Планиметрия в заданиях ЕГЭ (профиль)

Методика подготовки к решению задач планиметрии

Сначала **— теория.**

(свойства геометрических фигур, определения и теоремы)

Потом**- практика.**

(решение реальных задач ЕГЭ)

Углы, треугольники, четырехугольники

1. Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.
2. Свойство медианы прямоугольного треугольника.
3. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма.
4. Площадь выпуклого четырехугольника
5. Свойства трапеции: отрезок, соединяющий середины диагоналей
6. Свойства равнобедренной трапеции
7. Замечательное свойство трапеции.
8. Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
9. Свойства биссектрис треугольника.
10. Свойства медиан треугольника
11. Свойство высот треугольника.

Окружности

12. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.

13. Теорема о пересекающихся хордах.

14. Теорема о серединном перпендикуляре к хорде.

15. Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.

16. Дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны.

17. Угол между касательной и хордой.

18. Теорема о секущей и касательной.

19. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами.

20. Угол между двумя секущими (с вершиной вне окружности) равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности.

21. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c, равен $\frac{1}{2}(a+b-c)$.

22. Прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.

23. Если расстояние между центрами окружностей радиусами R и r равно a и $a > R+r$, то отрезки общих внешних и общих внутренних касательных, заключенные между точками касания, равны соответственно $\sqrt{a^2-(R-r)^2}$ и $\sqrt{a^2-(R+r)^2}$

24. Четырехугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180 градусов.

25. В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны.

26. Если окружность вписана в равнобедренную трапецию, то боковая сторона трапеции равна ее средней линии.

27. Если M – точка касания со стороной AC окружности, вписанной в треугольник ABC, то AM = p – BC, где p – полупериметр треугольника ABC.

28. Если окружность касается стороны BC треугольника ABC и продолжений сторон AB и AC, то расстояние от вершины A до точки касания окружности с прямой AB равно полупериметру треугольника ABC.

29. Если окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC соответственно в точках K, L, M, а угол BAC равен φ, то угол KLM $90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$.

30. Если прямые, проходящие через точку A, касаются окружности S в точках B и C, то центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на окружности S.

31. Если площадь треугольника равна S, то площадь треугольника, составленного из его медиан, равна $\frac{3}{4}S$.

32. Свойство биссектрисы треугольника. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону в отношении длин прилежащих сторон.

Критерии проверки и оценка решений задания 16

Задание №16 – это планиметрическая задача. В пункте *а* нужно **доказать** геометрический факт, в пункте *б* – найти (вычислить) геометрическую величину.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Примеры оценивания решений задания 16

Пример 1.

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120°$.

Ответ: б) $3:4$.

№16.

Дано:

$ABCD$ - трапеция

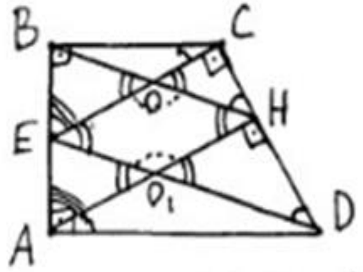
$BC \perp AB \perp AD$

$AH \perp CD$

$CE \perp CD$

а) Доказать:

$BH \parallel ED$



Доказательство:

1) т.к. $AH \perp CD$ и $CE \perp CD$, то $AH \parallel CE$;

2) AB - секущая при двух $\parallel$ прямых, значит $\angle BEC = \angle BAH$; 3) BH - тоже секущая, значит $\angle BOE = \angle COH = \angle BHA$;

4) ED - тоже секущая, значит $\angle CED = \angle EO_1A = \angle HO_1D$;

5) $\angle EOH = 180° - \angle COH$ (смеж. углы), $\angle EO_1H = 180° - \angle BHA$. т.к. $\angle COH = \angle BHA$, то $\angle EOH = \angle EO_1H$, следовательно, $EOHO_1$ - параллелограм, а его противолежащие стороны = и $\parallel$, значит, $BH \parallel ED$.

№16.

Дано:

$ABCD$ – трапеция

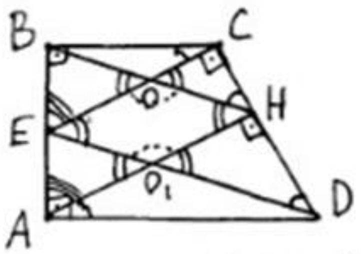
$BC \perp AB \perp AD$

$AH \perp CD$

$CE \perp CD$

а) Доказать:

$BH \parallel ED$



Доказательство:

1) т.к. $AH \perp CD$ и $CE \perp CD$, то $AH \parallel CE$;

2) AB – секущая при двух $\parallel$ прямых, значит $\angle BEC = \angle BAH$; 3) BH – тоже секущая, значит $\angle BOE = \angle COH = \angle BHA$;

4) ED – тоже секущая, значит $\angle CED = \angle EO_1A = \angle HO_1D$;

5) $\angle EOH = 180° - \angle COH$ (смеж. углы), $\angle EO_1H = 180° - \angle BHA$. т.к. $\angle COH = \angle BHA$, то $\angle EOH = \angle EO_1H$, следовательно, $EOHO_1$ – параллелограм, а его противолежащие стороны $=$ и $\parallel$, значит, $BH \parallel ED$.

Комментарий.

Имеется попытка доказательства утверждения пункта *а*. Логическая ошибка содержится в записи 5) – при вычислении угла EO_1H : $\angle EO_1H = 180° - \angle EO_1A$. Замена угла $\angle EO_1A$ углом $\angle BHA$ возможна только при условии параллельности прямых BH и ED, а как раз это и требовалось доказать.

Оценка эксперта: 0 баллов.

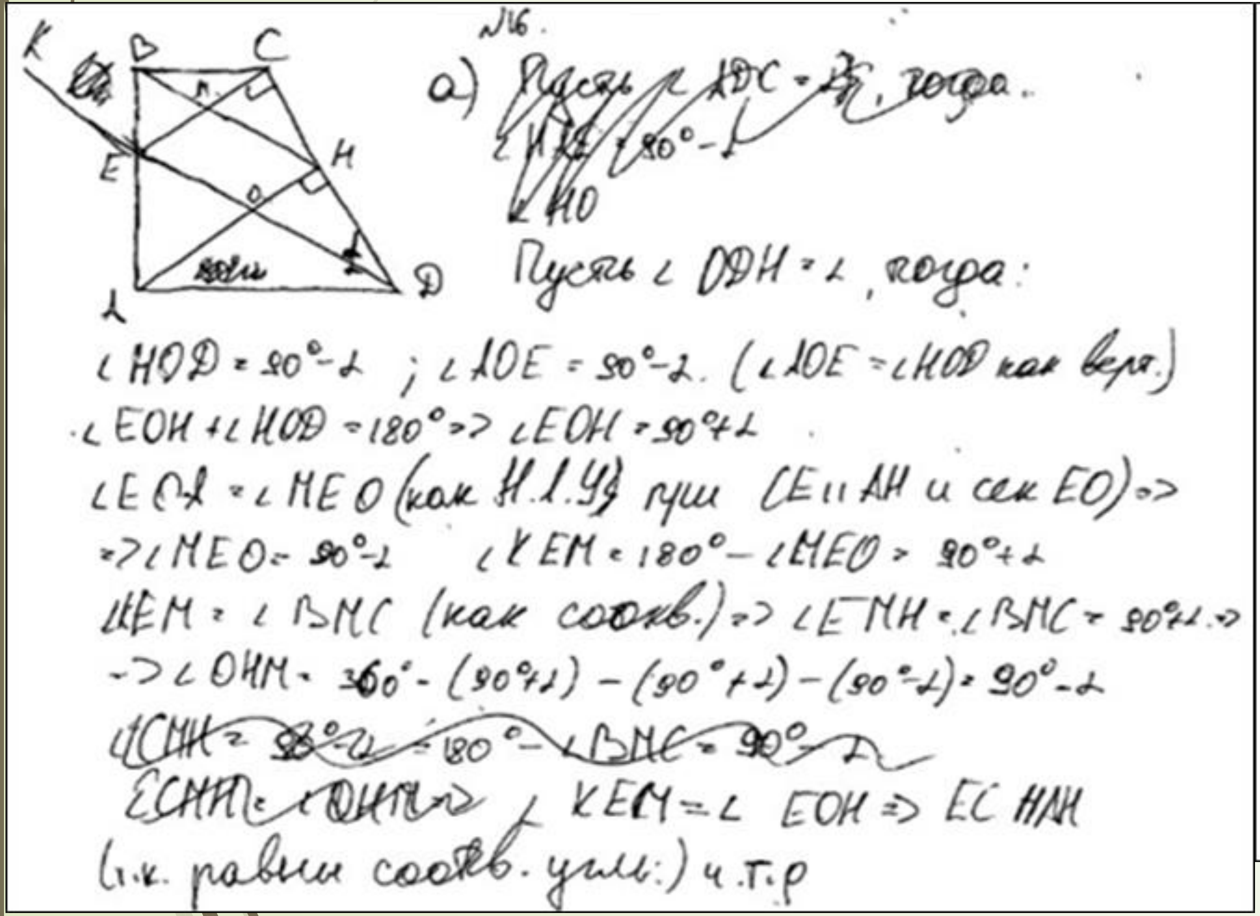
Пример 2.

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120°$.

Ответ: б) $3:4$.



№6.

а) ~~Пусть ∠ADC = α, тогда ∠HAD = 90° − α~~

Пусть ∠ODH = α, тогда:

∠HOD = 90° − α; ∠AOE = 90° − α. (∠AOE = ∠HOD как верт.)

∠EOH + ∠HOD = 180° => ∠EOH = 90° + α

∠EOA = ∠MEO (как Н.Л.У. при CE ∥ AH и сек EO) =>

=> ∠MEO = 90° − α   ∠KEM = 180° − ∠MEO = 90° + α

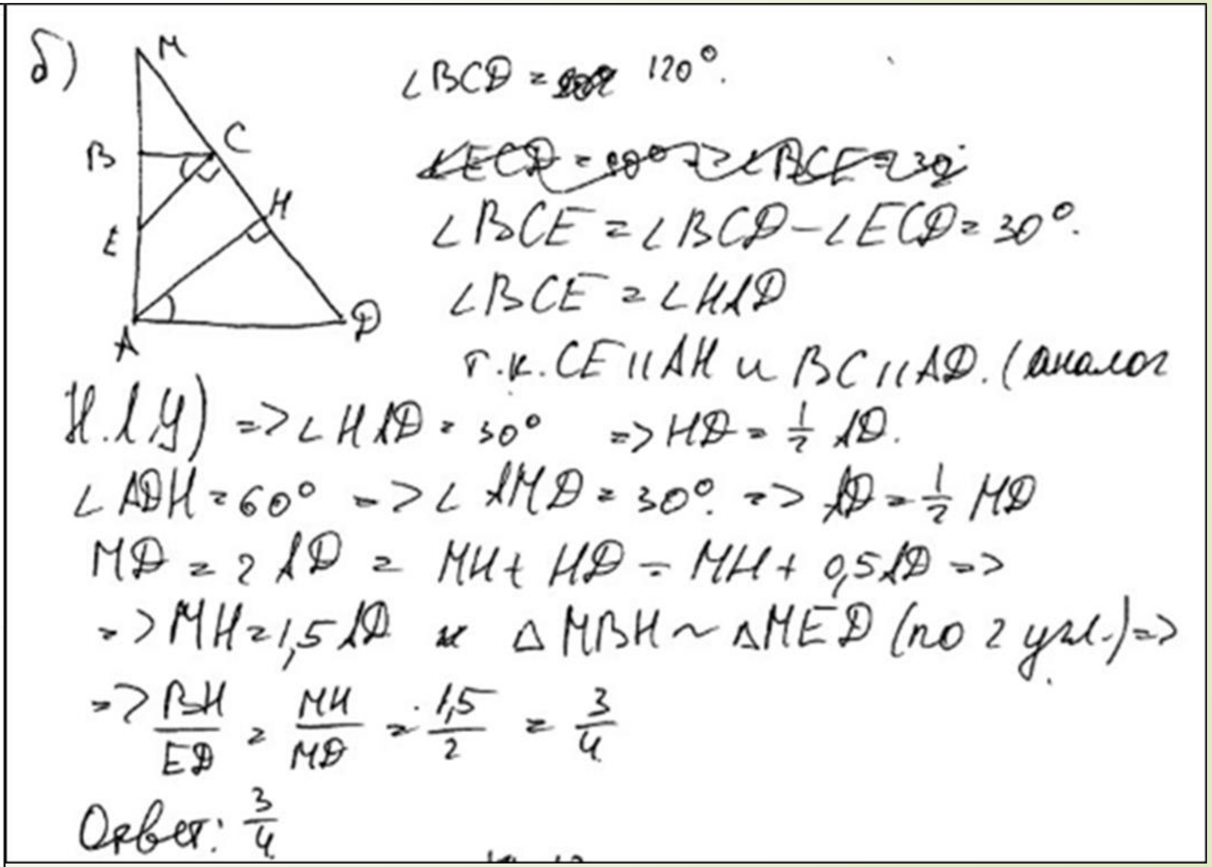
∠KEM = ∠BMC (как соотв.) => ∠EMH = ∠BMC = 90° + α =>

=> ∠OHM = 360° − (90° + α) − (90° + α) − (90° − α) = 90° − α

~~∠CMH = 90° − α = 180° − ∠BMC = 90° − α~~

~~∠CHM = ∠OHM =>~~ ∠KEM = ∠EOH => EC ∥ AH

(т.к. равны соотв. углы) ч.т.д.



б) ∠BCD = 120°.

~~∠ECD = 90° => ∠BCE = 30°~~

∠BCE = ∠BCD − ∠ECD = 30°.

∠BCE = ∠HAD

т.к. CE ∥ AH и BC ∥ AD. (аналог Н.Л.У.) => ∠HAD = 30° => HD = ½ AD.

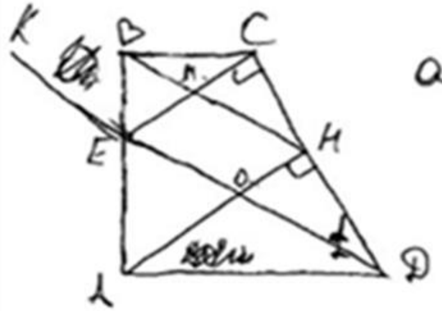
∠ADH = 60° => ∠AMD = 30° => AD = ½ MD

MD = 2AD = MH + HD = MH + 0,5AD =>

=> MH = 1,5AD и △MBH ~ △MED (по 2 угл.) =>

=> $\frac{BH}{ED} = \frac{MH}{MD} = \frac{1{,}5}{2} = \frac{3}{4}$

Ответ: $\frac{3}{4}$



№16.

а) Пусть $\angle ODH = \alpha$, тогда:

$\angle HOD = 90^\circ - \alpha$; $\angle AOE = 90^\circ - \alpha$. ($\angle AOE = \angle HOD$ как верт.)

$\angle EOH + \angle HOD = 180^\circ \Rightarrow \angle EOH = 90^\circ + \alpha$

$\angle ECA = \angle MEO$ (как н.л.у. при $CE \parallel AH$ и сек EO) $\Rightarrow$

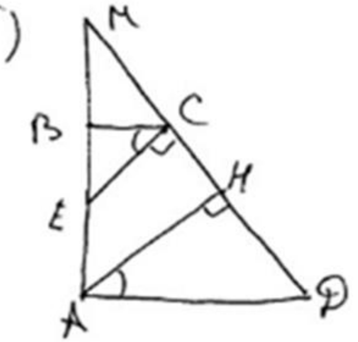
$\Rightarrow \angle MEO = 90^\circ - \alpha$ $\quad \angle KEM = 180^\circ - \angle MEO = 90^\circ + \alpha$

$\angle KEM = \angle BMC$ (как соотв.) $\Rightarrow \angle EMH = \angle BMC = 90^\circ + \alpha$

$\Rightarrow \angle OHM = 360^\circ - (90^\circ + \alpha) - (90^\circ + \alpha) - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ - \alpha$

$\angle KEM = \angle EOH \Rightarrow EC \parallel AH$

(т.к. равны соотв. углы) ч.т.д.



б) $\angle BCD = 120^\circ$.

$\angle BCE = \angle BCD - \angle ECD = 30^\circ$.

$\angle BCE = \angle HAD$

т.к. $CE \parallel AH$ и $BC \parallel AD$. (аналог н.л.у.) $\Rightarrow \angle HAD = 30^\circ \Rightarrow HD = \frac{1}{2} AD$.

$\angle ADH = 60^\circ \Rightarrow \angle AMD = 30^\circ \Rightarrow AD = \frac{1}{2} MD$

$MD = 2AD = MH + HD = MH + 0{,}5AD \Rightarrow$

$\Rightarrow MH = 1{,}5AD$ и $\triangle MBH \sim \triangle MED$ (по 2 угл.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BH}{ED} = \frac{MH}{MD} = \frac{1{,}5}{2} = \frac{3}{4}$

Ответ: $\frac{3}{4}$

Комментарий.

В данном решении есть попытка доказательства утверждения пункта *а*. Логическая ошибка содержится в записи $\angle KEM = \angle BMC$ – это возможно только при параллельности прямых BH и ED, а как раз это и требовалось доказать. Верный ответ в пункте *б* получен обоснованно с использованием недоказанного утверждения пункта *а*.

Оценка эксперта: 1 балл.

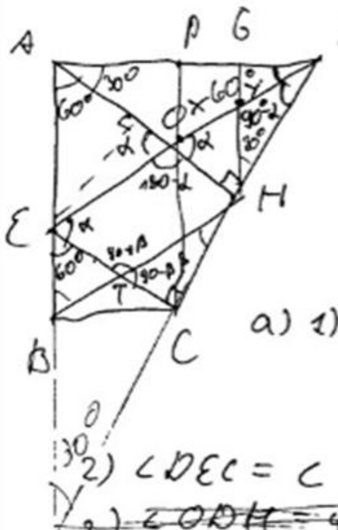
Пример 3.

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120°$.

Ответ: б) $3:4$.



№16.

Дано: $AH \perp CD$ $\quad \angle BCD = 120°$

$CE \perp CD$ и $CE \cap AB = E$

а) Д-ть: $BH \parallel ED$

б) $\frac{BH}{ED}$ – ?

а) 1) $\left.\begin{matrix} AH \perp CD \\ CE \perp CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ по пр. перп. прямых $AH \parallel EC$

2) $\angle DEC = \angle DOH = \alpha$ как соотв.

~~3) $\angle ODH = 90° - \alpha$~~

4) Пусть $AB = x$ $\quad AH = y$ $\quad$ ~~5) $\triangle BET \sim \triangle$ by~~

5) $\triangle BET \sim \triangle BAH$ по 2-м углам ($\angle ABH$ – общий, $\angle BET = \angle BAH$ как соотв.) k – коэффициент подобия

6) $AE = AB - BE = AB - kAB = x(1-k)$

$AO = AH - OH = AH - kAH = y(1-k)$

7) $\triangle AEO \sim \triangle ABH$ по углу и 2-м сторонам ($\angle A$ – общий; $\frac{AO}{AH} = 1-k$ и $\frac{AE}{AB} = 1-k$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AED = \angle ABH$

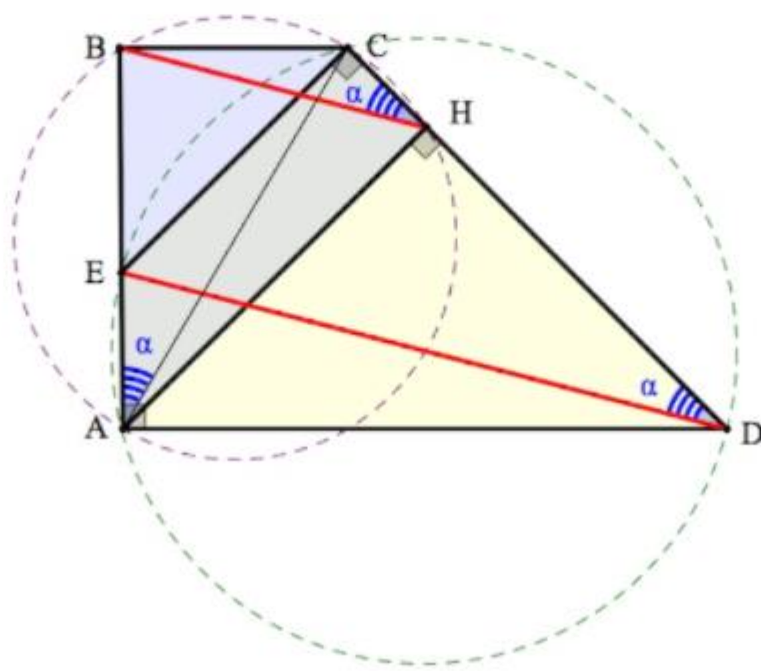
8) т.к. $\angle AED = \angle ABH$, то по признаку параллельности прямых (прямые парал., если соотв. углы равны) $ED \parallel BH$ ч. т. д.

Комментарий.

Логическая ошибка: доказательство утверждения пункта *а* опирается на дополнительное условие из пункта *б*.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 3.
В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.
а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.
б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120°$.
Ответ: б) $3:4$.



Около четырехугольника $AECD$ можно описать окружность, так как суммы противоположных углов равны ($\angle ECD = \angle BAD = 90°$).

Тогда углы EDC, EAC равны как вписанные углы одной окружности, опирающиеся на одну дугу.

Около четырехугольника $ABCH$ можно описать окружность, так как суммы противоположных углов равны ($\angle ABC = \angle AHC = 90°$).

Тогда углы EAC, BHC равны как вписанные углы одной окружности, опирающиеся на одну дугу.

Итак, $\angle BHC = \angle EDC$. Указанные углы – соответственные углы при прямых BH, ED и секущей CD. Значит, по признаку параллельности прямых, $BH \parallel ED$. Что и требовалось доказать.

Пример 3.

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120°$.

Ответ: б) $3:4$.

б) Опустим из точки B перпендикуляр BK на прямую CD (рис. 2). Стороны KH и CD треугольников BKH и ECD лежат на одной прямой, а стороны BK и EC, BH и ED попарно параллельны. Значит, треугольники BKH и ECD подобны.

Поскольку

$$BK = BC \cdot \sin \angle BCK = EC \cdot \cos \angle ECB \cdot \sin \angle BCK =$$

$$= EC \cdot \cos 30° \cdot \sin 60° = \frac{3}{4} EC,$$

коэффициент подобия равен $\frac{3}{4}$. Значит,

$$BH : ED = 3:4.$$

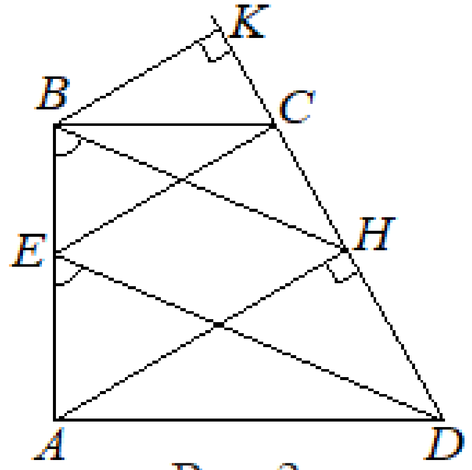


Рис. 2

Чтобы справиться с планиметрической задачей, нужно:

1) Сделать максимально достоверный чертеж;

2) Использовать только те свойства фигур, которые можно доказать или основанные на известных геометрических фактах.

3) Не ошибаться в формулах.

Спасибо за внимание!

Удачи на экзаменах!