Решение планиметрических задач № 24 из банка заданий ОГЭ

Цыкальчук Ольга Николаевна, учитель математики МБОУ СОШ № 25;
Шелыгинская Лариса Александровна, учитель математики МБОУ СОШ № 25

24 задание экзаменационной работы направлено на проверку:

- Умений решать планиметрическую задачу, применяя различные теоретические сведения курса геометрии;
- Умений математически грамотно и ясно записать решение, приводя при этом необходимые пояснения и обоснования;
- Владения широким спектром приемов и способов рассуждений .

ОБЩИЕ ПОДХОДЫ К ОФОРМЛЕНИЮ ЗАДАНИЙ С РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ

- Решение должно быть математически грамотным и полным, из него должен быть понятен ход рассуждений учащегося.
- Оформление решения должно обеспечивать выполнение указанных выше требований, а в остальном может быть произвольным.
- Не следует требовать от учащихся слишком подробных комментариев (например, описания алгоритмов).
- Лаконичное решение, не содержащее неверных утверждений, все выкладки которого правильны, следует рассматривать как решение без недочетов.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАНИЯ № 24

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Классификация заданий № 24

Задача на вычисление:
- Углов;
- Элементов треугольника;
- Элементов четырёхугольника;
- Элементов окружности.

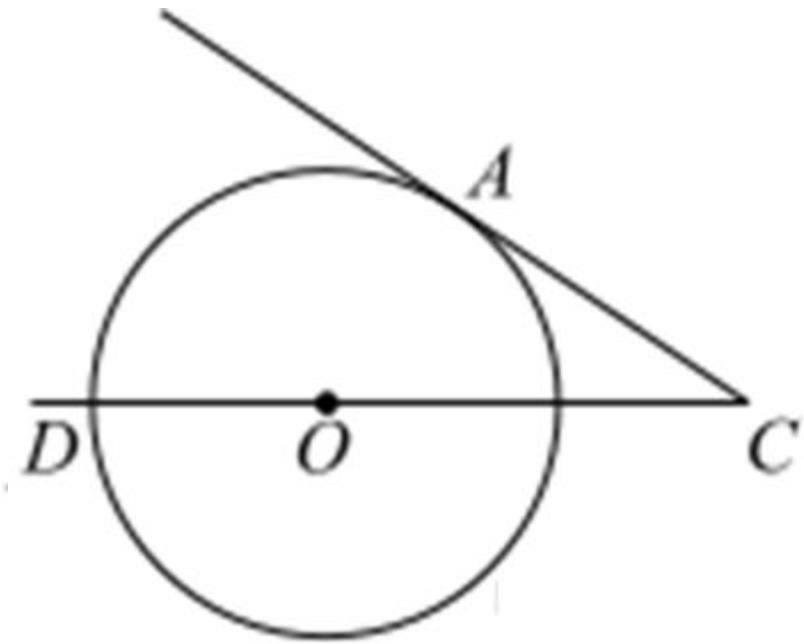
О чем в действительности задача № 24?

- Это геометрическая задача, в которой дан или описан на словах чертёж и даны некоторые числовые значения элементов этого чертежа;

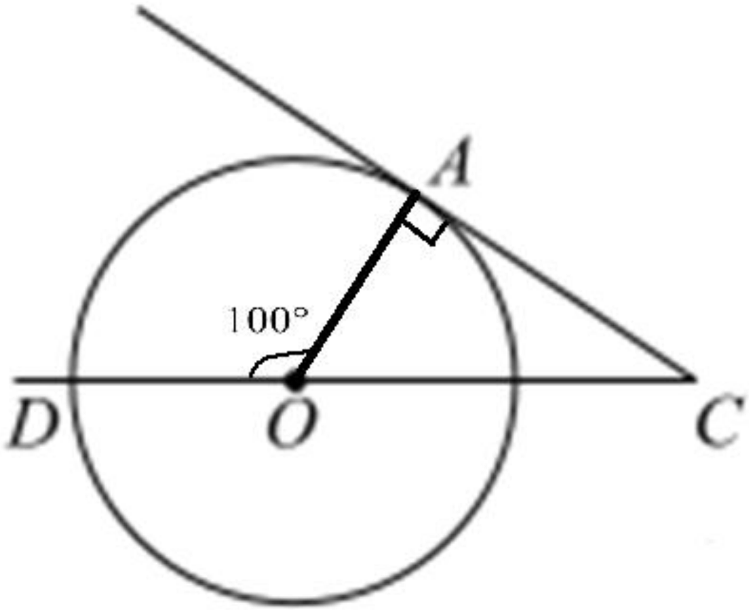
-Требуется, пользуясь свойствами треугольников, четырёхугольников и других геометрических фигур, найти величину искомого элемента.

1. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ УГЛОВ

Задача 1.1



Найдите угол ACO, если его сторона CA касается окружности, O — центр окружности, а дуга AD окружности, заключённая внутри этого угла, равна 100°.



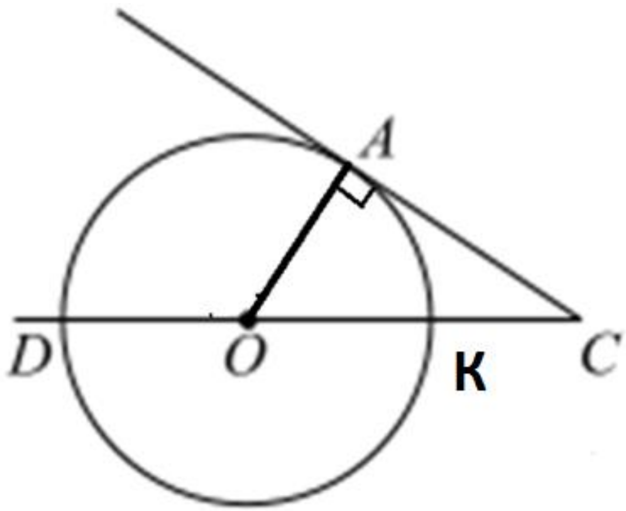
Решение (1 способ):

1. Проведём OA=R, OA $\perp$ AC, $\angle$DOA= 100°

2. Δ AOC – прямоугольный,

$\angle$AOC = 80°, значит $\angle$ACO= 10°.

Ответ: 10°.



Решение (2 способ):

1. Проведём OA=R,

$OA \perp AC$, $\smile DA = 100^{\circ}$

значит $\smile AK = 180^{\circ} - 100^{\circ} = 80^{\circ}$ (CD- секущая, отсекает полуокружность)

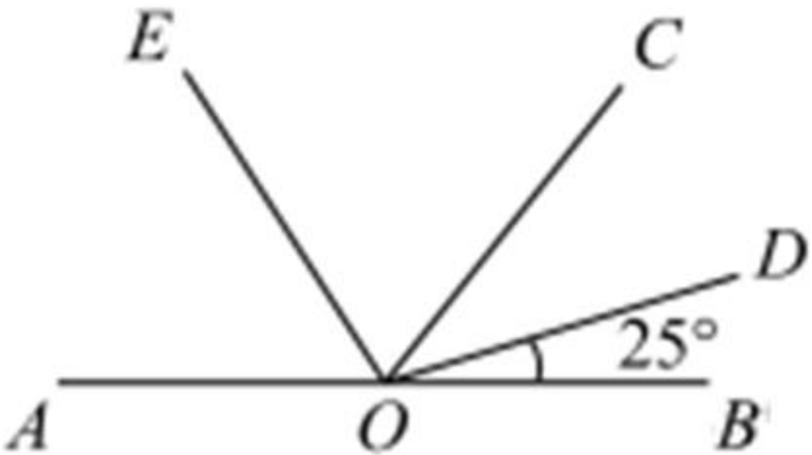
2. Δ AOC – прямоугольный,

$\angle AOC = 80^{\circ}$ (центральный), значит

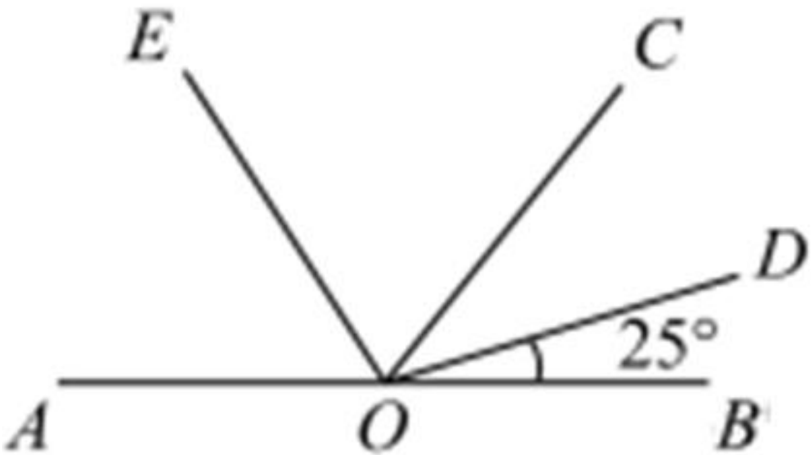
$\angle ACO = 10^{\circ}$.

Ответ: 10°.

Задача 1.2



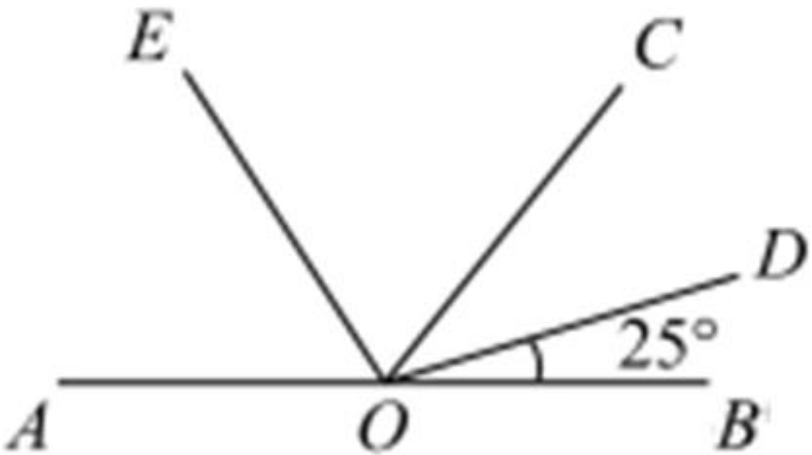
- Найдите величину угла АОЕ , если OD— биссектриса угла СОВ, ОЕ — биссектриса угла АОС.



Решение (1 способ):

1. Угол СОВ = 50 °, значит угол АОС=130 °
2. Т.к. ОЕ-биссектриса, значит угол АОЕ= 65°

Ответ: 65°

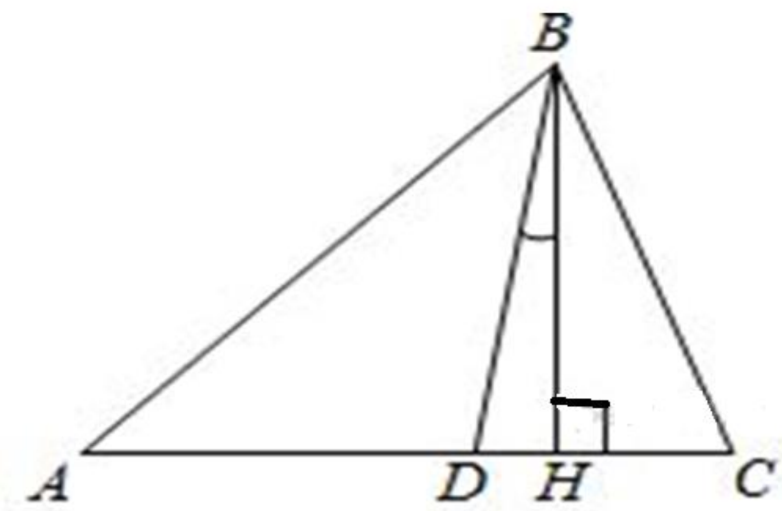


Решение (2 способ):

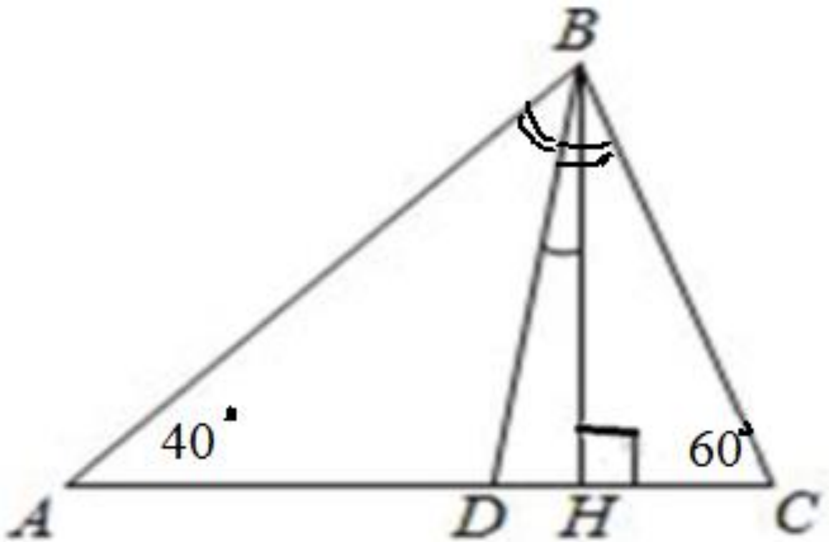
Угол EOD = 90^{o}(угол между биссектрисами смежных углов равен 90^{o}), значит угол AOE= 180^{o} - 25^{o}- 90^{o} = 65^{o}

Ответ: 65°

Задача 1.3



- В треугольнике ABC углы A и C равны 40° и 60° соответственно. Найдите угол между высотой BH и биссектрисой BD.



Решение:

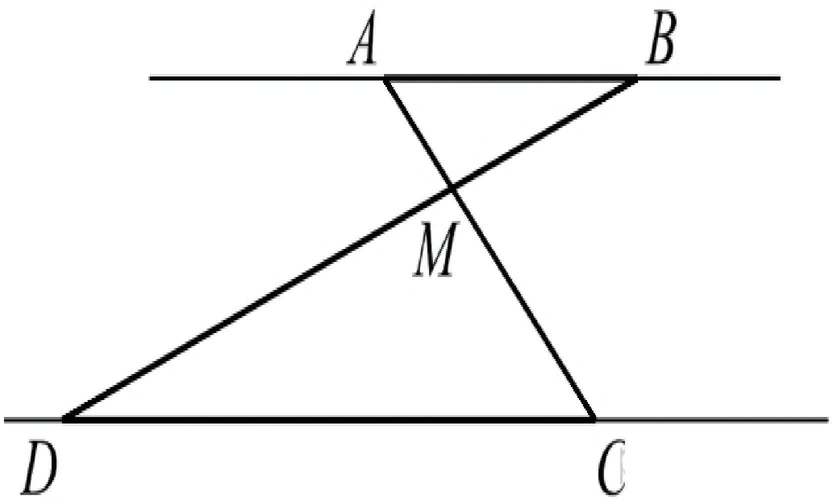
1. ∟ ABC=180° - (40°+60°)) = 80°
2. ∟CBD = 40° (т.к. BD – биссектриса)
3. Рассмотрим Δ BCH (∟CHB = 90◦). По теореме о сумме острых углов прямоугольного треугольника ∟HCB + ∟HBC = 90°. По условию ∟HCB = 60°. Значит ∟HBC = 90° - 60° = 30°
4. Угол между высотой BH и биссектрисой BD - это ∟HBD.

∟HBD = ∟CBD - ∟HBC= 40° - 30° = 10°.

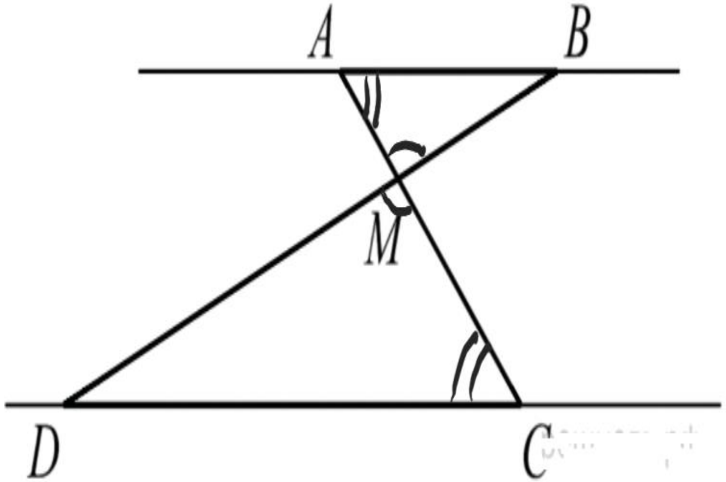
Ответ: 10°.

2. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Задача 2.1



- Отрезки AB и DC лежа т на параллельных прямых, а отрез-ки AC и BD пересека-ются в точке M. Най-дите MC, если $AB = 13$, $DC = 65$, $AC = 42$.



Решение:

$\Delta DMC \sim \Delta BMA$ по двум углам:

∟ DMC=∟BMA как вертикальные, ∟DCM = ∟BAM как накрест лежащие при параллельных прямых и секущей.

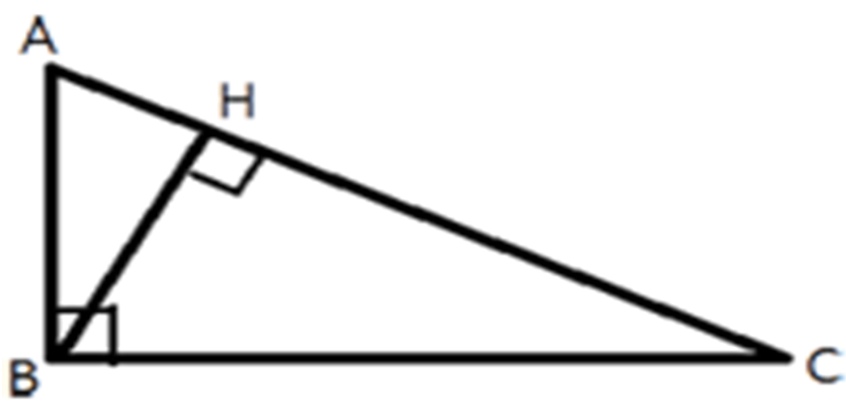
Значит, $\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{CD} = \frac{13}{65} = 0.2$

AC = AM+MC = 0,2MC+MC = =1,2MC.

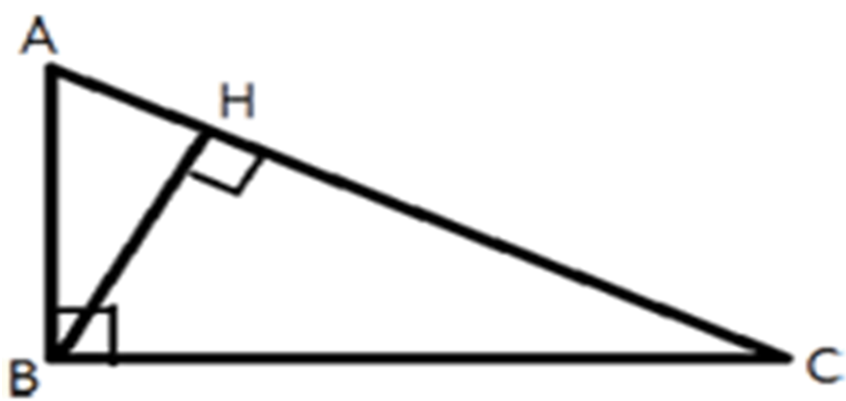
Имеем: 42= 1,2MC, значит MC= 35

Ответ: 35

Задача 2.2



Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если $AH = 5$, $AC = 20$.



Решение:

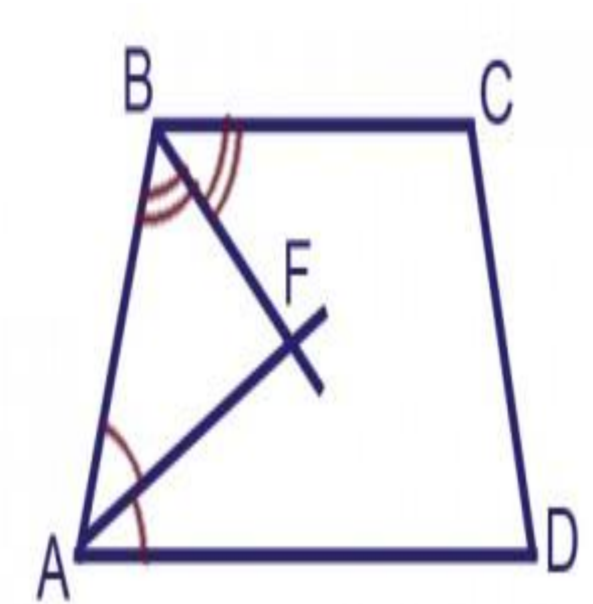
ВН- высота, проведённая из вершины прямого угла Δ АВС, значит

АВ $=\sqrt{\mathrm{AH}\cdot\mathrm{AC}}$

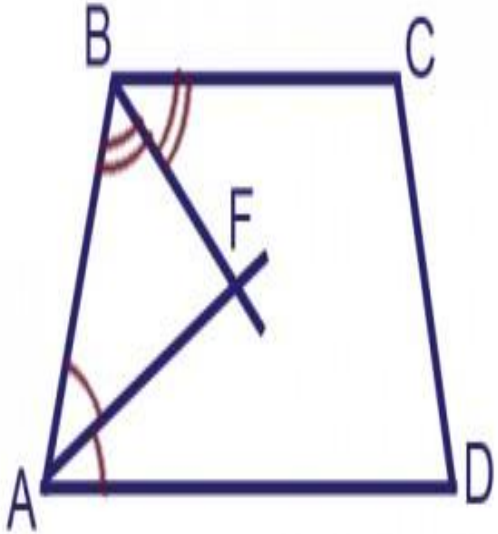
АВ= $\sqrt{5\cdot 20}$=$\sqrt{100}=10$

Ответ: 10

Задача 2.3



Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F. Найдите AB, если $AF = 24$, $BF = 10$.



Решение:

1. ∟BAD и ∟ABC — внутренние односторонние при прямых AD || BC и секущей AB,
   следовательно, ∟BAD+ ∟ABC =180°.
   AF и BF — биссектрисы углов BAD и ABC.

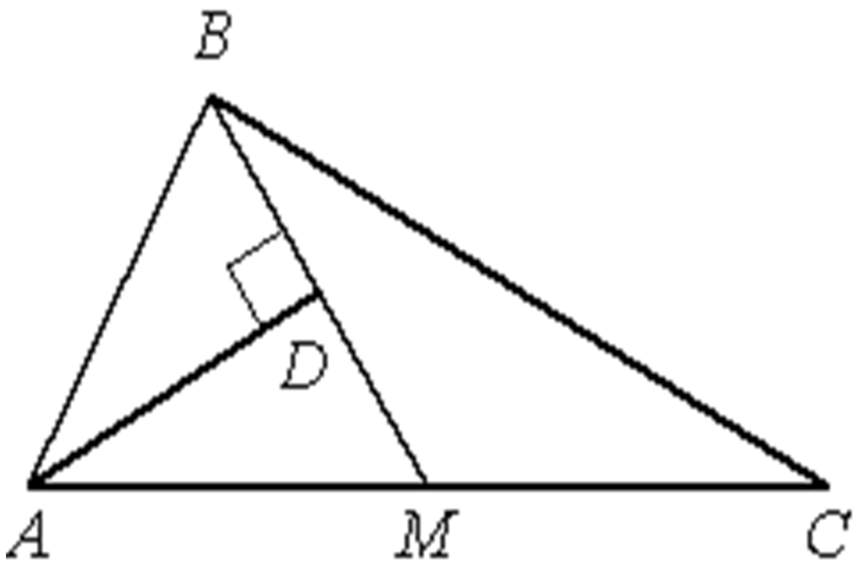
2. ∟BAF + ∟ABF = $\frac{1}{2}$ (∟BAD+∟ABC) =90°.

3. Δ AFB — прямоугольный, тогда по т. Пифагора находим AB:

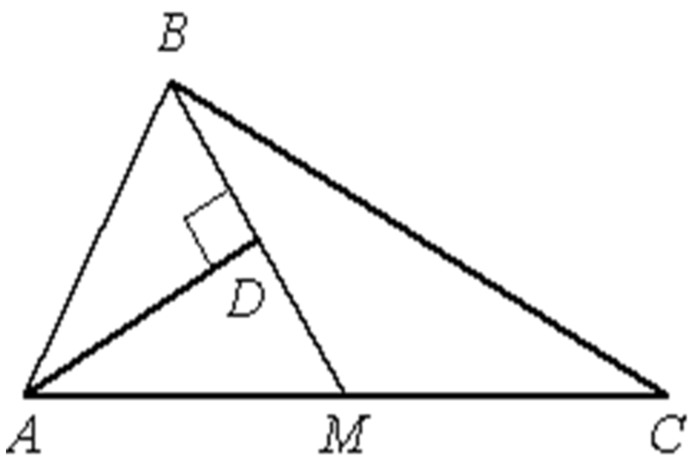
- $AB^2=BF^2+AF^2$, $AB^2=10^2+24^2$
  $AB^2=100+576$ $AB^2=676$ $AB=26$

Ответ: 26.

Задача 2.4



Прямая AD, перпендикулярная медиане BM треугольника ABC, делит её пополам. Найдите сторону AC, если сторона AB равна 4.



Решение:

В Δ ABM AD - медиана и высота, значит

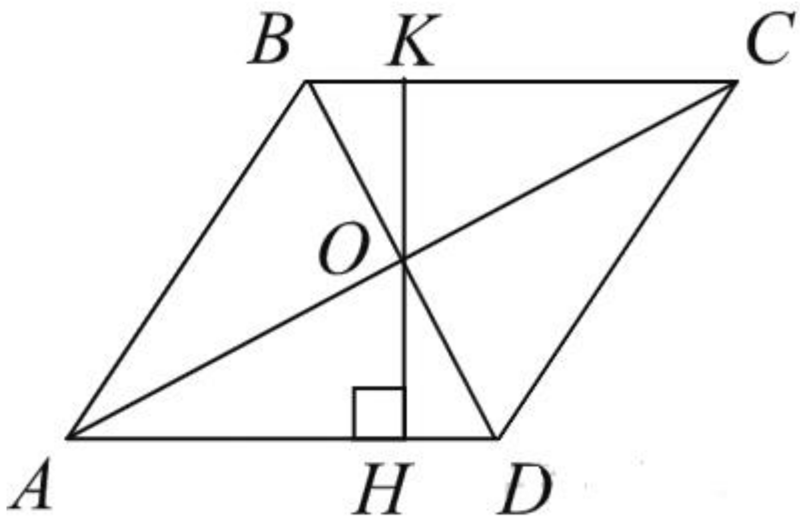
Δ ABM - равнобедренный с основанием BM и AB=AM=4.

2. Т.к. BM - медиана для Δ ABC, значит AM=MC= 4, тогда AC=AM·2= 4·2=8.

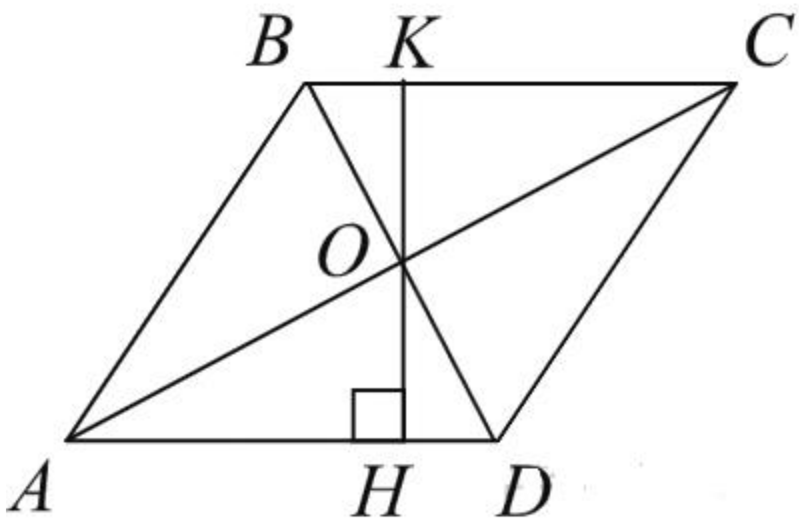
Ответ: 8.

3. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКОВ

Задача 3.1



- Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 19, а одна из диагоналей ромба равна 76. Найдите углы ромба.



Решение:

Введём обозначения, как показано на рисунке. Пусть AC = 76. AC $\perp$ BD, AO = OC, BO= OD. ΔAOH - прямоугольный, найдём

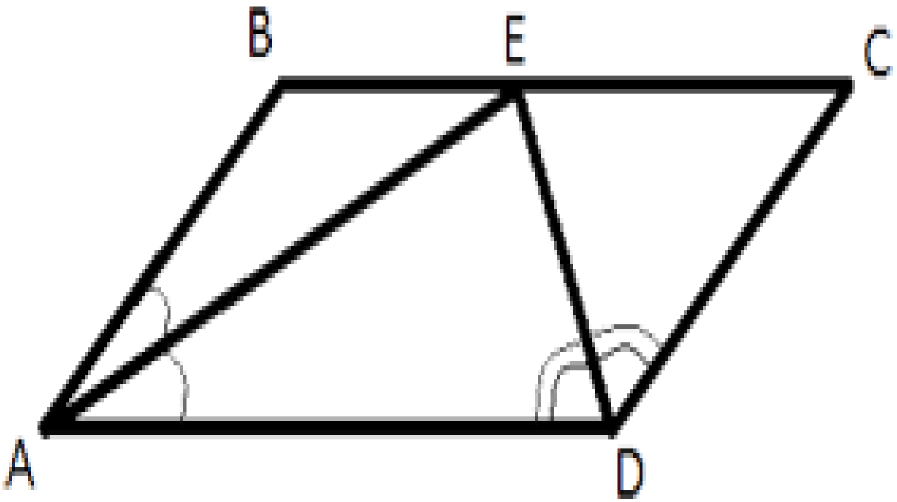
$$\sin\angle OAH = \frac{OH}{AO} = \frac{19}{38} = \frac{1}{2}$$

Значит ∟OAH = 30°. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов, значит ∟ BAD = 60⁰ ,

∟ BAD = ∟BCD = 60⁰, ∟ ABC = ∟ ADC = 180⁰ - 60⁰ = 120 ⁰

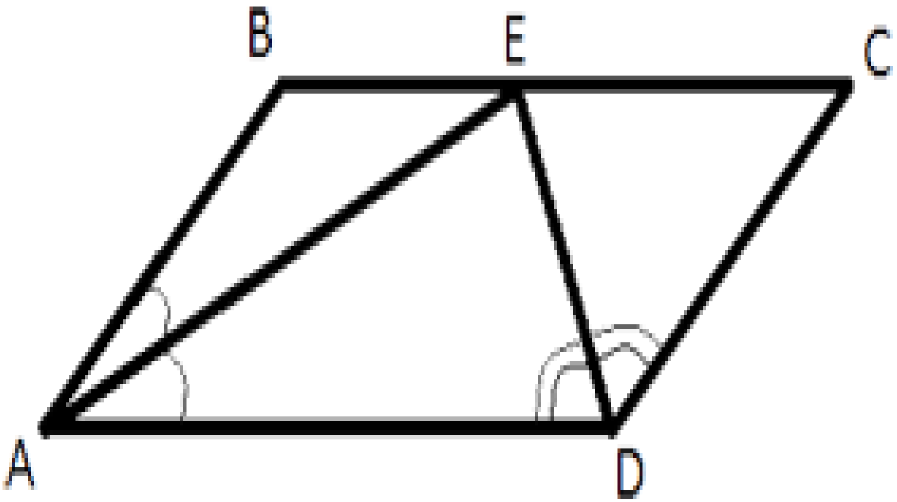
Ответ: 60°, 60°, 120°, 120°.

Задача 3.2



Биссектрисы углов *A* и *D* параллелограмма *ABCD* пересекаются в точке, лежащей на стороне *BC*. Найдите *BC*,

если *AB* = 34.



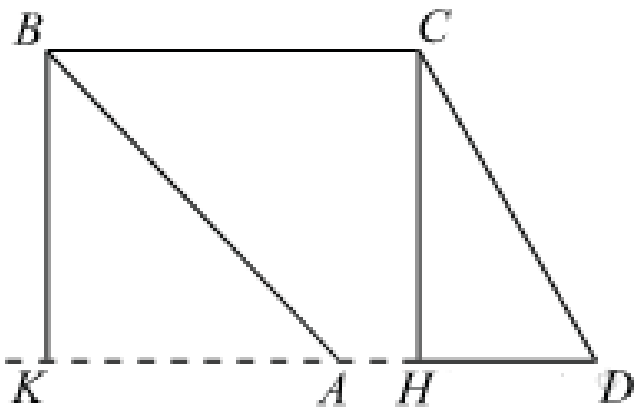
Решение:

$BC \parallel AD$ (по определению параллелограмма) ,$\angle BAE = \angle EAD$ (т.к. AE - биссектриса) $\angle EAD = \angle BEA$ (т.к. это накрест-лежащие углы), следовательно, $\angle BAE = \angle BEA$, значит ΔABE - равнобедренный (по свойству), и AB=BE (по определению равнобедренного треугольника). Аналогично с треугольником ECD: $\angle CED = \angle CDE$, EC=CD Так как AB=CD (по свойству параллелограмма), то AB=BE=EC=CD = 34. Значит,

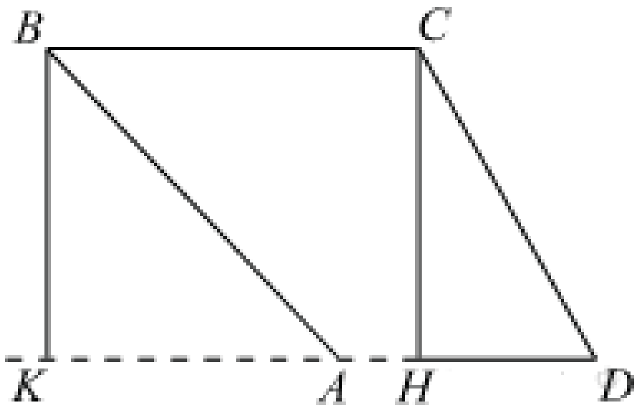
BC= 34 + 34 = 68

Ответ: 68

Задача 3.3



Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно 60° и 150°, а $CD = 33$.



Решение:

Выполним дополнительные построения: проведём высоты CH и BK. В трапеции сумма смежных углов при боковой стороне равна 180°, поэтому $\angle ADC = 180° -$

$\angle BCD = 180° - 150° = 30°$. Из прямоугольного ΔCHD найдём сторону CH : $CH = CD \cdot \sin\angle ADC = 33 \cdot 0{,}5 = 16{,}5$

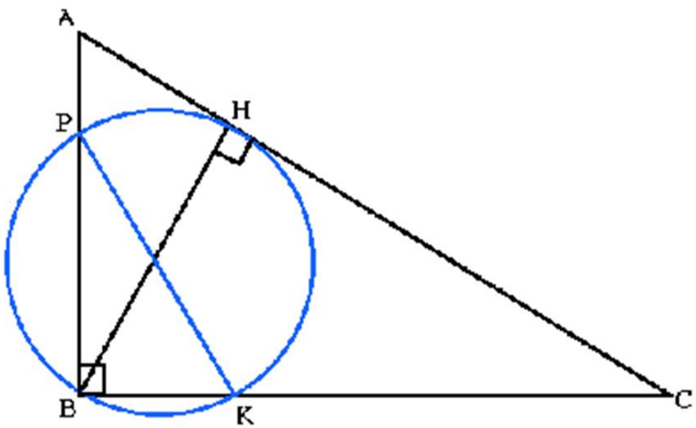
$\angle ABC = \angle BAK$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых. Высоты BK и CH равны. Из прямоугольного ΔABK найдём AB:

$$AB = \frac{BK}{\sin\angle BAK} = \frac{16,5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{33\sqrt{3}}{3} = 11\sqrt{3}.$$

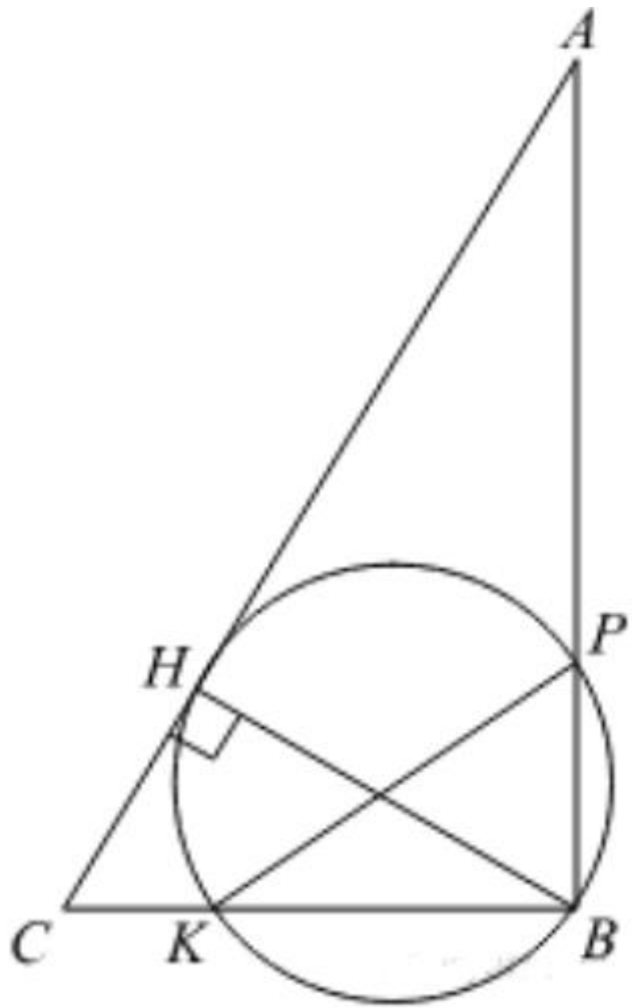
Ответ: $11\sqrt{3}$

4. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОКРУЖНОСТИ

Задача 4.1



Точка H является основанием высоты BH, проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите PK, если $BH = 16$.



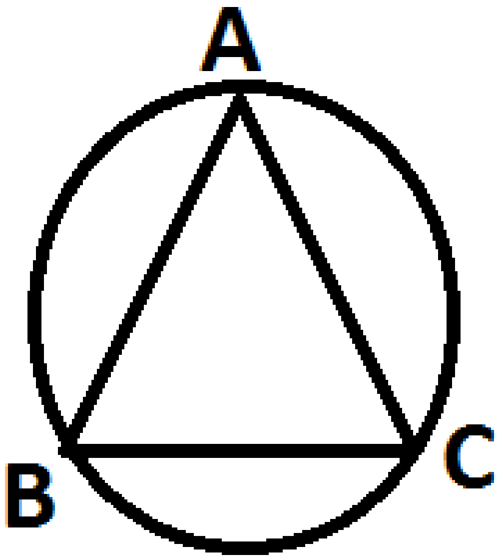
Решение:

∟РВК – вписанный, ∟РВК =90◦прямой по условию задачи, значит отрезок РК - диаметр и равен другому диаметру ВН.

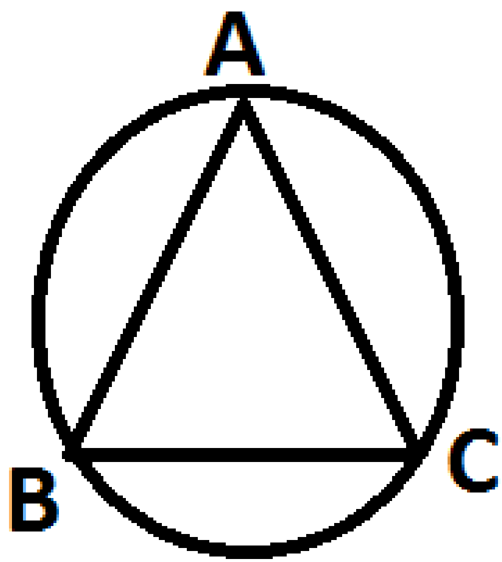
РК=16.

Ответ: 16

Задача 4.2



В треугольнике ABC угол B равен 72°, угол C равен 63°, $BC=2\sqrt{2}$. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.



Решение:

1. ∟A = 180◦- 72 ◦ - 63◦ = 45◦
2. По теореме синусов:

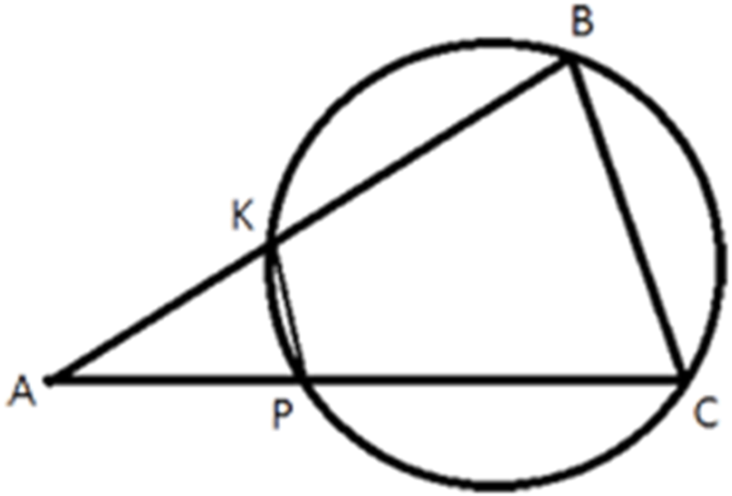
$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin C} = \frac{BC}{sinA} = \frac{AC}{sinB} = 2R,$$

значит

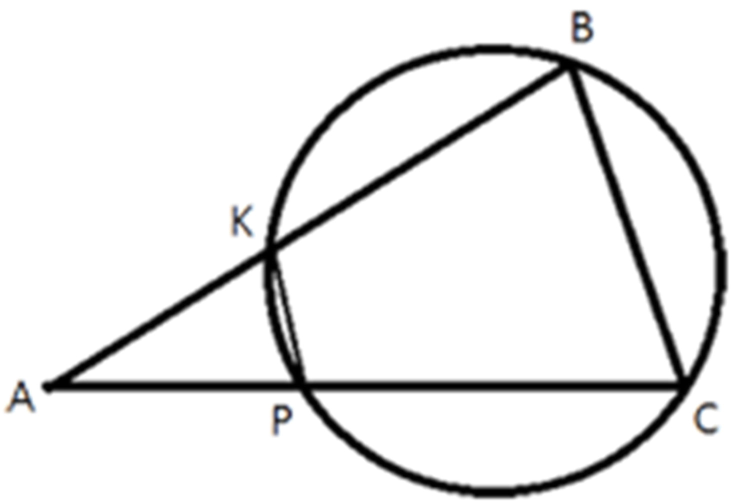
$\frac{2\sqrt{2}}{\sin 45°}$=2R, отсюда R= 2

Ответ: 2

Задача 4.3



Окружность пересекает стороны *AB* и *AC* треугольника *ABC* в точках *K* и *P* соответственно и проходит через вершины *B* и *C*. Найдите длину отрезка *KP*, если $AK = 18$, а сторона *AC* в 1,2 раза больше стороны *BC*.



Решение:

1.Четырехугольник вписан в окружность, значит сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, т.е. ∠PKB+∠BCP=180°. ∠PKB+∠AKP=180° (т.к. это смежные углы). Следовательно, ∠AKP=∠BCP.

2. ΔABC ~ ΔAKP по двум углам.

$$\frac{KP}{BC}=\frac{AK}{AC}=\frac{AP}{AB}=\frac{18}{1{,}2BC}$$

KP=$\frac{18BC}{1{,}2BC}$=15

Ответ: KP=15

Успех при решении геометрических задач складывается из двух составляющих:

- Знание теории
- Обширная практика

«Гений – это 1% таланта и 99% труда»

Т.Эдисон