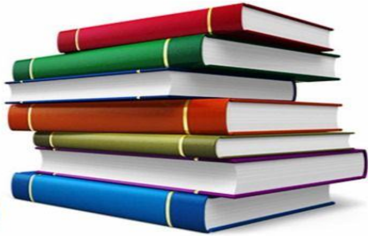
ОГЭ-2020



Особенности решения задач второй части модуля «Алгебра» (21 тип)

Холявко Алла Николаевна,

учитель математики

МБОУ СЕНЛ

21 задания из второй части ОГЭ по математике включает в себя следующие разделы:

1. Алгебраические выражения
2. Уравнения
3. Системы уравнений
4. Неравенства
5. Системы неравенств

Основные проверяемые требования к математической подготовке

Уметь выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения, неравенства и их системы

Разделы элементов содержания

Алгебраические выражения

Уравнения и неравенства

Разделы элементов требований:

Уметь выполнять преобразования алгебраических выражений.

Задача 1: Сократите дробь $\frac{18^{n+3}}{3^{2n+5}\cdot 2^{n-2}}$.

Решение.

$$\frac{18^{n+3}}{3^{2n+5}\cdot 2^{n-2}}=\frac{(9\cdot 2)^{n+3}}{3^{2n+5}\cdot 2^{n-2}}=\frac{(3^2\cdot 2)^{n+3}}{3^{2n+5}\cdot 2^{n-2}}=\frac{3^{2n+6}\cdot 2^{n+3}}{3^{2n+5}\cdot 2^{n-2}}=$$

$$=3^{2n+6-(2n+5)}\cdot 2^{n+3-(n-2)}=3^{2n+6-2n-5}\cdot 2^{n+3-n+2}=3^1\cdot 2^5=3\cdot 32=96.$$

Ответ: 96.

__Задача 2__. **Найдите значение выражения** $\dfrac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x}$ **при** $x=\dfrac{1}{19}$.

__Решение__.

$$\frac{5x^2+2x-5x-2}{5x^2+2x}=\frac{x(5x+2)-5x-2}{x(5x+2)}=\frac{x(5x+2)}{x(5x+2)}-\frac{5x+2}{x(5x+2)}=$$

$$=1-\frac{1}{x}=1-\frac{1}{\frac{1}{19}}=1-\frac{1}{1}\cdot\frac{19}{1}=1-19=-18.$$

__Ответ__: -18.

<u>Задача 3.</u> **Найдите значение выражения $\dfrac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}$, если:**

$$p(b) = \left(b + \frac{5}{b}\right)\left(5b + \frac{1}{b}\right).$$

<u>Решение</u>.

Находим значение выражения $p\left(\frac{1}{b}\right)$:

$$p\left(\frac{1}{b}\right) = \left(\frac{1}{b} + \frac{5}{\frac{1}{b}}\right)\left(5 \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{\frac{1}{b}}\right) = \left(\frac{1}{b} + 5 \cdot \frac{b}{1}\right)\left(\frac{5}{b} + 1 \cdot \frac{b}{1}\right) = \left(\frac{1}{b} + 5b\right)\left(\frac{5}{b} + b\right).$$

Мы получили выражение, идентичное значению $p(b)$. То есть:

$$p(b) = p\left(\frac{1}{b}\right).$$

Значит:

$$\frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)} = 1.$$

<u>Ответ</u>: 1.

<u>Задача 4.</u> **Найдите значение выражения $61a - 11b + 50$, если**

$$\frac{2a - 7b + 5}{7a - 2b + 5} = 9.$$

<u>Решение</u>.

Упростим дробь, превратив ее в линейное уравнение:

$$2a - 7b + 5 = 9(7a - 2b + 5),$$

$$2a - 7b + 5 = 63a - 18b + 45,$$

$$2a - 7b + 5 - 63a + 18b - 45 = 0,$$

$$-61a + 11b - 40 = 0,$$

$$61a - 11b + 40 = 0,$$

$$61a - 11b = -40.$$

Оказывается, в исходном выражении разность двух неизвестных равна –40.

Следовательно:

$$\mathbf{61}\boldsymbol{a} - \mathbf{11}\boldsymbol{b} + \mathbf{50} = -40 + 50 = 10.$$

<u>Ответ</u>: 50.

<u>Задача 5.</u> **Найдите значение выражения:**

$$\frac{4x-9y}{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}-\sqrt{y}, \text{ если } \sqrt{x}+\sqrt{y}=7.$$

<u>Решение</u>.

Пользуясь формулой сокращенного умножения для разности квадратов, представим числитель следующим образом:

$$(2\sqrt{x})^2-(3\sqrt{y})^2.$$

Разложим:

$$(2\sqrt{x})^2-(3\sqrt{y})^2=(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})(2\sqrt{x}+3\sqrt{y})$$

Тогда:

$$\frac{(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})(2\sqrt{x}+3\sqrt{y})}{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}-\sqrt{y}=2\sqrt{x}+3\sqrt{y}-\sqrt{y}=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}=$$

$$=2(\sqrt{x}+\sqrt{y})=2\cdot 7=14.$$

<u>Ответ</u>: 14.

Задача 6. Решите уравнение $x^6 = (6x-5)^3$

Решение.

1. Извлечем кубический корень из левой и правой частей уравнения, получим:

$$x^2 = 6x - 5$$
$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

2. Решаем квадратное уравнение, получаем два корня:

$$D = 36 - 4 \cdot 5 = 16 = 4^2$$
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{6+4}{2} = 5$$
$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{6-4}{2} = 1$$

Ответ: 1; 5.

Задача 7. Решите уравнение $x^4=(4x-5)^2.$

Решение.

$$x^4=(4x-5)^2$$

$$x^4-(4x-5)^2=0$$

$$(x^2)^2-(4x-5)^2=0$$

$$(x^2-4x+5)(x^2+4x-5)=0$$

$x^2-4x+5=0$ *или* $x^2+4x-5=0$

КОРНЕЙ НЕТ $x_1=1$ $x_2=-5$

$$Ответ:\ -5;1.$$

Задача 8. Решите уравнение $x^2-3x+\sqrt{6-x}=\sqrt{6-x}+28$.

Решение.

1. Запишем ОДЗ уравнения:

$$6-x\geq 0\Rightarrow x\leq 6.$$

2. Упростим уравнение, получим:

$$x^2-3x+\sqrt{6-x}-\sqrt{6-x}-28=0$$

$$x^2-3x-28=0$$

Решаем квадратное уравнение, получаем корни:

$$D=b^2-4ac=9+4\cdot 28=121$$

$$\sqrt{D}=11$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{3+11}{2}=7$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{3-11}{2}=-4$$

Только один корень x=-4 удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: -4.

Задача 9. Решите уравнение $\left(x^2-16\right)^2+\left(x^2+x-12\right)^2=0$.

Решение. Любое число в квадрате всегда больше 0, следовательно, уравнение будет равно 0, если оба слагаемых равны 0. Это условие можно записать в виде следующей системы:

$$\begin{cases} x^2-16=0 \\ x^2+x-12=0 \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем два корня:

$$x^2=16$$
$$x=\pm 4$$

Из второго уравнения, имеем корни:

$$D=b^2-4ac=1+48=49$$

$$\sqrt{D}=7$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1+7}{2}=3$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1-7}{2}=-4$$

Общий корень, при котором оба уравнения переходят в 0, равен -4.

Ответ: -4.

<u>Задание 10</u>. *Решите уравнение* $x\left(x^2+2x+1\right)=2(x+1)$.

Решение.

$$x\left(x^2+2x+1\right)=2(x+1)$$

$$x(x+1)^2-2(x+1)=0$$

$$(x+1)\left(x(x+1)-2\right)=0$$

$$(x+1)\left(x^2+x-2\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x+1=0, \\ x^2+x-2=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=1, \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Ответ: $-2; -1; 1.$

Задача 11. Решите неравенство $(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$.

Решение. Перепишем неравенство в следующем виде:

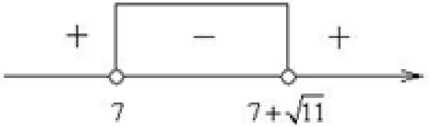
$$(x-7)^2 - \sqrt{11}(x-7) < 0$$

$$(x-7)\cdot\left(x-7-\sqrt{11}\right) < 0$$

Из последнего выражения имеем две точки, делящие числовую ось:

$$x_1 = 7$$

$$x_2 = 7+\sqrt{11}$$



$$x \in \left(7; 7+\sqrt{11}\right).$$

Ответ: $\left(7; 7+\sqrt{11}\right)$.

Задача 12. Решите неравенство $\dfrac{-15}{(x+1)^2-3} \geq 0$.

Решение. Из неравенства можно видеть, что, так как числитель меньше 0, то оно будет соблюдаться, если знаменатель

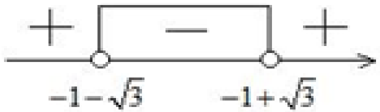
$$(x+1)^2-3<0.$$

Перепишем его в следующем виде:

$$(x+1)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2<0$$
$$\left(x+1+\sqrt{3}\right)\cdot\left(x+1-\sqrt{3}\right)<0$$

Последнее выражение дает две точки, делящие числовую ось:

$$x+1+\sqrt{3}=0 \qquad x+1-\sqrt{3}=0$$
$$x_1=-1-\sqrt{3} \quad \text{и} \quad x_2=-1+\sqrt{3}$$



$$x \in \left(-1-\sqrt{3};-1+\sqrt{3}\right).$$

Ответ: $\left(-1-\sqrt{3};-1+\sqrt{3}\right)$.

Задача 13. **Решите систему уравнений:**

$$\begin{cases} x^2 + xy = 7 \\ (x+y)^3 = -8 \end{cases}$$

Решение.

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} x^2 + xy = 7 \\ (x+y)^3 = (-2)^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + xy = 7 \\ x + y = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(x+y) = 7 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

Значение $x + y$ из второго уравнения подставляем в первое и находим x:

$$x \cdot (-2) = 7,$$
$$-2x = 7,$$
$$x = 7 : (-2),$$
$$x = -3{,}5.$$

Во второе уравнение подставляем значение x и находим y:

$$-3{,}5 + y = -2,$$
$$y = -2 + 3{,}5,$$
$$y = 1{,}5.$$

Ответ: (–3,5; 1,5).

Задача 14. **Один из корней уравнения $x^2 + 2ax + a = 0$ равен 1. Найдите второй корень.**

Решение.

Выпишем коэффициенты: $A = 1$, $B = 2a$, $C = a$.

Так как А = 1, то для нахождения корней удобно применить теорему Виета:

$$x_1 + x_2 = -B, \qquad x_1 \cdot x_2 = C.$$

Один из корней известен. Подставляем его и получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 + x_2 = -2a \\ 1 \cdot x_2 = a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 + 1 = -2a \\ x_2 = a \end{cases}$$

Подставляем буквенное значение x_2 в первое уравнение и находим a:

$$a + 1 = -2a \quad \rightarrow \quad a + 2a = -1 \quad \rightarrow \quad 3a = -1 \quad \rightarrow \quad a = -\frac{1}{3}.$$

Так $x_2 = a$, то $x_2 = -\frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{1}{3}$.

Задача 100. При каких значениях a расстояние на числовой оси между корнями уравнения $x^2 + ax + 12 = 0$ равно 1?

Задача 101. При каких значениях m корни уравнения $4x^2 - (\sqrt{3m} - 3)x - 9 = 0$ являются противоположными числами?

Задача 102. При каких значениях m корни уравнения $x^2 + (m + 2)x + m + 5 = 0$ совпадают?

Задача 100. При каких значениях a расстояние на числовой оси между корнями уравнения $x^2 + ax + 12 = 0$ равно 1?

Решение.
По условию задачи получается: если $x_1 = d$, то $x_2 = d + 1$.
Так как мы имеем дело с приведенным квадратным уравнением (первый коэффициент равен 1), то воспользуемся теоремой Виета, согласно которой сумма корней равна второму коэффициенту с противоположным знаком, а их произведение равно свободному члену:

$$\begin{cases} d + (d + 1) = -a \\ d(d = 1) = 12 \end{cases}$$

Раскроем скобки:

$$\begin{cases} 2d + 1 = -a \\ d^2 + d = 12 \end{cases}$$

Приравняем второе уравнение к нулю и получим квадратное уравнение:

$$d^2 + d - 12 = 0.$$

Находим корни: $d_1 = -4,\ d_2 = 3$.
Напомним, что буквой d мы обозначили первый корень заданного квадратного уравнения. Выясняется, что первый корень – это два числа.
Подставим эти числа в первое уравнение системы и найдем a:

$$\left[\begin{array}{l} 2 \cdot (-4) + 1 = -7 \\ 2 \cdot 3 + 1 = 7 \end{array}\right.$$

Ответ: ± 7.

Задача 101. При каких значениях m корни уравнения $4x^2-(\sqrt{3m}-3)x-9=0$ являются противоположными числами?

Решение.
Разделим уравнение на 4, чтобы получить приведенное квадратное уравнение – то есть чтобы первый коэффициент был равен 1:

$$x^2-(\sqrt{3m}-3)0{,}25x-2{,}25=0.$$

По условию задачи, если один корень равен d, то второй корень равен $-d$. Можно найти корни уравнения, но это необязательно. Согласно теореме Виета, сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту с противоположным знаком. У нас корни являются противоположными числами – значит, их сумма равна 0. Следовательно:

$$(\sqrt{3m}-3)0{,}25=0.$$

Раскроем скобки и решим уравнение:

$$0{,}25\sqrt{3m}-0{,}75=0,$$
$$0{,}25\sqrt{3m}=0{,}75,$$
$$\sqrt{3m}=0{,}75:0{,}25,$$
$$\sqrt{3m}=3,$$
$$\left(\sqrt{3m}\right)^2=3^2,$$
$$3m=9,$$
$$m=3.$$

Ответ: 3.

<u>Задача 102</u>. При каких значениях m корни уравнения $x^2 + (m+2)x + m + 5 = 0$ совпадают?

<u>Решение</u>.

Выпишем коэффициенты заданного квадратного уравнения:

$$a = 1, \quad b = m + 2, \quad c = m + 5.$$

Найдем дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac = (m+2)^2 - 4 \cdot 1(m+5) = m^2 + 4m + 4 - 4m - 20 = \\ = m^2 - 16.$$

Если корни квадратного уравнения совпадают, то это означает, что уравнение имеет один корень. А квадратное уравнение имеет один корень только в том случае, если дискриминант равен 0. Приравняем дискриминант к нулю и найдем m:

$$m^2 - 16 = 0,$$
$$m^2 = 16,$$
$$m = \pm\sqrt{16},$$
$$m = \pm 4.$$

<u>Ответ</u>: ± 4.

Грамотное оформление решений задач - один из факторов успешного обучения математике

Задача 2. *Решите систему уравнений* $\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = 18. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 + y, \\ (7+y)y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 + y, \\ \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = -9 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 7 + y, \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 7 + y, \\ y = -9 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 9, \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2, \\ y = -9. \end{cases} \end{array} \right.$$

$(7 + y)y = 18,$

$y^2 + 7y - 18 = 0,$

$D = 49 + 72 = 121, \sqrt{D} = 11,$

$y_1 = \dfrac{-7 + 11}{2} = 2,$

$y_2 = \dfrac{-7 - 11}{2} = -9.$

Ответ: (9; 2); (−2; −9).

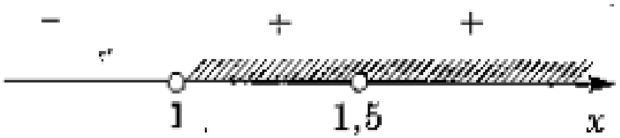
Задача 5. *Решите неравенство* $(2x^2-5x+3)(2x-3)>0$.

Решение.

$$(2x^2-5x+3)(2x-3)>0,$$

$$(2x-3)(x-1)(2x-3)>0,$$

$$(2x-3)^2(x-1)>0.$$



Ответ: $(1;\,1{,}5)\cup(1{,}5;\,+\infty)$.

1. $2x^2-5x+3=0,$

$D=25-24=1,$

$x_1=\dfrac{5+1}{4}=\dfrac{3}{2},\quad x_2=\dfrac{5-1}{4}=1.$

2. $2x^2-5x+3=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x-1)=$

$=(2x-3)(x-1).$

3. $g(x)=(2x-3)^2(x-1),$

$g(3)>0,\ \ g(1{,}3)>0,\ \ g(0)<0.$

Задача 6. *Решите неравенство* $\dfrac{x^2-7x+6}{x^2-1}\le 0.$

Решение.

$$\frac{x^2-7x+6}{x^2-1}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-6)}{(x-1)(x+1)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x-6}{x+1}\le 0,\\ x\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1<x\le 6,\\ x\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<x<1\\ 1<x\le 6.\end{array}\right.$$

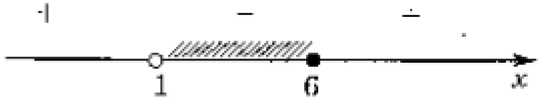
1. $x^2-7x+6=0,$

$D=49-24=25,\ \sqrt{D}=5,$

$x_1=\dfrac{7+5}{2}=6,\quad x_2=\dfrac{7-5}{2}=1.$

2. $x^2-7x+6=(x-6)(x-1).$

3. $\dfrac{x-6}{x+1}\le 0 \Leftrightarrow -1<x\le 6.$



$f(x)=\dfrac{x-6}{x+1},\ f(7)>0,\ f(1)<0,\ f(-5)>0.$

Ответ: $(-1;\,1)\cup(1;\,6]$.

Критерии оценивания выполнения задания 21

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Уточнение – «ошибка вычислительного характера» или «вычислительная ошибка» – это ошибка, допущенная при выполнении сложения, вычитания, умножения и деления. В критериях оценки выполнения задания подчеркивается тот факт, что 1 балл допускается ставить в тех случаях, когда единственная вычислительная ошибка стала причиной того, что неверен ответ.

К вычислительным ошибкам не относятся ошибки в формулах при решении квадратного уравнения, действиях с числами с разными знаками, упрощении выражений со степенями и корнями и т.д.

Источники:

http://www.fipi.ru/content/otkrytyy-bank-zadaniy-oge

- *открытый банк заданий ОГЭ по математике*

http://alexlarin.net/ сайт Ларина Александра Александровича

https://oge.sdamgia.ru/ «РЕШУ ОГЭ»: математика. ОГЭ – 2018: задания, ответы, решения. Обучающая система Дмитрия Гущина.

СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ!