdot 8 = 5600$ листов бумаги. Разделим 5600 на 250:

$$\frac{5600}{250} = \frac{112}{5} = \frac{110+2}{5} = \frac{110}{5} + \frac{2}{5} = 22\frac{2}{5}.$$

Значит, нужно купить не меньше 23 пачек бумаги.

Ответ: 23.

2)От температуры 40° до температуры 60° двигатель нагревался с третьей по пятую минуты: 2 минуты.

3)

Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, проведенную к этому основанию или его продолжению. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15 \text{ см}^2.$$

Ответ: 15.

4)Всего туристов 8, случайным образом из них выбирают 2. Вероятность быть выбранным равна 2 : 8 = 0,25. Ответ: 0,25.

5)

Перейдем к одному основанию степени:

$$3^{2-x} = 81 \Leftrightarrow 3^{2-x} = 3^4 \Leftrightarrow 2 - x = 4 \Leftrightarrow x = -2.$$

Ответ: −2.

6)Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°. Больший из оставшихся углов лежит напротив меньшего из указанных в условии. Поэтому он равен 180° − 58° = 122°. Ответ: 122.

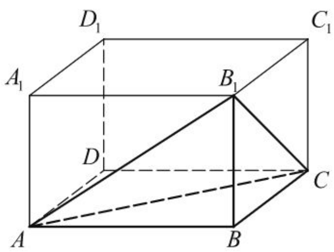
7)Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Производная отрицательна в точках −1 и 4. Модуль тангенса угла наклона касательной явно больше в точке 4, поэтому тангенс в этой точке наименьший. Ответ:4.

8)

Многогранник $ABCB_1$ представляет собой треугольную пирамиду с основанием ABC и высотой $h = BB_1 = AA_1$. Объем такой пирамиды можно вычислить по формуле: $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h$, где $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2}AB \cdot BC$, так как треугольник ABC является прямоугольным. Таким образом,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot AA_1 = 6.$$

Ответ: 6.



9)

Выполним преобразования:

$$36\sqrt{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} = 36\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 36.$$

Ответ: 36.

10)

Найдем, при каком ускорении автомобиль приобретает скорость 80 км/ч. Задача сводится к решению уравнения $v = \sqrt{2la}$. при заданном значении расстояния $l_0 = 0,5$ км:

$$\sqrt{2 \cdot 0,5a} = 80 \Leftrightarrow a = 6400.$$

Ответ: 6400.

11)

Пусть u км/ч — скорость течения, тогда скорость теплохода по течению равна $15 + u$ км/ч, а скорость теплохода против течения равна $15 - u$ км/ч. На весь путь теплоход затратил 40 – 10 = 30 часов, отсюда имеем:

$$\frac{200}{15-u} + \frac{200}{15+u} = 30 \Leftrightarrow \frac{200 \cdot 15 \cdot 2}{225 - u^2} = 30 \Leftrightarrow \frac{200}{225-u^2} = 1 \underset{0<u<15}{\Leftrightarrow} 200 = 225 - u^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 5; \\ u = -5 \end{array}\right. \underset{u>0}{\Leftrightarrow} u = 5.$$

Таким образом, скорость течения реки равна 5 км/ч.

Ответ: 5.

12)

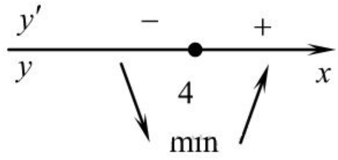
Найдем производную заданной функции:

$$y' = (3-x)'e^{3-x} + (3-x)(e^{3-x})' = -e^{3-x} + (3-x)e^{3-x}\cdot(-1) = -(4-x)e^{3-x} = (x-4)e^{3-x}.$$

Найдем нули производной:

$$(x-4)e^{3-x} = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 4$.

Ответ: 4.

13)

а) Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$|\cos x + \sin x| = \sqrt{2}\sin 2x \Leftrightarrow \begin{cases}(\cos x + \sin x)^2 = 2\sin^2 2x, \\ \sin 2x \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1 + \sin 2x = 2\sin^2 2x, \\ \sin 2x \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 1; \\ \sin 2x = -\dfrac{1}{2},\end{array}\right. \\ \sin 2x \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

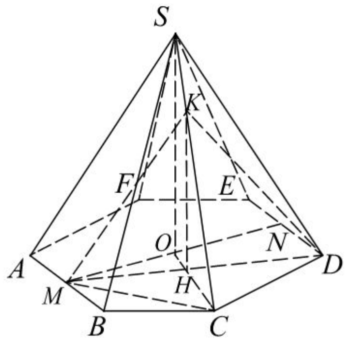
б) Если $k \leq 0$, то $x \leq \dfrac{\pi}{4} < 1$, поэтому при таких k решений на отрезке [3; 5] нет.

Если $k = 1$, то $x = \dfrac{5\pi}{4}$. Заметим, что $3 = \dfrac{12}{4} < \dfrac{5\pi}{4} < \dfrac{20}{4} = 5$, поэтому корень $\dfrac{5\pi}{4}$ лежит на отрезке [3; 5].

Если $k \geq 2$, то $x \geq \dfrac{9\pi}{4} > 6$, поэтому при таких k решений на отрезке [3; 5] нет.

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\dfrac{5\pi}{4}$.

14)



а) Пусть O — центр основания пирамиды, а H — точка пересечения прямых CO и DM. Отрезки KH и SO параллельны, тогда KH перпендикулярна плоскости основания и, следовательно, MD. По теореме Фалеса $MH = HD$, следовательно, KH является медианой и высотой в треугольнике MKD. Таким образом, треугольника MKD — равнобедренный и $MK = KD$.

б) Вычислим:

$$OH = \frac{1}{2}ND = \frac{1}{4}ED = \frac{1}{4}AB = 2.$$

Следовательно, $HC = 6$. Имеем:

$$\frac{CK}{CS} = \frac{CH}{CO} = \frac{3}{4},$$

поэтому $CK = \frac{3 \cdot 14}{4} = \frac{21}{2}$, тогда $KH = \sqrt{\left(\frac{21}{2}\right)^2 - 6^2} = \frac{3\sqrt{33}}{2}$.

Найдем площадь треугольника MCD:

$$S = \frac{1}{2} \cdot MO \cdot CH + \frac{1}{2} \cdot NO \cdot CH = MO \cdot CH = 24\sqrt{3}.$$

Тогда объем $MCDK$:

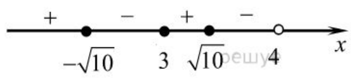
$$V = \frac{1}{3} \cdot KH \cdot S_{CDM} = 36\sqrt{11}.$$

Ответ: б) $36\sqrt{11}$.

15)

Преобразуем неравенство:

$$x^2 \log_{243}(4-x) \le \log_3(x^2 - 8x + 16) \Leftrightarrow \frac{x^2}{5}\log_3(4-x) \le \log_3(4-x)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{5}\log_3(4-x) - 2\log_3(4-x) \le 0 \Leftrightarrow (x^2 - 10)\log_3(4-x) \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{10})(x + \sqrt{10})\log_3(4-x) \le 0.$$



Заметим, что логарифм обращается в нуль в точке 3, применим на ОДЗ — луче $x < 4$ метод интервалов (см. рис.) и выпишем ответ: $-\sqrt{10} \le x \le 3,\ \sqrt{10} \le x < 4$.

Ответ: $[-\sqrt{10};\ 3] \cup [\sqrt{10};\ 4)$.

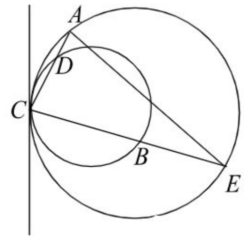
16)

Две окружности касаются внутренним образом в точке C. Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на большей и меньшей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает меньшую окружность в точке D. Прямая BC вторично пересекает большую окружность в точке E.

а) Докажите, что AE параллельно BD.

б) Найдите AC, если радиусы окружностей равны 8 и 15.

Решение.



а) Проведем общую касательную к окружностям в точке касания C. Угол между это касательной и AC обозначим за α. Тогда по теореме об угле между касательной и хордой

$$\angle DBC = \angle\alpha = \angle AEC.$$

Таким образом, прямые DB и AE параллельны.

б) Заметим, что BD и AE — диаметры окружностей. Тогда $BD = 16$, $AE = 30$, треугольники DBC и AEC подобны с коэффициентом подобия $k = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$. Пусть $AC = BC = x$, заметим, что $CE : CB = 15 : 8$, следовательно, $CE = \frac{15}{8}x$. По теореме Пифагора для треугольника ACE

$$x^2 + \left(\frac{15}{8}x\right)^2 = 30^2 \Leftrightarrow x = \frac{240}{17}.$$

Ответ: б) $\frac{240}{17}$.

17)

Пусть в кредит планируется взять S рублей, а ежегодный платеж по кредиту будет составлять x рублей. Тогда каждый год долг увеличивается на 30% или в $1 + \frac{30}{100} = 1,3$ раза и уменьшается на x рублей.

Тогда в первый год долг составит: $S \cdot 1,3$, остаток будет равен: $S \cdot 1,3 - x$.

После второго года остаток по кредиту составит: $(S \cdot 1,3 - x)1,3 - x$.

В конце третьего года он будет равен: $((S \cdot 1,3 - x)1,3 - x)1,3 - x$.

По условию кредит был погашен за 3 года, а это значит, что остаток за третий год равен 0, то есть:

$$((S \cdot 1,3 - x)1,3 - x)1,3 - x = 0 \Leftrightarrow 1,3^3 S - 3,99x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2,197S}{3,99}.$$

По условию общая сумма выплат на 78 030 рублей больше суммы взятого кредита, а значит:

$$3x = S + 78\,030 \Leftrightarrow \frac{2,197S}{1,33} = S + 78\,030 \Leftrightarrow S = \frac{1,33 \cdot 78\,030}{0,867} = 119\,700.$$

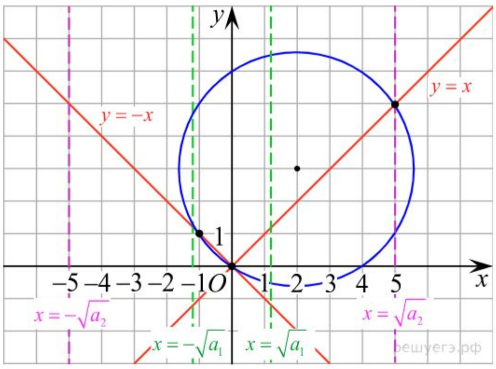
Ответ: 119 700 рублей.

18)

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} \log_3(a-x^2)=\log_3(a-y^2), \\ x^2+y^2=4x+6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-x^2=a-y^2, \\ a-x^2>0, \\ x^2-4x+y^2-6y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=y^2, \\ a-x^2>0, \\ x^2-4x+4+y^2-6y+9=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm x, \\ -\sqrt{a}<x<\sqrt{a}, \\ (x-2)^2+(y-3)^2=13. \end{cases}$$



Изобразим линии, соответствующие уравнениям и неравенствам системы, в плоскости xOy. Уравнения $y=\pm x$ задают две прямые, проходящие через начало координат. Двойное неравенство $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$ задают внутреннюю часть вертикальной полосы, ограниченной прямыми $x=-\sqrt{a}$ и $x=\sqrt{a}$. Уравнение $(x-2)^2+(y-3)^2=13$ задает окружность с центром в точке $(2;\,3)$ и радиусом $\sqrt{13}$.

Найдем абсциссы точек пересечения прямой $y=x$ и окружности: подставим $y=x$ во второе уравнение исходной системы. Получим: $2x^2=10x$, то есть $x=0$ или $x=5$. Аналогично найдем абсциссы точек пересечения окружности и прямой $y=-x$. Имеем: $2x^2=-2x$, откуда $x=0$ или $x=-1$.

Тем самым получены абсциссы трех точек $x=-1$, $x=0$, $x=5$, которые могут быть решениями системы при условии существования логарифмов. Требуется, чтобы (строго) внутрь полосы $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$, симметричной относительно оси ординат, попали ровно две из трех этих точек. Это происходит в точности тогда, когда $1<\sqrt{a}\le 5$. Таким образом, $1<a\le 25$.

Ответ: $1<a\le 25$.

19)

На доске написано n единиц, между некоторыми из которых поставили знаки + и посчитали сумму. Например, если изначально было написано $n = 12$ единиц, то могла получиться, например, такая сумма:

$$1 + 11 + 11 + 111 + 11 + 1 + 1 = 147.$$

а) Могла ли сумма равняться 150, если $n = 60$?
б) Могла ли сумма равняться 150, если $n = 80$?
в) Чему могло равняться n, если полученная сумма чисел равна 150?

Решение.

а) Да, например, 10 раз по 11 и 40 раз по 1.

б) Нет. Заметим, что число дает тот же остаток от деления на 3, что и его сумма цифр. Поэтому сумма всех этих чисел будет давать остаток от деления на 3 такой же, как и просто сумма восьмидесяти единиц, то есть 2, а 150 кратно трем. Противоречие.

в) Ясно, что использовать слагаемые большие чем 111 нельзя, а само число 111 можно, но только один раз. Если оно использовано, то нужно набрать ещё 39, это делается использованием числа 11 от 0 до 3 раз и, соответственно, требует 42, 33, 24, 15 единиц.

Если число не использовано, то можно использовать 11 от 0 до 13 раз. Каждое новое использование 11 вместо двух единиц увеличивает сумму на 9, поэтому должно сопровождаться выкидыванием девяти единиц. Следовательно, можно взять также 150, 141, ..., 33 единицы. Общий ответ: числа 150, 141, ..., 15 (прогрессия с разностью 9).

Ответ: а) да, б) нет, в) 150, 141, 132, 123, 114, 105, 96, 87, 78, 69, 60, 51, 42, 33, 24, 15.